Twierdzenie o wartości średniej dla całek, całki niewłaściwe

Zadanie 1. Wykazć, że $\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx + \int\limits_1^e \sqrt{\ln x}\,dx = e$.

Zadanie 2. Oblicz

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx, \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\,dx,$$

$$c)\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1 \frac{1}{\varepsilon x^3+1}\,dx, \qquad d)\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx \text{ gdzie } \quad a,b>0 \quad \text{i} \quad f\in C[0,1].$$

Zadanie 3. Oszacować całkę: $\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Zadanie 4. Oszacować całkę: $\int\limits_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx$, gdzie $\alpha \geqslant 0,\ \ 0<a<b$.

Zadanie 5. Obliczyć całki:

$$a)\ \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx, \quad \text{dla} \quad a>0, \qquad b)\ \int\limits_0^1 \ln x\,dx,$$

$$c)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \qquad d)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx.$$

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność całek:

$$a)\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx, \qquad b)\ \int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx,$$

$$c)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+x}\,dx, \qquad d)\ \int\limits_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{arctg} x^2}{1+x^2}\,dx.$$

$$e)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-x}}\,dx, \qquad f)\ \int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$g)\ \int\limits_0^1 \frac{1+x}{\sin^2 x}\,dx, \qquad h)\ \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\,dx,$$

$$i)\ \int\limits_0^2 \frac{1}{\ln(1+x)}\,dx, \qquad j)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$$