Elementy analizy funkcjonalnej dla II roku matematyki.
Zadania przygotowujące do kolokwium (część I)

Zadanie 1. Sprawdź, czy podane zbiory są przestrzeniami liniowymi:

a) zbiór wszystkich funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spełniających warunek Höldera z wykładnikiem α (tzn. takich, dla których istnieje stała $L > 0$ taka, że $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|^\alpha$ zachodzi dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$);

b) Zbiór wszystkich funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ o ograniczonym wahaniu (tzn. takich, że $\sup \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \infty$, gdzie supremum jest wzięte po wszystkich przedziałach $a = x_0 < ... < x_n = b$).

Zadanie 2. Niech A — niepusty i wypukły podzbiór przestrzeni liniowej X. Wykaż, że stożek $S = \{tx\colon x \in A,\ t \in [0,\infty)\}$ jest zbiorem wypukłym.

Zadanie 3. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y = 0\} \cup \{(0,1)\}$. Wyznaczyc $\mathrm{Conv}(A)$.

Zadanie 4. Wykaż, że wzór $||x|| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$ określa normę w $C^1([a,b])$.

Zadanie 5. Wykaż, że wzór $||(x_1,x_2,x_3)|| = \max\{\sqrt{x_1^2+x_2^2}, |x_3|\}$ określa normę w $\mathbb{R}^3$. Wyznacz kulę $B(0,1)$ dla tej normy.

Zadanie 6. W przestrzeni $C([a,b])$ rozważmy dwie normy:

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{i} \quad ||f||_2 = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|.$$

Czy normy te są równoważne?

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność ciągów (f_n) w przestrzeni $C([0,1])$:

a) $f_n(x) = x(1-x^n)$,
b) $f_n(x) = x^n(1-x)$,
c) $f_n(x) = x^n(1-x^n)$.

Zadanie 8. Wykaż, że przestrzeń $< X, d >$ z definicją odległości $d(x,y) = 1$ dla $x \neq y$, $d(x,y) = 0$ dla $x = y$ jest zupełna.