

## Analiza funkcjonalna. Kolokwium

24 maja 2011 r. Grupa A

**Zadanie 1.** Niech  $x(t) = t$ . Znajdź normę funkcji  $x(t)$  w przestrzeniach:

- $L^p(-1, 1)$  dla  $p \in [1, \infty)$ ,
- $C(-1, 1)$ ,
- $C^k(-1, 1)$  dla  $k \in \mathbb{N}$ .

**Zadanie 2.** W przestrzeni ilorazowej  $E = l^\infty/c_0$  oblicz normę wektora  $[x]$ , gdzie  $x = (x_n)$ ,  $x_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n^2}$ .

**Zadanie 3.** Niech  $H = L^2([0, 2])$  i  $M = \{f \in L^2([0, 2]) : \int_0^2 xf(x) dx = 0\}$ .

- Przedstaw wektor  $f(x) = 2$  w postaci  $f = f_M + (f - f_M)$ , gdzie  $f_M \in M$ ,  $f - f_M \in M^\perp$ .
- Znajdź odległość  $\text{dist}(f, M)$ .

**Zadanie 4.** Niech  $u: c \rightarrow \mathbb{R}$  funkcjonal zadany wzorem  $u(x_1, x_2, \dots) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + x_4 - 6x_5$ . Oblicz:

- normę funkcjonału  $u$ ,
- odległość  $\text{dist}(g, M)$  ciągu  $g = (1, 1, \dots)$  od zbioru  $M = \{f \in c : u(f) = 0\}$ .

**Zadanie 5.** Zastosuj w przestrzeni  $L^2([0, 1])$  ortonormalizację Grama-Schmidta do wektorów  $f_1(x) = x - 1$  i  $f_2(x) = x + 2$  i znajdź wektor  $g$  z przestrzeni  $F$  rozpiętej na wektorach  $f_1$  i  $f_2$  najbliższej położony wektora  $f(x) = x^3$ .

## Analiza funkcjonalna. Kolokwium

24 maja 2011 r. Grupa B

**Zadanie 1.** Zastosuj w przestrzeni  $L^2([0, 1])$  ortonormalizację Grama-Schmidta do wektorów  $f_1(x) = 2x$  i  $f_2(x) = x + 1$  i znajdź wektor  $g$  z przestrzeni  $F$  rozpiętej na wektorach  $f_1$  i  $f_2$  najbliższej położony wektora  $f(x) = x^2$ .

**Zadanie 2.** Niech  $H = L^2([0, 3])$  i  $M = \{f \in L^2([0, 3]) : \int_0^3 xf(x) dx = 0\}$ .

- Przedstaw wektor  $f(x) = 1$  w postaci  $f = f_M + (f - f_M)$ , gdzie  $f_M \in M$ ,  $f - f_M \in M^\perp$ .
- Znajdź odległość  $\text{dist}(f, M)$ .

**Zadanie 3.** Niech  $u: c \rightarrow \mathbb{R}$  funkcjonal zadany wzorem  $u(x_1, x_2, \dots) = -3 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 2x_3 - 5x_6$ . Oblicz:

- normę funkcjonału  $u$ ,
- odległość  $\text{dist}(g, M)$  ciągu  $g = (-1, -1, \dots)$  od zbioru  $M = \{f \in c : u(f) = 0\}$ .

**Zadanie 4.** W przestrzeni ilorazowej  $E = l^\infty/c_0$  oblicz normę wektora  $[x]$ , gdzie  $x = (x_n)$ ,  $x_n = -1 - (-1)^n + \frac{3}{n}$ .

**Zadanie 5.** Niech  $x(t) = t^3$ . Znajdź normę funkcji  $x(t)$  w przestrzeniach:

- $L^p(-1, 1)$  dla  $p \in [1, \infty)$ ,
- $C(-1, 1)$ ,
- $C^1(-1, 1)$ .