

### Zastosowania całki oznaczonej

**Zadanie 1.** Oblicz pole pętli, którą tworzy krzywa:  $x = 2t - t^2$ ,  $y = t^2(2 - t)$ .

**Zadanie 2.** Znaleźć pole jednego zwoju spirali Archimedesesa:  $r = a\phi$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

**Zadanie 3.** Obliczyć pole figury:  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ .

**Zadanie 4.** Obliczyć długość łuku podanych krzywych:

a)  $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$ ,  $x \in [1, 3]$ .

b)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ .

c)  $f(x) = \arcsin(e^{-x})$ .

d)  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $a > 0$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

e)  $r(\phi) = \phi^2$ ,  $0 \leq \phi \leq \sqrt{5}$ .

**Zadanie 5.** Oblicz objętość figur ograniczonych powierzchniami:

a)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ ,  $0 < z < a$ .

b)  $x + y + z^2 = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

**Zadanie 6.** Znajdź objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej:

a)  $y = x(2 - x)$ ,  $x \in (0, 2)$  wokół prostej  $y = 0$ .

b)  $x(t) = a(t - \sin t)$ ,  $y(t) = a(1 - \cos t)$  wokół osi  $OX$ .

c) spirali Archimedesesa  $r = a\phi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$  wokół osi biegunowej.

**Zadanie 7.** Oblicz pole powierzchni bryły obrotowe powstałej w wyniku obrotu krzywej

a)  $f(x) = \sqrt{x}$  wokół  $OX$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

b) asteroidy:  $x(t) = a \cos^3 t$ ,  $y(t) = a \sin^3 t$   $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

c) kardiody  $r = a(1 + \cos \phi)$  wokół osi biegunowej.

d)  $f(x) = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ .