

Analiza II
Kolokwium nr 2. Zestaw I.

Imię i Nazwisko:

Numer grupy:

1. Znajdź całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

2. Znajdź całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{x^2 - 36} dx.$$

3. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

4. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu figury ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in [1, 3]$ wokół osi Ox .

5. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_3^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^6 - 10x}}$$

Wzory, które mogą się przydać:

I. Funkcje hiperboliczne:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x.$$

II. Wyrażenie funkcji area za pomocą logarytmów naturalnych:

$$\operatorname{ar} \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{ar} \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

III. Podstawienia Eulera:

1. podstawienie Eulera: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$ dla $a > 0$.

2. podstawienie Eulera: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ dla $c > 0$.

3. podstawienie Eulera: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$, gdzie λ jest pierwiastkiem równania $ax^2 + bx + c = 0$.

Analiza II
Kolokwium nr 2. Zestaw II.

Imię i Nazwisko:

Numer grupy:

1. Znajdź całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{1 + 4 \cos x}.$$

2. Znajdź całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{x^2 + 16} dx.$$

3. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt[n]{e^1} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^n}).$$

4. Oblicz pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $f(x) = 2x - 1$ dla $x \in [1, 3]$ wokół osi Ox .

5. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}}.$$

Wzory, które mogą się przydać:

I. Funkcje hiperboliczne:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x.$$

II. Wyrażenie funkcji area za pomocą logarytmów naturalnych:

$$\operatorname{ar} \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{ar} \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

III. Podstawienia Eulera:

1. podstawienie Eulera: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$ dla $a > 0$.

2. podstawienie Eulera: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ dla $c > 0$.

3. podstawienie Eulera: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$, gdzie λ jest pierwiastkiem równania $ax^2 + bx + c = 0$.