Piotr Achinger (pta@students.mimuw.edu.pl) 14 II - 16 III 2007

FUNKCJA ζ RIEMANNA. PRACA RIEMANNA Z 1859 ROKU

1 Wstęp

Chcemy badać funkcję $\pi(x)$, czyli *liczbę liczb pierwszych mniejszych niż zadana wielkość* (*die Anzahl der Primzahlen* ...) x. Przyjmując konwencję $\sum_p f(p) = f(2) + f(3) + f(5) + f(7) + \dots$ oraz definicję

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < \alpha \\ 1/2 & \text{dla } x = \alpha \\ 1 & \text{dla } x > \alpha \end{cases},$$

możemy napisać $\pi(x) = \sum_p h_p(x)$ [1]. Związek funkcji π z funkcją ζ Riemanna, określoną jako szereg Dirichleta

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \tag{\textbf{Z}}$$

jest następujący: jeśli w wyrażeniu

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_{p,\,n} \frac{1}{n} p^{-sn}$$

zastąpimy p^{-sn} przez $s\int_{p^n}^\infty x^{-s-1}dx$, otrzymamy

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = \sum_{p,\,n} \frac{1}{n}\int_{p^n}^\infty x^{-s-1}dx = \sum_{p,\,n}\frac{1}{n}\int_0^\infty h_{p^n}(x)x^{-s-1}dx =$$

$$= \int_0^\infty \left(\sum_{p,\,n}\frac{1}{n}h_p(x^{1/n})\right)x^{-s-1}dx = \int_0^\infty\left(\sum_n \frac{1}{n}\pi(x^{1/n})\right)x^{-s-1}dx \tag{\textbf{1}}$$

(skorzystaliśmy tu z tożsamości $h_{p^n}(x) = h_p(x^{1/n})$). Jeśli teraz oznaczymy przez $\mathcal{S}$ transformację

$$(\mathcal{S}f)(x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}f(x^{1/n}),$$

przez $\mathcal{M}$ zaś transformację

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx$$

(zwaną *transformacją Mellina*), wówczas związek (1) możemy przepisać w postaci

$$\frac{\log\zeta(s)}{s} = (\mathcal{M}\mathcal{S}\pi)(-s). \tag{\textbf{T}}$$

Aby dowiedzieć się czegoś o funkcji $\pi(x)$,

(1) zbadamy własności funkcji ζ, przedłużając ją na $\mathbb{C} - \{1\}$,
(2) znajdziemy transformację odwrotną do $\mathcal{S}$,
(3) znajdziemy transformację odwrotną do $\mathcal{M}$,
(4) wyciągniemy odpowiednie wnioski dotyczące tempa wzrostu $\pi(x)$.

[1] $h_\alpha(\alpha)$ zostało określone w ten sposób, żeby otrzymana funkcja spełniała warunek $2f(x) = f(x+0) + f(x-0)$.

2 Funkcja ζ Riemanna

DYGRESJA O FUNKCJI Γ. Zanim przejdę do badania funkcji $\zeta(s)$, przypomnę czytelnikowi funkcję $\Gamma(z)$. Dla $x > 0$ określamy ją wzorem

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Spełnia ona równanie (dowód przez zcałkowanie przez części)

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$$

dzięki któremu jest „uogólnieniem" silni ($\Gamma(n+1) = n!$). Funkcja przedłuża się na $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \ldots\}$ i ma w usuniętych punktach bieguny jednokrotne. Spełnia też, potrzebne dalej, zależności:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad (\Gamma_1)$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \qquad (\Gamma_2)$$

Dowód tych zależności (zwanych, odpowiednio, *wzorem na dopełnienie* i *wzorem Legendre'a*) znajduje się na końcu.

Funkcja ζ została wcześniej określona wzorem (Z), mającym sens dla $\Re s > 1$. Przedłużymy ją teraz na $\mathbb{C} - \{1\}$ i rozłożymy na nieskończony iloczyn po jej pierwiastkach.

(1) Zauważmy, że $\Gamma(s)n^{-s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx$, zatem

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1} \qquad (\mathbf{2}).$$

(2) Niech γ będzie konturem jak na rysunku [*od* $+\infty$ *do* 0 *nad półprostą* $\mathbb{R}^+$*, dookoła zera przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, nie obiegając żadnego innego punktu* $2n\pi i$ *i od* 0 *do* $+\infty$ *pod półprostą* $\mathbb{R}^+$]. Określmy gałąź argumentu (i logarytmu) z „rozcięciem" na $(-\infty, 0)$, tj. $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$. Niech

$$I(s) = \int_\gamma \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx,$$

gdzie $(-x)^{s-1} := \exp(s-1)(\log x) = \exp(s-1)(\log|x| + i \cdot \operatorname{Arg} x)$. Całka ta określa funkcję holomorficzną na $\mathbb{C}$, gdyż funkcja podcałkowa dąży szybciej niż wielomianowo do 0 w $+\infty$, co gwarantuje zbieżność całki; zbieżność ta jest niemal jednostajna, co wobec analityczności funkcji podcałkowej daje analityczność $I(s)$. Dla $\Re s > 1$ mamy

$$I(s) \;=\; (e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \;=\; -2i \cdot \sin \pi s \cdot \Gamma(s) \cdot \zeta(s),$$

co otrzymujemy degenerując homotopijnie krzywą γ do półprostej $\mathbb{R}^+$ przebieganej wpierw od nieskończoności do zera po „górnej" stronie ($\operatorname{Arg}(-z) = -\pi$), a potem spowrotem po stronie „dolnej" ($\operatorname{Arg}(-z) = \pi$).

(3) Dla $\Re s < 0$, całkę I możemy rozumieć jako całkę po brzegu tej części rozdzielonej płaszczyzny, która zawiera nieskończenie wiele biegunów funkcji podcałkowej ($2n\pi i$, $n \neq 0$): niech Γ_n będzie dodatnio zorientowanym brzegiem obszaru powstałego przez przecięcie tego obszaru o brzegu γ, który nie zawiera 0 z kołem $K(0, (2n+1)\pi)$. Γ_n składa się z kawałka γ i kawałka okręgu. Jednak całka po łuku okręgu dąży do 0, gdyż $a := \limsup_n \inf_{|z|=(2n+1)\pi} |e^z - 1| > 0$, zatem całka szacuje się z góry przez $a \cdot 2(n+1)\pi \cdot ((2n+1)\pi)^{\Re s - 1} \leqslant 2a((2n+1)\pi)^{-1} \to 0$. Z *twierdzenia o residuach* otrzymujemy wówczas

$$I(s) \;=\; -2\pi i \sum_{n \neq 0} \operatorname{Res}_{z=2n\pi i} \left(\frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \right) \;=\; -i(2\pi)^s \sum_{n \geqslant 1} n^{s-1}((-i)^{s-1} + i^{s-1})$$

(gdyż residuum w $2n\pi i$ wynosi $\lim_{z\to 2n\pi i}(z-2n\pi i)(e^z-1)^{-1}(-z)^{s-1} = (-2n\pi i)^{s-1}$), skąd wynika związek pomiędzy $\zeta(s)$ i $\zeta(1-s)$:

$$2\sin\pi s\cdot\Gamma(s)\cdot\zeta(s) \;=\; (2\pi)^s\cdot 2\cos\frac{(s-1)\pi}{2}\cdot\zeta(1-s). \qquad (\mathbf{S})$$

Korzystając ze wzorów (Γ_1) i (Γ_2) oraz trywialnej trygonometrii, przekształcamy powyższą równość

$$\sin\pi s\cdot\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\cdot\Gamma(\frac{s+1}{2})\cdot 2^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\cdot\zeta(s) = 2^s\cdot\pi^s\cdot\cos\frac{(s-1)\pi}{2}\cdot\zeta(1-s),$$

$$\left(2\sin\frac{\pi s}{2}\cos\frac{\pi s}{2}\right)\left(\Gamma(\frac{s}{2})\cdot\frac{\pi}{\Gamma(\frac{1-s}{2})\cdot\sin(\frac{s+1}{2}\pi)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)\cdot\zeta(s) \;=\; \pi^s\cdot\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\zeta(1-s),$$

$$\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) \;=\; \Gamma(\frac{1-s}{2})\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s) \qquad (\mathbf{S}'),$$

czyli lewa strona (S') (oznaczmy ją przez $L(s)$) spełnia $L(s) = L(1-s)$.

(4) Zastosujemy teraz wzór (S') do „ulepszenia" wzoru (2). Skoro

$$\int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}dx = \Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}n^{-s},$$

to

$$L(s) = L(1-s) = \int_0^\infty\left(\sum_{n\geqslant 1} e^{-n^2\pi x}\right)x^{\frac{s}{2}-1}dx.$$

Oznaczmy $\Psi(x) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-n^2\pi x}$. Riemann skorzystał ze wzoru odkrytego przez Jacobiego,

$$2\Psi(x)+1 = \left(2\Psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)x^{-\frac{1}{2}} \qquad (\mathbf{J}),$$

(dowód (J) znajduje się na końcu), aby otrzymać

$$L(s) = \left(\int_0^1+\int_1^\infty\right)\Psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx = \int_0^1\left[\frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}-1)+\Psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{1}{2}}\right]x^{\frac{s}{2}-1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1(x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}-x^{\frac{s}{2}-1})dx+\int_1^\infty\Psi(x)\left[x^{\frac{s}{2}-1}+x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right]dx = -\frac{1}{s(1-s)}+\int_1^\infty\Psi(x)\left[x^{\frac{s}{2}-1}+x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right]dx.$$

Jeśli teraz przyjmiemy $s = \frac{1}{2}+ti$ oraz

$$\xi(s) = -\frac{1}{2}s(1-s)L(s) = (s-1)\Gamma(\frac{s}{2}+1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s), \qquad (\mathbf{X})$$

$$\Xi(t) = \xi(s) = \xi(it+1/2),$$

to otrzymamy

$$\Xi(t) = \frac{1}{2}-(t^2+\frac{1}{4})\int_1^\infty\Psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos(\frac{t}{2}\log x)dx = 4\int_1^\infty(x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x))'x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{t}{2}\log x)dx. \qquad (\mathbf{X}')$$

Ostatnia równość wymaga żmudnych i trudnych szacowań oraz jeszcze raz skorzystania ze wzoru (J). Zauważmy teraz, że $\xi(s)$ jest funkcją całkowitą a jej zera odpowiadają zerom $\zeta(s)$ leżącym w pasie $0\leqslant\Re s\leqslant 1$ (zwanym „nietrywialnymi"), z tą jednak przewagą, że $\Xi(t) = \xi(it+1/2)$ jest parzyste oraz rzeczywiste dla rzeczywistych wartości t.

(5) Z (X) wynika, że Ξ ma zera tylko w pasie $-\frac{1}{2}\leqslant\Im s\leqslant\frac{1}{2}$. Całka z $\frac{\Xi'}{\Xi}$ dookoła prostokąta $-\frac{1}{2}<\Im t<\frac{1}{2}$,

$0 < \Re t < T$ (równa, na podstawie *zasady argumentu*, liczbie zer Ξ wewnątrz tego prostokąta pomnożonej przez $2\pi i$) wynosi asymptotycznie

$$i\left(T\log\frac{T}{2\pi} - T\right), \tag{??}$$

stąd liczba zer Ξ w tym prostokącie to w przybliżeniu

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} + \frac{T}{2\pi}.$$

Autor nie podaje niestety, jaką metodą wyszacował wspomnianą całkę z $\frac{\Xi'}{\Xi}$. My możemy wyznaczyć oszacowanie górne, korzystając ze *wzoru Jensena*:

Dygresja o wzorze Jensena. Jeśli F jest funkcją holomorficzną i nieznikającą w kole $K(0,R)$, to $\Re\log F(z) = \log|F(z)|$ jest funkcją harmoniczną w tym kole, wobec czego na mocy własności wartości średniej, dla dowolnego $0 < r < R$ mamy

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{it})|dt.$$

Jeśli teraz założymy, że F może znikać, ale nie znika w zerze ani na okręgu $0 < |z| = r < R$, zaś $a_0,\ldots,a_n$ są zerami F w $K(0,r)$ z uwzględnieniem krotności (jest ich skończenie wiele, bo zera F nie mają punktu skupienia w $K(0,R)$), to po zastosowaniu powyższego wzoru do ilorazu F i „iloczynu Blaschkego" odpowiadającego $a_0,\ldots,a_n$, czyli do nieznikającej już funkcji

$$G(z) = F(z)\left(\prod_{j=0}^{n}\frac{r(a_j - z)}{r^2 - \overline{a_j}z}\right)^{-1}$$

otrzymamy

$$\log\left(|F(0)|\prod_{j=0}^{n}\frac{r}{|a_j|}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{it})|\prod_{j=0}^{n}\left|\frac{r^2 - \overline{a_j}re^{it}}{r(a_j - re^{it})}\right|dt$$

ale moduł każdego czynnika w iloczynie wynosi r (ładne zadanie z geometrii!), wobec czego po wyeksponowaniu dostajemy *wzór Jensena*:

$$|F(0)|\prod_{j=0}^{n}\frac{r}{|a_j|} = \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{it})|dt. \tag{\textbf{WJ}}$$

Wzór Jensena można łatwo wykorzystać do badania liczby zer funkcji całkowitych. Niech $F \in H(\mathbb{C})$, $F(0) = 1$, $M(r) = \sup_{|z|=r}|F(z)|$ i niech (a_n) będzie ciągiem wszystkich zer F z krotnościami, uporządkowanym niemalejąco względem modułów. Niech $n(r)$ będzie liczbą zer F w $K(0,r)$. Wówczas z (WJ) otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$M(2r) \geqslant \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(2re^{it})|dt = \prod_{j=0}^{n(2r)}\frac{r}{|a_j|} \geqslant \prod_{j=0}^{n(r)}\frac{2r}{|a_j|} \geqslant 2^{n(r)},$$

skąd finalny wniosek, że $\ln M(2r) \geqslant n(r)\ln 2$.

Stosując to do funkcji $\Xi(z)$, o której łatwo-niełatwo udowodnić[2], że $M(r) = O(r\ln r)$, otrzymujemy

$$n(r) = O(M(2r)) = O(r\log r). \tag{\textbf{A}}$$

Dalej Riemann stwierdza, iż *bardzo prawdopodobne jest, że wszystkie wspomniane pierwiastki są rzeczywiste, nie udało mu się jednak tego dowieść*. Wspomniane zdanie zwane jest dzisiaj *hipotezą Riemanna* i formułuje się je zazwyczaj następująco

[2]korzystając z (X'), rozwijamy $\Xi(-iz)$ w szereg potęgowy o środku w zerze. Jego współczynniki są rzeczywiste dodatnie, zatem $M(r) = |\Xi(ir)|$. Dalej korzystamy ze wzoru (X), z tego, że $\zeta(x) \to 1$ oraz oszacowania modułu Γ ze wzoru Stirlinga.

Hipoteza Riemanna. *Jeśli* $\zeta(s) = 0$, $0 \leqslant \Re s \leqslant 1$, *to* $\Re s = \frac{1}{2}$.

(6) Z asymptotyki (A) wynika, że szereg

$$S(t) = \log \Xi(0) + \sum_{\Xi(\alpha)=0;\ \Re\alpha>0} \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right)$$

jest zbieżny. Mamy też oszacowanie $|S(t)| = O(|t| \log |t|)$, które łatwo wynika z dowodu zbieżności. Riemann zauważył, że funkcja $(S(t) - \log \Xi(t))/t^2$

(1) jest całkowita,

(2) jest parzysta, zatem jej szereg Taylora ma tylko parzyste wyrazy,

(3) dąży do 0 w nieskończoności,

wobec czego musi być stała, ale $S(0) = \Xi(0)$, stąd $S(t) = \Xi(t)$. Punkt (3) wynika stąd, że każda funkcja parzysta spełniająca $M(r) = O(r \ln r)$ jest stała, gdyż w ogólności każda funkcja spełniająca $M(r) = O(r^k)$ jest wielomianem stopnia $\leqslant k$; jest to oczywisty wniosek z nierówności Cauchy'ego:

$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R)} \frac{f(z)dz}{z^{k+1}}\right| \leqslant \frac{2\pi R}{2\pi}\frac{M(R)}{R^{k+1}} = \frac{M(R)}{R^k}$$

przy $R \to \infty$, tak samo jak tw. Liouville'a. Mamy więc żądane przedstawienie ζ w postaci iloczynu:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{-\frac{s}{2}}\Xi(0)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)(s-1)} \prod_{\Xi(\alpha)=0;\ \Re\alpha>0} \left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha^2}\right),$$

co po łatwych przekształceniach można napisać w postaci

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{-\frac{s}{2}}\xi(0)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)(s-1)} \prod_{\alpha-\text{nietryw.}} \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right), \qquad (\mathbf{P})$$

gdzie iloczyn bierzemy po wszystkich nietrywialnych zerach funkcji ζ, parując ze sobą pierwiastki sumujące się do 1 (inaczej nie będzie zbieżny). Pierwsze w pełni ścisłe wyprowadzenie tego wzoru podał J. Hadamard, korzystając z twierdzenia Weierstrassa o przedstawianiu funkcji całkowitych w postaci iloczynu. Hadamard, uwzględniwszy że $\xi(0) = 1/2$ otrzymał ten wzór także w postaci

$$\zeta(s) = \frac{e^{As}}{2\Gamma(\frac{s}{2}+1)(s-1)} \prod_{\alpha-\text{nietryw.}} \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right) e^{s/\alpha}, \qquad (\mathbf{HP})$$

gdzie $A = \log(2\pi) - 1 - \gamma/2$.

