Wiad. Mat. 52 (1) 2016, 37–51
© 2016 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Piotr Pragacz (Warszawa)

Friedrich Hirzebruch – garść reminiscencji

Pomysł napisania dla *Wiadomości Matematycznych* artykułu o Friedrichu Hirzebruchu zrodził się kilka lat temu. Od tego czasu wiele się zmieniło. Przede wszystkim profesor Hirzebruch odszedł 27 maja 2012 roku. Po jego śmierci poświęcono mu wiele konferencji, wykładów oraz artykułów [2, 3, 6, 18]. Jeszcze za życia Profesora powstały artykuły [1, 4, 5] oraz wywiad wideo [10]. W przygotowaniu jest książka Winfrieda Scharlaua. Publikacje te dokładnie opisują życie i dzieło Hirzebrucha z punktu widzenia jego bliskich współpracowników. W związku z tym, mimo iż początkowo zamierzałem napisać artykuł podobny do tekstów *Życie i dzieło Alexandra Grothendiecka* [13] i *Życie i dzieło Józefa Marii Hoene-Wrońskiego* [14], to odstąpiłem od tego zamierzenia i ten artykuł będzie inny w swoim charakterze. Pragnę zawrzeć w nim kilka wspomnień o Profesorze z punktu widzenia kogoś, dla kogo był on mentorem w latach 1993–2006. Chcę również napisać o jego związkach z Impangą [15].

Friedricha Hirzebrucha spotkałem po raz pierwszy w 1988 roku w czasie semestru algebraicznego w Centrum Banacha, w pałacyku przy ulicy Mokotowskiej. Profesor przyjechał na konferencję z geometrii algebraicznej, zorganizowaną w ramach tego semestru. Głównym organizatorem konferencji był Wolfgang Vogel – pomagałem wówczas w pracach organizacyjnych. Wykład Hirzebrucha był dla nas, młodych uczestników, wielkim przeżyciem. Profesor mówił o związkach geometrii algebraicznej i fizyki. To był wykład Mistrza. Na tej konferencji także i ja miałem wykład. Mówiłem o wielomianach klas Cherna posiadających nośniki w rozmaitościach wyznacznikowych. Profesor był na moim wykładzie, zadał kilka pytań i miałem wrażenie, że spodobało mu się to, co robię.

© 2016 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Friedrich Hirzebruch w czasie *Leonhard Euler Congress* w Sankt Petersburgu w 2007 roku

W 1992 roku Adam Parusiński namówił mnie, by złożyć podanie o stypendium Fundacji Humboldta. W związku z tym odbyłem dwutygodniową wizytę w Instytucie Maxa Plancka (*Max-Planck-Institut für Mathematik*) w Bonn. Głównym punktem tej wizyty był wykład na *Oberseminar*, gdzie zaprezentowałem rozwinięcie mojej teorii wielomianów o nośnikach w miejscach degeneracji. Pamiętam, że na sali – oprócz Hirzebrucha – byli Robert MacPherson, Christian Okonek, Don Zagier i inni. Miałem wrażenie, że mój wykład spotkał się z zainteresowaniem. Niedługo potem otrzymałem stypendium Humboldta, które odbyłem w latach 1993–1995 w MPIM, a moim profesorem-gospodarzem (*host professor*) był właśnie Hirzebruch. W czasie tego pobytu i później był moim mentorem. Byłem już wprawdzie po habilitacji, ale dopiero profesor Hirzebruch pomógł mi znaleźć moje miejsce w matematyce.

Friedrich Hirzebruch urodził się 17 października 1927 roku w Hamm w Nadrenii Północnej-Westfalii. Jego ojciec był nauczycielem matematyki i dyrektorem gimnazjum. Był on także nauczycielem znanego matematyka Karla Steina.

W latach 1945–1948 Friedrich Hirzebruch odbył studia matematyczne na oddalonym o 30 kilometrów od Hamm uniwersytecie w Münster. Tu studiował głównie analizę zespoloną pod kierunkiem Heinricha Behnke. Z Münster wyszli Hans Grauert i Reinhold Remmert. Szkoła ta miała powiązania z Henri Cartanem z Paryża.

W latach 1949–1950 Friedrich Hirzebruch studiował topologię u Heinza Hopfa w Zurychu. Tamże przygotował rozprawę doktorską o rozwiązaniu osobliwości dwuwymiarowych przestrzeni zespolonych. W Zurychu zetknął się po raz pierwszy z klasami Stiefela–Whitneya i Cherna w topologii, pracując z Hopfem i Beno Eckmannem. Klasy Cherna towarzyszyły mu w pracy przez całe życie – jak napisał w artykule [9]. Studiując w Zurychu, Hirzebruch zrozumiał, że rezultaty topologii algebraicznej i geometrii algebraicznej pozwolą uzyskać postęp w analizie zespolonej. Pobyt w Zurychu zaowocował też kontaktami międzynarodowymi.

