Elementy analizy funkcjonalnej. Kolokwium 23 maja 2011 r. Grupa A

Zadanie 1. Niech $x_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla} \quad n = 1, 2, ..., 10 \\ 0 & \text{dla} \quad n > 10 \end{cases}$. Znajdź normę ciągu $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeniach:

a) l^p, $p \in [1, \infty)$, b) c_0,

Zadanie 2. Niech $x(t) = t^2$. Znajdź normę funkcji $x(t)$ w przestrzeniach:

a) $L^p(-1, 1)$, $p \in [1, \infty)$, b) $C^1(-1, 1)$,

Zadanie 3. Sprawdź, czy funkcja $s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$s(x_1, x_2, x_3) = 2|x_1| + \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

określa normę w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4. Sprawdź, czy funkcja $s\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$s((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

określa iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 5. Zastosuj w przestrzeni $L^2(-1, 1)$ ortonormalizację Grama-Schmidta do funkcji $x_1(t) = t - 1$ i $x_2(t) = t + 3$.

Elementy analizy funkcjonalnej. Kolokwium 23 maja 2011 r. Grupa B

Zadanie 1. Niech $x(t) = t^4$. Znajdź normę funkcji $x(t)$ w przestrzeniach:

a) $L^p(-1, 1)$, $p \in [1, \infty)$, b) $C(-1, 1)$,

Zadanie 2. Niech $x_n = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad n = 1, 2, ..., 8 \\ 0 & \text{dla} \quad n > 8 \end{cases}$. Znajdź normę ciągu $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeniach:

a) l^p, $p \in [1, \infty)$, b) l^∞,

Zadanie 3. Sprawdź, czy funkcja $s\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$s((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = -2x_1y_2 + 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 1x_3y_3$$

określa iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4. Sprawdź, czy funkcja $s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$s(x_1, x_2, x_3) = 3\sqrt{x_1^2 + x_3^2} + \frac{1}{2}|x_1|$$

określa normę w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 5. Zastosuj w przestrzeni $L^2(0, 2)$ ortonormalizację Grama-Schmidta do funkcji $x_1(t) = t - 5$ i $x_2(t) = t + 2$.