Całki oznaczone

Zadanie 1. Korzystając z definicji całki Riemanna obliczyć:

a)$\int\limits_1^2 x\,dx$, b)$\int\limits_0^1 2^x\,dx$, c)$\int\limits_0^1 x^2\,dx$.

Zadanie 2. Oblicz całki oznaczone:

a) $\int\limits_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, b)$\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$, c) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-2x\cos\alpha+1}\,dx$, dla $0 < \alpha\pi$

d)$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\cos x}\,dx$, e) $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}} \mathrm{arctg} x\,dx$, f) $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$, g) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

Zadanie 3. Wykazać, że

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Zadanie 4. Obliczyć: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$.

Zadanie 5. Wykazać, że dla funkcji f ciągłej na $[-T,T]$ zachodzi:

1. Jeśli f parzysta, to $\int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^T f(x)\,dx$
2. Jeśli f nieparzysta, to $\int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx = 0$.

Zadanie 6. Wykazać, że:

1. $\int\limits_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} xf(x)\,dx$ dla $a > 0$ i f ciągłej na $[0,a^2]$.
2. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx$ dla f ciągłej na $[a,b]$.
3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$, dla f ciągłej na $[0,1]$.
4. $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

Zadanie 7. Obliczyć:

a)$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}$, b)$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$, c)$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.