Pracę doktorską (której promotorami byli Behnke i Hopf) obronił w Münster w 1950 roku. Lata 1950–1952 spędził na uniwersytecie w Erlangen. W latach 1952–1954 przebywał w Instytucie Badań Zaawansowanych (*Institute for Advanced Study*, IAS) w Princeton i ten pobyt wywarł ogromny wpływ na jego badania i mistrzostwo matematyczne. Tuż po przyjeździe nawiązał współpracę z Kunihiko Kodairą i Donaldem C. Spencerem, a także Armandem Borelem. Korespondencyjnie współpracował z Jean-Pierre Serrem i René Thomem. Studiował geometrię algebraiczną – snopy, wiązki, kohomologie snopów, klasy Cherna, klasy charakterystyczne – a także teorię kobordyzmów. To w Princeton dokonał przełomu w badaniach nad twierdzeniem o sygnaturze, a następnie odkrył i udowodnił (w grudniu 1953 roku) twierdzenie Riemanna–Rocha dla rozmaitości dowolnego wymiaru.

IAS w Princeton zauroczył Hirzebrucha. Zapragnął stworzyć coś podobnego w rodzinnym kraju. Udało to mu się w roku 1980, kiedy to powołał do życia *Max-Planck-Institut für Mathematik* w Bonn. Hirzebruch został jego pierwszym dyrektorem.

Po powrocie do Niemiec w 1954 roku napisał w Münster książkę *Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie*, która zawierała kompletny dowód twierdzenia Riemanna–Rocha i stanowiła jego rozprawę habilitacyjną (zob. [7]). Na lata 1955–1956 przypadł ponowny wyjazd do Princeton, tym razem na uniwersytet. W czasie tego wyjazdu Hirzebruch spotkał Atiyaha, Borela, Botta, Cherna, Langa, Milnora, Serre'a, Singera i wielu innych. Poprowadził też wykład o rezultatach zawartych w swojej habilitacji. W 1956 roku otrzymał profesurę na uniwersytecie w pięknym mieście Bonn, gdzie pracował do 1993 roku. Choć sporo podróżował po całym świecie, dłuższy okres absencji w Bonn miał tylko jeden – urlop naukowy w Princeton w roku akademickim 1959/1960.

Ulubione obiekty matematyczne Hirzebrucha to rozmaitości, powierzchnie, osobliwości, klasy charakterystyczne.

— *Rozmaitości* – topologiczne, algebraiczne, zespolone (ale jego ostatni wykład dotyczył krzywych rzeczywistych).

Bonn widziane z Venusberg – rycina, którą otrzymałem w darze od księgarni *Bouvier* w Bonn

— *Powierzchnie* – dysertacja dotyczyła rozwiązania osobliwości dwuwymiarowych przestrzeni zespolonych przy pomocy σ-procesów Hopfa; powierzchnie modularne Hilberta badał wspólnie z Zagierem, Van de Venem i van der Geerem.

— *Osobliwości* – struktury egzotyczne na rozmaitościach pochodzące od osobliwości, które badał z Brieskornem (zob. [5]).

— *Klasy charakterystyczne* – klasy Stiefela–Whitneya, klasy Cherna (Chern był bliskim przyjacielem Hirzebrucha, zob. [9]), klasy Pontriagina (ważne w twierdzeniu o sygnaturze), genus Todda (Todd obliczył ten genus w wymiarze nieprzekraczającym sześciu; w całej ogólności zrobił to Hirzebruch). Hirzebruch napisał z Borelem trzy prace o klasach charakterystycznych przestrzeni jednorodnych. Jedną z fascynacji Hirzebrucha była podzielność klas Cherna i wielomianów od klas Cherna. Na początku studiów nad klasami Cherna, Hirzebrucha zaintrygował fakt, że na gładkiej powierzchni algebraicznej M suma $c_1^2 + c_2$ jest zawsze podzielne przez 12, przy czym c_1 oraz c_2 są pierwszą i drugą klasy Cherna wiązki stycznej do M. Interesujące jest również, gdy E jest wiązką wektorową nad sferą $2n$-wymiarową, to $c_n(E)$ jest podzielne przez $(n-1)!$ Na *Arbeitstagung* w 1958 roku, zatytułował swój wykład *c_n divisible by $(n-1)!$ over the $2n$-sphere* (zob. [4]).

W 1953 roku, w Princeton, Hirzebruch odkrył i dowiódł dwa fundamentalne twierdzenia – twierdzenie o sygnaturze i twierdzenie Riemanna–Rocha w dowolnym wymiarze. Niech E będzie wiązką wektorową rangi r nad gładką rozmaitością X. Załóżmy, że $x_1, \dots, x_r$ są pierwiastkami Cherna wiązki E. Szereg

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{\sqrt{x_i}}{\operatorname{tgh}\sqrt{x_i}}$$

jest symetryczny względem $x_1, \dots, x_r$, zatem jest szeregiem L od klas Cherna $c_1(E), \dots, c_r(E)$. Ten szereg $L(E) = L\big(c_1(E), \dots, c_r(E)\big)$ nosi nazwę *L-klasy Hirzebrucha E*. Jeśli E jest rzeczywistą wiązką wektorową na rozmaitości różniczkowej X, to definiujemy *klasy Pontriagina*

$$p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(EC) \in H^{4i}(X, Z) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots$$

Jeżeli X jest domkniętą zorientowaną rozmaitością parzystego wymiaru n, to forma przecięcia na $H^{n/2}(X)$ jest niezdegenerowana dzięki dualności Poincarego i jest symetryczna, gdy n jest podzielne przez cztery. Definiujemy wówczas $\sigma(X)$ (*sygnaturę X*) jako sygnaturę tej formy, czyli liczbę $(p - q)$, jeśli ta forma może być zapisana jako

$$z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_{p+q}^2$$

dla pewnej bazy $z_1, \dots, z_{p+q}$ w $H^{n/2}(X, R)$.

