Elementy analizy funkcjonalnej dla II roku matematyki.
Zadania przygotowujące do kolokwium (część II)

Zadanie 9. Znajdź normę elementu $x = (x_n)$, $x_n = \frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$ w przestrzeniach:

a) l^p, $p \in [1, \infty)$;
b) l^∞, c_0 i c.

Zadanie 10. Znajdź normę elementu $f(x) = x^3$ w przestrzeniach:

a) $C([0,1])$, $L^\infty([0,1])$;
b) $C^k([0,1])$, $k \in \mathbb{N}$;
c) $L^p([0,1])$, $p \in [1,\infty)$;

Zadanie 11. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ rozważmy normę $\|\cdot\|_1$ daną wzorem $\|(x_1,x_2)\|_1 = 2|x_1| + 3|x_2|$ i normę $\|\cdot\|_2$, gdzie:

a) $\|(x_1,x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;
b) $\|(x_1,x_2)\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Wyznaczyć stałe dodatnie m i M takie, że

$$m\|(x_1,x_2)\|_1 \leqslant \|(x_1,x_2)\|_2 \leqslant M\|(x_1,x_2)\|_1 \quad \text{dla dowolnego wektora} \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Zadanie 12. Który spośród podanych niżej podzbiorów jest ograniczony w odpowiedniej przestrzeni?

a) $A = \{f \in C([0,1]\colon \int_0^1 |f(x)|\,dx \leqslant 1\}$ w przestrzeni $C([0,1])$;
b) $B = \{f \in L^1([0,1])\colon \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| \leqslant 1\}$ w przestrzeni $L^1([0,1])$.

Zadanie 13. Które spośród danych poniżej ciągów (f_n) są zbieżne w przestrzeni $C([0,\pi])$?

a) $f_n(x) = \sin nx$,
b) $f_n(x) = \sin^n x$,
c) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$,
d) $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$.

Zadanie 14. Czy podany niżej podzbiór A przestrzeni l^2 jest zbiorem domkniętym?

a) $A = \{(x_1, x_2, ...) \in l^2\colon x_{2k} = 0$ dla każdego $k = 1, 2, ...\}$;
b) $A = \{(x_1, x_2, ...) \in l^2\colon \sum_{n=1}^\infty |x_n| \leqslant 1\}$.

Zadanie 15. Udowodnić, że zbiór $A = \{(x_n) \in l^2\colon \sum_{n=1}^\infty x_n^4 \leqslant 1\}$ jest domknięty, lecz nie jest ograniczony w przestrzeni rzeczywistej l^2.

Zadanie 16. W przestrzeni ilorazowej $E = l^\infty/c$ oblicz normę wektora $[x]$, gdzie $x = (x_n)$, $x_n = (-1)^n$.

Zadanie 17. W przestrzeni ilorazowej $E = L^\infty([-1,1])/C([-1,1])$ oblicz normę wektora $[f]$, gdzie $f(x) = \frac{|x|}{x}$ dla $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ i $f(0) = 0$.

Zadanie 18. Sprawdzić, które z podanych poniżej funkcji są iloczynami skalarnymi w $\mathbb{R}^3$:

a) $S((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2$;
b) $S((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$;
c) $S((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \sum_{i=1}^3 x_iy_i + \sum_{i,j=1}^3 x_iy_j$;
d) $S((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 3\sum_{i=1}^3 x_iy_i - \sum_{i,j=1}^3 x_iy_j$.

Zadanie 19. Niech $H = L^2([0,1])$ i $M = \{f \in L^2([0,1])\colon \int_0^1 xf(x)\,dx = 0\}$.

a) Pokaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią liniową.
b) Przedstaw wektor $f(x) = 1$ w postaci $f = f_M + (f - f_M)$, gdzie $f_M \in M$, $f - f_m \in M^\perp$.
c) Znajdź odległość $\operatorname{dist}(f, M)$.

Zadanie 20. Zastosuj w przestrzeni $L^2([0,1])$ ortonormalizację Grama-Schmidta do wektorów $f_1(x) = x+1$ i $f_2(x) = x - 3$ i znajdź wektor g z przestrzeni F rozpiętej na wektorach f_1 i f_2 najbliżej położony wektora $f(x) = x^2$.

Zadanie 21. Układ funkcji $x_n(t)$, $n = 1, 2, 3, ...$, w przedziale $I \subset \mathbb{R}$ nazywamy *układem ortogonalnym (ortonormalnym) z wagą $p(t)$ w przedziale I*, o ile układ funkcji $y_n(t) = \sqrt{p(t)}x_n(t)$ jest ortogonalny (ortonormalny) w $L^2(I)$. Wykaż, że:

a) Układ funkcji $\varphi_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} L_{n-1}(t)$, $n = 1, 2, ...$, gdzie $L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$ jest n-tym wielomianem Laguerre'a $(n = 0, 1, ...)$ jest ortonormalny z wagą $p(t) = e^{-t}$ w przedziale $(0, \infty)$.

b) Układ wielomianów Hermite'a $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$, $n = 1, 2, ...$, jest ortogonalny z wagą $p(t) = e^{-t^2}$ w przedziale $(-\infty, \infty)$.