

**Analiza funkcjonalna dla IV roku matematyki.**  
**Zadania przygotowujące do kolokwium (część II)**

**Zadanie 9.** Znajdź normę elementu  $x = (x_n)$ ,  $x_n = \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$  w przestrzeniach:

- a)  $l^p$ ,  $p \in [1, \infty)$ ;
- b)  $l^\infty$ ,  $c_0$  i  $c$ .

**Zadanie 10.** Znajdź normę elementu  $f(x) = x^3$  w przestrzeniach:

- a)  $C([0, 1])$ ,  $L^\infty([0, 1])$ ;
- b)  $C^k([0, 1])$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;
- c)  $L^p([0, 1])$ ,  $p \in [1, \infty)$ ;

**Zadanie 11.** W przestrzeni  $\mathbb{R}^2$  rozważmy normę  $\|\cdot\|_1$  daną wzorem  $\|(x_1, x_2)\|_1 = 2|x_1| + 3|x_2|$  i normę  $\|\cdot\|_2$ , gdzie:

- a)  $\|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ;
- b)  $\|(x_1, x_2)\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ .

Wyznaczyc stałe dodatnie  $m$  i  $M$  takie, że

$$m\|(x_1, x_2)\|_1 \leq \|(x_1, x_2)\|_2 \leq M\|(x_1, x_2)\|_1 \quad \text{dla dowolnego wektora } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

**Zadanie 12.** Który spośród podanych niżej podzbiorów jest ograniczony w odpowiedniej przestrzeni?

- a)  $A = \{f \in C([0, 1]) : \int_0^1 |f(x)| dx \leq 1\}$  w przestrzeni  $C([0, 1])$ ;
- b)  $B = \{f \in L^1([0, 1]) : \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq 1\}$  w przestrzeni  $L^1([0, 1])$ .

**Zadanie 13.** Które spośród danych poniżej ciągów  $(f_n)$  są zbieżne w przestrzeni  $C([0, \pi])$ ?

- a)  $f_n(x) = \sin nx$ ,
- b)  $f_n(x) = \sin^n x$ ,
- c)  $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ ,
- d)  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$ .

**Zadanie 14.** Czy podany niżej podzbiór  $A$  przestrzeni  $l^2$  jest zbiorem domkniętym?

- a)  $A = \{(x_1, x_2, \dots) \in l^2 : x_{2k} = 0 \text{ dla każdego } k = 1, 2, \dots\}$ ;
- b)  $A = \{(x_1, x_2, \dots) \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq 1\}$ .

**Zadanie 15.** Udowodnić, że zbiór  $A = \{(x_n) \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4 \leq 1\}$  jest domknięty, lecz nie jest ograniczony w przestrzeni rzeczywistej  $l^2$ .

**Zadanie 16.** W przestrzeni ilorazowej  $E = l^\infty/c$  oblicz normę wektora  $[x]$ , gdzie  $x = (x_n)$ ,  $x_n = (-1)^n$ .

**Zadanie 17.** W przestrzeni ilorazowej  $E = L^\infty([-1, 1])/C([-1, 1])$  oblicz normę wektora  $[f]$ , gdzie  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  dla  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$  i  $f(0) = 0$ .

**Zadanie 18.** Sprawdzić, które z podanych poniżej funkcji są iloczynami skalarnymi w  $\mathbb{R}^3$ :

- a)  $S((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2$ ;
- b)  $S((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ;
- c)  $S((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i=1}^3 x_iy_i + \sum_{i,j=1}^3 x_iy_j$ ;
- d)  $S((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3 \sum_{i=1}^3 x_iy_i - \sum_{i,j=1}^3 x_iy_j$ .

**Zadanie 19.** Niech  $H = L^2([0, 1])$  i  $M = \{f \in L^2([0, 1]) : \int_0^1 xf(x) dx = 0\}$ .

- a) Pokaż, że  $M$  jest domkniętą podprzestrzenią liniową.
- b) Przedstaw wektor  $f(x) = 1$  w postaci  $f = f_M + (f - f_M)$ , gdzie  $f_M \in M$ ,  $f - f_M \in M^\perp$ .
- c) Znajdź odległość  $\text{dist}(f, M)$ .

**Zadanie 20.** Zastosuj w przestrzeni  $L^2([0, 1])$  ortonormalizację Grama-Schmidta do wektorów  $f_1(x) = x + 1$  i  $f_2(x) = x - 3$  i znajdź wektor  $g$  z przestrzeni  $F$  rozpiętej na wektorach  $f_1$  i  $f_2$  najbliższy położony wektora  $f(x) = x^2$ .

**Zadanie 21.** Układ funkcji  $x_n(t)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , w przedziale  $I \subset \mathbb{R}$  nazywamy *układem ortogonalnym (ortonormalnym)* z wagą  $p(t)$  w przedziale  $I$ , o ile układ funkcji  $y_n(t) = \sqrt{p(t)}x_n(t)$  jest ortogonalny (ortonormalny)

w  $L^2(I)$ . Wykaż, że:

a) Układ funkcji  $\varphi_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} L_{n-1}(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , gdzie  $L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$  jest  $n$ -tym wielomianem Laguerre'a ( $n = 0, 1, \dots$ ) jest ortonormalny z wagą  $p(t) = e^{-t}$  w przedziale  $(0, \infty)$ .

b) Układ wielomianów Hermite'a  $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , jest ortogonalny z wagą  $p(t) = e^{-t^2}$  w przedziale  $(-\infty, \infty)$ .