Twierdzenie Hirzebrucha o sygnaturze orzeka, że dla zwartej, zorientowanej, gładkiej rozmaitości X wymiaru $4n$, zachodzi wzór

$$\sigma(X) = \int_X L\big(p_1(X), \dots, p_n(X)\big),$$

przy czym dla wiązki stycznej TX do X, $p_i(X) = p_i(TX)$ są klasami Pontriagina X.

Na przykład,

$$\sigma(X) = \frac{1}{3}\int_X p_1(X), \quad \text{gdy } \dim X = 4,$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{45}\int_X p_2(X) - 7p_1(X)^2, \quad \text{gdy } \dim X = 8,$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{945}\int_X 62p_3(X) - 13p_2(X)p_1(X) + 2p_1(X)^3, \quad \text{gdy } \dim X = 12.$$

W dowodzie tego twierdzenia ważną rolę odegrał Thoma opis pierścienia kobordyzmów. O tym, a także o historii odkrycia twierdzenia Riemanna–Rocha w wyższych wymiarach, opowiada „rekreacyjny” artykuł [8].

Załóżmy teraz, że X jest zespoloną rzutową gładką rozmaitością algebraiczną wymiaru n, a $E \to X$ wiązką wektorową rangi r. Serre w liście do Kodairy i Spencera wysunął hipotezę, że „liczba Eulera"

$$\chi(X,E) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X,E)$$

wyraża się poprzez klasy Cherna X i E. Było to znane dla krzywych. Mianowicie Weil pokazał, że dla gładkiej krzywej X genusu g,

$$\chi(X,E) = \int_X c_1(E) + r(1-g).$$

W szczególności, jeśli $E = O(D)$ jest wiązką liniową stowarzyszoną z dywizorem D, to

$$\chi\big(X, O(D)\big) = \deg(D) + 1 - g$$

jest klasycznym wzorem Riemanna–Rocha dla systemów liniowych na krzywych.

Wielu matematyków próbowało uogólnić te wzory na rozmaitości wyższego wymiaru. Noether, Castelnuovo, Severi, Zariski uzyskali pewne rezultaty dla powierzchni, Zeuthen i Corrado Segre uogólnili pojęcie genusu.

Decydujący krok uczynił Hirzebruch. Dysponował on pewnymi pomysłowymi rachunkami Johna A. Todda, wybitnego angielskiego geometry algebraicznego. Ale te rachunki dotyczyły wymiarów nie większych niż sześć. Hirzebruch zrozumiał, jak należy te rachunki uogólnić i zdefiniował *genus Todda*:

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{x_i}{1-e^{-x_i}} = \mathrm{td}\big(c_1(E),\ldots,c_r(E)\big) = \mathrm{td}(E).$$

I to genus Todda okazał się kluczem do rozwiązania hipotezy Serre'a. W pracach [7,8] Hirzebruch zwrócił uwagę, że jedynym szeregiem potęgowym $f(x)$ z wyrazem stałym 1 spełniającym warunek

współczynnik przy x^m w $f(x)^{m+1}$ jest równy 1 *dla każdego* m

jestszereg

$$f(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

gdzie B_{2k} są liczbami Bernoullego: $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$ itd. (w pracach [7, 8] używa się innej wersji liczb Bernoullego: $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$ itd.). Ta charakteryzacja była mu pomocna w określeniu genusu Todda. Mamy (przy $c_i = c_i(E)$)

$$\mathrm{td}(E) = 1 + \tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \tfrac{1}{24}c_1c_2 + \ldots$$

Twierdzenie Hirzebrucha–Riemanna–Rocha orzeka, że

$$\chi(X,E) = \int_X \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}(X), \tag{1}$$

przy czym $\mathrm{ch}(E) = \sum_{i=1}^r e^{x_i}$ jest *charakterem Cherna* oraz $\mathrm{td}(X) = \mathrm{td}(TX)$ oznacza genus Todda X. Ponadto zachodzi wzór

$$\mathrm{ch}(E) = r + c_1 + \tfrac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \tfrac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \dots$$

Lewa strona równości (1) ma charakter holomorficzny, a prawa strona topologiczny. Podamy szkic dowodu z książki Hirzebrucha [7]. Wprowadźmy oznaczenie

$$T(X,E) = \int_X \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}(X).$$

Rozważmy wiązkę flag zupełnych $\pi\colon F(E) \to X$ stowarzyszoną z $E \to X$. Badanie własności $F(E)$ gra zasadniczą rolę w dowodzie Hirzebrucha. Ponadto z [7, Theorem 14.3.1] otrzymujemy

$$T(X,E) = T\big(F(E), \pi^*E\big).$$

Niech $\chi(X) = \chi(X, O_X)$ oznacza *genus arytmetyczny*. Wiadomo, że dla rozmaitości $F(r)$ flag zupełnych długości r, $\chi\big(F(r)\big) = 1$. Z [7, App. II, Theorem 8.1] wynika, że

$$\chi(X,E) = \chi\big(F(E), \pi^*E\big)\chi\big(F(r)\big) = \chi\big(F(E), \pi^*E\big).$$

Na $F(E)$ wiązka π^*E rozszczepia się na sumę wiązek liniowych L_i:

$$\pi^*E = L_1 \oplus \dots \oplus L_r.$$

Z [7, 12.1(5)] wynika równość

$$T\big(F(E), \pi^*E\big) = \sum_{i=1}^r T\big(F(E), L_i\big),$$

a na mocy [7, Theorem 16.1.2]

$$\chi\big(F(E), \pi^*E\big) = \sum_{i=1}^r \chi\big(F(E), L_i\big).$$

Jeśli zatem wiemy, że twierdzenie Hirzebrucha–Riemanna–Rocha zachodzi dla wiązek liniowych

$$\chi\big(F(E), L_i\big) = T\big(F(E), L_i\big), \quad \text{przy czym } 1 \leqslant i \leqslant r,$$

to $\chi(X,E) = T(X,E)$. Ponadto z [7, Theorem 20.2.2] wynika równość $\chi(X) = \mathrm{td}(X)$. Jest to konsekwencją trzech faktów:

– $\chi(F(E)) = \chi(X)$, zob. [7, Theorem 20.2.1], skąd $\chi(F(TX)) = \chi(X)$,
– $\mathrm{td}(F(E)) = \mathrm{td}(X)$, zob. [7, Theorem 14.3.1], skąd $\mathrm{td}(F(TX)) = \mathrm{td}(X)$,
– $\chi(F(TX)) = \mathrm{td}(F(TX))$, zob. [7, Theorem 20.1.1].

Dla wiązki liniowej L nad X definiujemy

$$\chi(L)_X = \chi(X) - \chi(X, L^*), \quad T(L)_X = \mathrm{td}(X) - T(X, L^*)$$

wirtualną charakterystykę i *wirtualny genus*.

Dowodzi się ([7, Theorem 20.3.1]), że $\chi(L)_X = T(L)_X$. W dowodzie używa się pewnego równania funkcyjnego, które występuje w kilku miejscach, m.in. w [7, Theorems 11.3.1, 12.3.2, 17.3.1, 19.3.1, 19.3.2] (do Twierdzenia 11.3.1 powrócimy jeszcze w identyczności (2)). Zastępując L^* przez L, otrzymujemy $T(X, L) = \chi(X, L)$, co kończy szkic dowodu.

Twierdzenie Hirzebrucha–Riemanna–Rocha było punktem wyjścia dla szeregu dalszych dokonań. Pierwszym z nich było uogólnienie tego twierdzenia przez Grothendiecka dla właściwego morfizmu między rozmaitościami algebraicznymi. To uogólnienie jest wyrażone za pomocą przemienności pewnego diagramu grup homologii i K-grup w geometrii algebraicznej. To z kolei doprowadziło do rozwinięcia topologicznej K-teorii przez Atiyaha i Hirzebrucha, która była ważnym narzędziem w dowodzie twierdzenia o indeksie Atiyaha–Singera dla operatorów eliptycznych.

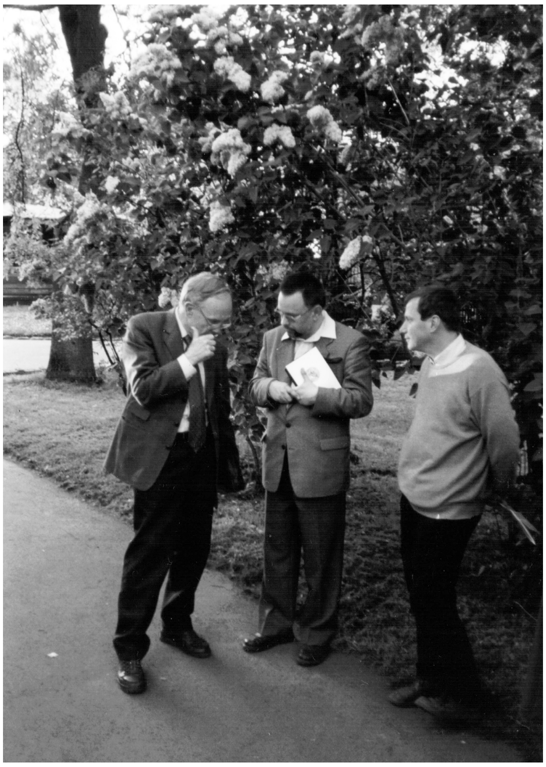
Hirzebruch rozważał uogólnienia $\chi(X, E)$. Wprowadzając zmienną y, zdefiniował on następującą χ_y*-charakterystykę*

$$\chi_y(X, E) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^{p,q}(X, E) y^p,$$

przy czym $h^{p,q}(X, E) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, E \otimes \Lambda^p(TX)^*)$. W podobny sposób uogólnione zostały: genus Todda, wirtualne charakterystyki i inne pojęcia. Lascoux w artykule [11] w tomie *Hirzebruch 70* wykazał, że χ_y-charakterystyka, zastosowana do rozmaitości flag, jest adekwatnym narzędziem do studiowania algebry i kombinatoryki wielomianów Macdonalda.

Twierdzenie Hirzebrucha–Riemanna–Rocha znalazło wiele zastosowań. Gdy pracowaliśmy z Vishwambhar Pati i Vasudevan Srinivasem nad *własnością przekątniową*, która orzeka, że nad $X \times X$ istnieje wiązka rangi $\dim X$ oraz jej przekrój znikający wzdłuż przekątnej, okazało się ono bardzo pomocne w badaniu trójwymiarowej kwadryki $X = Q_3$. Niech $[Q_2]$, $[L]$ i $[P]$ (dwuwymiarowa kwadryka, prosta, punkt) będą generatorami grup Chow $A^1(Q_3)$, $A^2(Q_3)$ i $A^3(Q_3)$. Totalna klasa Cherna wiązki wektorowej E na Q_3 ma postać

$$1 + d_1(E)[Q_2] + d_2(E)[L] + d_3(E)[P],$$



Od lewej: Friedrich Hirzebruch, Piotr Pragacz i Adam Parusiński
w czasie konferencji *Hirzebruch 70*

przy czym $d_i(E) \in Z$. Okazuje się (zob. [17]), że aby wykazać brak własności przekątniowej dla Q_3, wystarczy dowieść, że nie istnieje nad Q_3 taka wiązka E rangi trzy, że $d_3(E) = 1 = d_1(E)$. A to wynika stąd, że gdy do twierdzenia Hirzebrucha–Riemanna–Rocha:

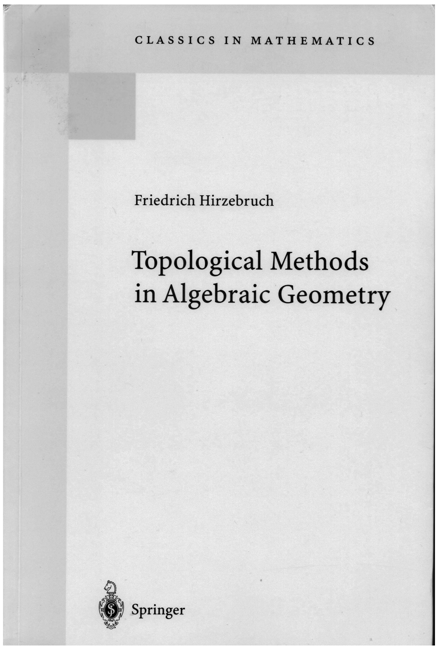
$$\chi(Q_3, E) = \frac{1}{6}(2d_1^3 - 3d_1d_2 + 3d_2) + \frac{3}{2}(d_1^2 - d_2) + \frac{13}{6}d_1 + 3,$$

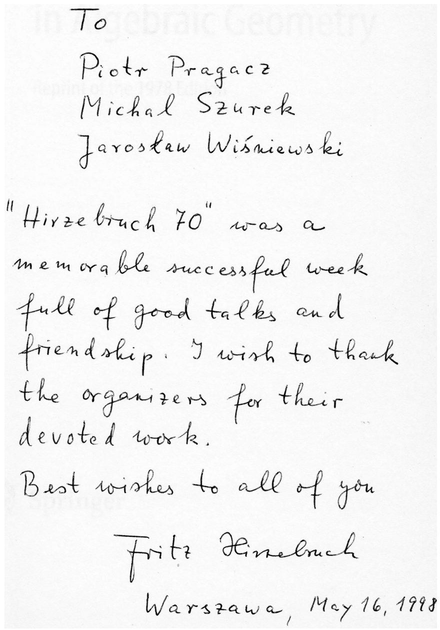
gdzie $d_i = d_i(E)$, podstawimy obecne liczby, to dostaniemy

$$\chi(Q_3, E) = \frac{15}{2} - 2d_2,$$

co stanowi sprzeczność.

Gdy zajmowaliśmy się z Adamem Parusińskim charakterystyką Eulera hiperpowierzchni osobliwych (zob. [12]), pomocna okazała się pewna identyczność z książki Hirzebrucha. Mianowicie udowodniliśmy początkowo wzór na charakterystykę Eulera miejsca zer przekroju liniowej wiązki bardzo szerokiej. Aby uogólnić ten wzór na przypadek dowolnej wiązki liniowej L, rozważyliśmy




To
Piotr Pragacz
Michał Szurek
Jarosław Wiśniewski

"Hirzebruch 70" was a memorable successful week full of good talks and friendship. I wish to thank the organizers for their devoted work.

Best wishes to all of you

Fritz Hirzebruch

Warszawa, May 16, 1998

Książka przekazana przez Friedricha Hirzebrucha organizatorom konferencji *Hirzebruch 70* oraz jego dedykacja

taką wiązkę bardzo szeroką M, że $L \otimes M$ jest też bardzo szeroka. Dla wiązki wektorowej E rangi r nad gładką rozmaitością zespoloną X definiujemy

$$\chi(X|E) = \int_X c(E)^{-1} c_r(E) c(X).$$

Wiadomo, że to wyrażenie daje (topologiczną) charakterystykę Eulera miejsca zer przekroju wiązki E, który jest transwersalny do przekroju zerowego E. Dowiedliśmy nasz wzór dzięki tożsamości

$$2\chi(X|L \oplus M) + \chi(X|L \otimes M) = \chi(X|L) + \chi(X|M) + \chi(X|L \oplus M \oplus L \otimes M), \quad (2)$$

którą znaleźliśmy w [7, Theorem 11.3.1].

Pisząc o twierdzeniu Hirzebrucha–Riemanna–Rocha, korzystam z egzemplarza książki *Topological Methods in Algebraic Geometry* podarowanego przez Profesora mnie oraz współorganizatorom, Michałowi Szurkowi i Jarosławowi Wiśniewskiemu w podziękowaniu za organizację konferencji *Hirzebruch 70*, która odbyła się w Warszawie w 1998 roku.

Miejscem konferencji był pałacyk Centrum Banacha na Mokotowskiej. Na konferencję przyjechało wiele znakomitości geometrii algebraicznej.

Zdjęcie uczestników konferencji *Hirzebruch 70*. Wprawdzie Michael Atiyah nie widnieje na tym zdjęciu, ale uczestniczył on w konferencji i wygłosił wykład o związkach fizyki i geometrii w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych, a także o roli profesora Hirzebrucha i jego *Arbeitstagung* w rozwijaniu tych związków.

Materiały z konferencji ukazały się w tomiku *Contemporary Mathematics*, wydanym przez *American Mathematical Society*.

Od 2000 roku prowadzę w Instytucie Matematycznym PAN seminarium Impanga z geometrii algebraicznej (zob. [15]). Pierwszym zagranicznym wykładowcą na tym seminarium był Hirzebruch. Wygłosił on 7 maja 2001 roku wykład *Old and new applications of characteristic classes*. Wykład ten odbył się w jego ulubionym pałacyku Centrum Banacha na Mokotowskiej. Profesor otrzymał w podzięce kubek Impangi. Powiesiliśmy w instytucie sporo ogłoszeń, jedno z nich w windzie. Gdy wieczorem byłem z Profesorem i jego żoną Inge w Teatrze Wielkim, i znaleźliśmy się tam w windzie, Profesor z uśmiechem stwierdził, że „w co drugiej windzie w Warszawie jest ogłoszenie o moim wykładzie."

Gdy w 2010 roku organizowałem z koleżankami i kolegami konferencję-szkołę Impanga 10, Hirzebruch zgodził się być honorowym przewodniczącym Komitetu Naukowego. Niestety, ze względu na stan zdrowia nie mógł przybyć osobiście do Będlewa na tę konferencję, ale aktywnie współuczestniczył w wyborze wykładowców. Jego wsparcie było bardzo ważne dla młodego środowiska Impangi. Masza Vlasenko, która wygłosiła odczyt na tej konferencji, zawiozła

Profesorowi w podzięce kubek konferencyjny i w ten sposób w jego gabinecie były teraz dwa kubki związane z Impangą.

Wcześniej – w 2002 roku – Impanga aktywnie włączyła się w konferencję *Manifolds in mathematics and in other fields*, zorganizowaną przez Hirzebrucha i Stanisława Janeczkę. Spora grupa polskich geometrów algebraicznych skorzystała z gościny Hirzebrucha w Instytucie Maxa Plancka w Bonn: Banaszak, Dąbrowski, Gajda, Krasoń, Langer, Parusiński, Szemberg, Wiśniewski, Włodarczyk i autor. Kilka lat spędzonych w MPIM było najbardziej płodnym matematycznie okresem mojego życia. Wspaniała atmosfera w instytucie kierowanym przez Profesora rzutowała pozytywnie na postępy w pracy. Po roku mojego pobytu w MPIM, Profesor Hirzebruch wręczył mi, ze stosowną dedykacją, swoje *Dzieła zebrane*. Dodał przy tym żartobliwie: „ale proszę, oprócz lektury, cytować moje *Dzieła Zebrane* – wtedy więcej matematyków się nimi zainteresuje i będą się lepiej sprzedawać". Bibliografia w pracy [16] pokazuje, że wziąłem sobie tę radę do serca.

Jednym z tematów, nad którym pracowałem w Bonn z moim doktorantem Janem Ratajskim były lagranżowskie, symplektyczne i ortogonalne miejsca degeneracji. Jest to piękny rozdział rachunku Schuberta, gdzie geometria przeplata się z algebrą. Uzyskaliśmy pewną intrygującą identyczność na funkcje Schura s_λ od zmiennych x_i oraz ich kwadratów:

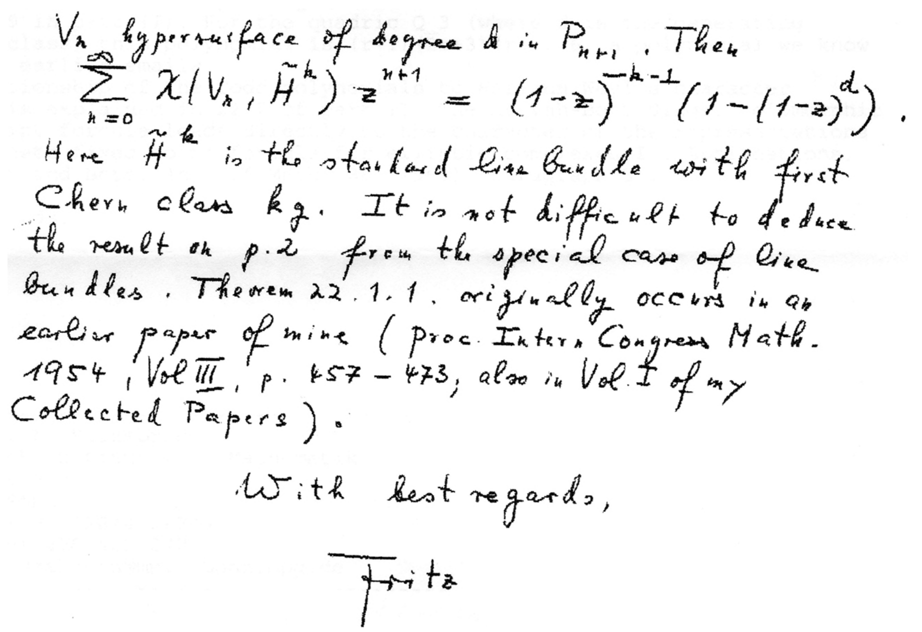
$$s_\lambda(x_1^2,\dots,x_n^2)s_\rho(x_1,\dots,x_n) = s_{\rho+2\lambda}(x_1,\dots,x_n), \tag{3}$$

gdzie $\rho = (n, n-1, \dots, 1)$ oraz $(\rho + 2\lambda)_i = \rho_i + 2\lambda_i$.

Ten wzór pozwolił nam dowieść nowy wzór Gysina w lagranżowskiej wiązce Grassmanna, ale czuliśmy, że nie rozumiemy go dostatecznie głęboko. Zwierzyłem się z tego Profesorowi, a on zasugerował nam, by przyjrzeć się formule (3) z punktu widzenia rozmaitości kwaternionowych, wskazując na kilka swoich prac i pewien artykuł Slodowego. I rzeczywiście, przy użyciu kwaternionowych rozmaitości flag, tożsamość ta staje się naturalna (zob. [16, (10.7)]).

Jak już napisałem, twierdzenie Hirzebrucha–Riemanna–Rocha było bardzo pomocne w ustaleniu, że trójwymiarowa kwadryka nie ma własności przekątniowej. Zapytany, Profesor udzielił nam kilku rad, jak efektywnie liczyć prawą stronę wzoru Hirzebrucha–Riemanna–Rocha dla przecięć zupełnych. Na kolejnej stronie znajduje się fragment jego listu w tej sprawie.

Profesor bardzo dbał, by goszczący w Instytucie Maxa Plancka matematycy czuli się dobrze. Byli oni zapraszani przez niego na obiad. Gdy instytut mieścił się w Beul, Profesor zapraszał do włoskiej restauracji *Tivoli*. Gdy instytut przeniósł się do centrum Bonn, Profesor zapraszał do restauracyjki



V_n hypersurface of degree d in P_{n+1}. Then

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi(V_n, \tilde{H}^k)\, z^{n+1} = (1-z)^{-k-1}\left(1-(1-z)^d\right).$$

Here $\tilde{H}^k$ is the standard line bundle with first Chern class kg. It is not difficult to deduce the result on p. 2 from the special case of line bundles. Theorem 22.1.1. originally occurs in an earlier paper of mine (Proc. Intern. Congress Math. 1954, Vol III, p. 457 – 473, also in Vol. I of my Collected Papers).

With best regards,

Fritz

Fragment listu Friedrich Hirzebrucha do autora artykułu

na piętrze nad cukiernią *Fassbender*, która znajdowała się blisko nowej siedziby instytutu. „Tłusty czwartek" jest kulminacją karnawału w MPIM. Ta tradycja jest przeniesiona z poprzedniej siedziby, bowiem w Beul właśnie wtedy odbywa się korowód karnawału. Ku swemu zdumieniu, gdy byłem w okresie karnawału w 2001 roku w MPIM, w środę przed „tłustym czwartkiem" znalazłem w swojej skrytce pocztowej krawat. Wytłumaczono mi, że jest zwyczaj, że w czasie czwartkowej zabawy, ucina się krawaty. A potem dowiedziałem się, że to Profesor włożył mi ten krawat do skrytki. Następnego dnia, krawat został ucięty – ale to nie był *ten* krawat! Krawat od Profesora stanowi dla mnie drogocenną pamiątkę i służy mi do dziś.

Matematyczne Bonn było bardzo atrakcyjnym ośrodkiem. Uczęszczałem na uniwersytecie na wykłady profesora Brieskorna. Były to piękne wykłady (po niemiecku) pokazujące związki osobliwości ze sztuką. W 2006 roku miałem możliwość wygłoszenia dwóch wykładów na seminarium Brieskorna. Zacząłem od podziękowania, że mogę wygłosić wykład na tutejszym seminarium z teorii osobliwości. Brieskorn odparł – „proszę pana, nie ma teorii osobliwości, są tylko osobliwości." Komentarze Brieskorna dały mi bardzo wiele. Co piątek o godzinie 17:15, na uniwersytecie odbywało się kolokwium z bardzo ciekawymi wykładami. Brieskorn opowiedział mi, że dla zachęcenia do udziału w kolokwium (w jego początkowej fazie) Hirzebruch mawiał, że „tak jak katolicy uczestniczą co tydzień we mszy, matematycy powinni uczestniczyć co tydzień w kolokwium."

Opowiadając o swoim ojcu, Hirzebruch wspomniał, że cieszył się on dużym autorytetem wśród uczniów. Wystarczyło, że po wejściu do klasy powiedział *„Jungen!"* („Chłopcy!"), i w klasie robiło się zupełnie cicho.

Profesor miał też dar do pracy z ludźmi. Gdy powstawał jakiś problem, umiał załagodzić wszelkie konflikty. Gdy o czymś mówił, to koncentrował się na pozytywach (mimo, że wiedzieliśmy, że są też negatywy). Miał wspaniałe poczucie humoru. W instytucie dała się zauważyć następująca prawidłowość. Tylko jeden z pracowników przychodził do instytutu w garniturze i krawacie, wszyscy inni bardziej na luzie. Gdy ktoś raz zapytał tego pracownika w garniturze i krawacie – a był nim sam Hirzebruch – dlaczego tak się katuje, tenże odparł – „jeśli ktoś z zewnątrz odwiedza nasz instytut, to nie pytając nikogo zaraz zauważy, kto jest jego dyrektorem!"

W MPIM czuliśmy się bezpiecznie pod skrzydłami Profesora. Znaleźliśmy ogromne wsparcie pod względem intelektualnym, duchowym, a także materialnym. Profesor doradzał, podtrzymywał na duchu, pomagał.

Hirzebruch był fantastycznym matematykiem. Znalazł rozwiązanie problemu Riemanna–Rocha we wszystkich wymiarach. Był też wspaniałym organizatorem. Uczynił Bonn niezwykle atrakcyjnym centrum matematyki. Korzysta z niego wielu polskich matematyków, w tym sporo uczestników Impangi. Był otwarty na ludzi, którym pomagał tak, jak potrafił.

W jednym z tekstów Dona Zagiera o Friedrichu Hirzebruchu, znalazłem te słowa, którymi chciałbym zakończyć mój artykuł.

> Przy pomocy wielu prawie niewidzialnych działań, spowodował, że ludzie wokół niego stali się trochę lepsi, a świat wokół niego stał się trochę lepszym światem.

Podziękowania. Dziękuję Andrei Kohlhuber i Renacie Podgórskiej za pomoc w przygotowaniu tego artykułu. Dziękuję także Grzegorzowi Banaszakowi i Maszy Vlasenko za lekturę wstępnej wersji tekstu i szereg uwag, które przyczyniły się do jego ulepszenia.

Bibliografia

[1] M. Atiyah, *Friedrich Hirzebruch – an appreciation*, Israel Mathematical Conference Proceedings 9 (1996), 1–5.

[2] M. Atiyah, *Friedrich Ernst Peter Hirzebruch, 17 October 1927 – 27 May 2012*, Biogr. Mem. Fellows R. Soc. 60 (2014), 229–247.

[3] M. Atiyah, D. Zagier (red.), *Friedrich Hirzebruch (1927–2012)*, Notices Amer. Math. Soc. 61 (2014), 2–23.
[4] J-P. Bourguignon, *Questions au Professeur Hirzebruch*, Gazette des Mathématiciens 53 (Juin 1992), 11–19.
[5] E. Brieskorn, *Singularities in the work of Friedrich Hirzebruch*, Surv. Differ. Geom. 7 (2007), 17–60.
[6] M. Atiyah, C. Bär, J.-P. Bourguignon, G.-M. Greuel, Y. I. Manin, *Friedrich Hirzebruch Memorial Session at the 6th European Congress of Mathematics*, (Kraków, July 5th, 2012), Eur. Math. Soc. News. 85 (September 2012), 12–20.
[7] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, 3rd ed., Springer 1966.
[8] F. Hirzebruch, *Prospects in Mathematics. The signature theorem: reminiscences and recreation*, Ann. Math. Stud. 70 (1971), 3–31.
[9] F. Hirzebruch, *Why do I like Chern, and why do I like Chern classes?*, Notices Amer. Math. Soc. 58 (2011), 1231–1234.
[10] M. Kreck, *Video interview with Friedrich Hirzebruch*, Simons Foundation (2011), dostępne pod adresem https://www.simonsfoundation.org/science_lives_video/friedrich-hirzebruch/ (dostęp: 15.06.2016).
[11] A. Lascoux, *About the "y" in the χ_y-characteristic of Hirzebruch*, Algebraic geometry: Hirzebruch 70 (Warsaw, 1998), Contemp. Math., t. 241, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 285–296.
[12] A. Parusiński, P. Pragacz, *A formula for the Euler characteristic of singular hypersurfaces*, Journal of Algebraic Geometry 4 (1995), 337–351.
[13] P. Pragacz, *Życie i dzieło Alexandra Grothendiecka*, Wiad. Mat. 40 (2004), 107–127.
[14] P. Pragacz, *Życie i dzieło Józefa Marii Hoene-Wrońskiego*, Wiad. Mat. 43 (2007), 67–86.
[15] P. Pragacz, *Dziesięć lat Impangi*, Wiad. Mat. 47 (2011), nr 1, 45–54.
[16] P. Pragacz, J. Ratajski, *Formulas for Lagrangian and orthogonal degeneracy loci; $\widetilde{Q}$-polynomial approach*, Compositio Math. 107 (1997), 11–87.
[17] P. Pragacz, V. Srinivas, V. Pati, *Diagonal subschemes and vector bundles*. 1/2, Pure and Applied Mathematics Quaterly, Special Issue in honor of Jean-Pierre Serre 4 (2008), nr 4, 1233–1278.
[18] D. Zagier, *Life and work of Friedrich Hirzebruch*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 117 (2015), 93–132.

Piotr Pragacz
Instytut Matematyczny PAN
P.Pragacz@impan.pl