3 Funkcja μ Mobiusa

Funkcję $\mu(n)$ dla $n \geqslant 1$ definiujemy rekurencyjnie tak, aby spełniała równanie

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq 1 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \end{cases}.$$

Posiada ona własności:

(1) $\mu(n) \in \{0, 1, -1\}$,

(2) jest multiplikatywna, tj. $(m, n) = 1 \Rightarrow \mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$,

(3) widać też, że

$$\mu(p^k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0, \\ -1 & \text{dla } k = 1, \\ 0 & \text{dla } k > 1, \end{cases}$$

skąd mamy wzór

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ podzielnych przez pewien kwadrat,} \\ 1 & \text{dla } n \text{ będących iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych,} \\ -1 & \text{dla } n \text{ będących iloczynem nieparzystej liczby liczb pierwszych,} \end{cases}$$

(4) Wynika stąd, że $\zeta^*(s) := \sum_n \mu(n)n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s}) = \zeta(s)^{-1}$, prawdziwy jest też ogólniejszy wzór na odwracanie szeregów Dirichleta:

$$\left(\sum_n \frac{a_n}{n^s}\right)^{-1} = \sum \frac{\mu(n)a_n}{n^s}.$$

Powróćmy do naszego celu odwrócenia transformacji

$$(\mathcal{S}f)(x) = \sum_n \frac{1}{n} f(x^{1/n}).$$

Mamy

$$\sum_k \frac{\mu(k)}{k}(\mathcal{S}f)(x^{1/k}) = \sum_{k,n} \frac{\mu(k)}{kn} f(x^{1/kn}) = \sum_m \left(\sum_{kn=m} \mu(k)\right) f(x^{1/m}) = \sum_m \left(\sum_{d|m} \mu(d)\right) f(x^{1/m}) = f(x),$$

zatem transformacją odwrotną do $\mathcal{S}$ jest

$$(\mathcal{S}^{-1}f)(x) = \sum_n \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n}).$$

4 Transformacja Mellina

Określiliśmy transformację Mellina $\mathcal{M}$ jako

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx.$$

Ma ona zwykle sens dla s leżących w pewnym pasie $a < \Im s < b$. Zajmiemy się teraz jej odwracaniem. Ustalmy $a < \beta < b$ i niech $g(s) = (\mathcal{M}f)(s)$. Mamy

$$g(\beta + ix) = \int_0^\infty f(t)t^{\beta+ix-1}dt$$

co po podstawieniu $x = e^u$ daje

$$g(\beta + ix) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^u)e^{u(\beta+ix)}du = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(e^u)u^\beta\right] e^{ixu}du = \sqrt{2\pi}\left(\mathcal{F}(f(e^u)u^\beta)\right)(x),$$

gdzie $\mathcal{F}$ to *transformacja Fouriera*. Korzystając z tego, że $(\mathcal{F}\mathcal{F}\phi)(-x) = \phi(x)$, po zastosowaniu $(\mathcal{F}\square)(-t)$ do obu stron otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(\beta + ix)e^{-ixt}dx = f(e^t)e^{\beta t},$$

co po podstawieniu $y = e^t$ i podzieleniu obu stron przez y^β daje

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta + ix)y^{-\beta-ix}i dx = f(y).$$

Zamieniając teraz całkę po $\mathbb{R}$ na całkę po pionowej prostej $(\beta - \infty i, \beta + \infty i)$ otrzymamy

$$f(x) = (\mathcal{M}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-\infty i}^{\beta+\infty i} g(z)x^{-z}dz.$$

5 Rozmieszczenie liczb pierwszych

Odwrócimy teraz wzór (T) i podstawimy (P):

$$f(x) := \sum_n \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log\zeta(s)}{s} x^s ds = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left[\frac{\frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) - \log\Gamma(\frac{s}{2}+1) + \sum_{\alpha-\text{nietryw.}} \log\left(1-\frac{s}{\alpha}\right) + \log\xi(0)}{s}\right] x^s ds.$$

Niestety całki pojedyńczych składników w powyższym wzorze nie są zbieżne, zatem przekształcamy całkę po prawej stronie (3), całkując przez części:

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left(\frac{\log\zeta(s)}{s}\right)' x^s ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \Big\{ \left(\frac{1}{s}\frac{s}{2}\log\pi\right)'_{1.} - \left(\frac{1}{s}\log(s-1)\right)'_{2.} - \left(\frac{1}{s}\log\Gamma(\frac{s}{2}+1)\right)'_{3.} +$$

$$+ \sum_{\alpha-\text{nietryw.}} \left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\alpha}\right)\right)'_{4.} + \left(\frac{1}{s}\log\xi(0)\right)'_{5.} \Big\} x^s ds.$$

Zajmiemy się teraz przekształcaniem kolejnych składników[3]. Zauważmy wpierw, że większość składników (oprócz 1., który jest równy 0, oraz 5.) przyjmuje postać

$$\Phi(\beta, x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left(\frac{\log(\frac{s}{\beta}-1)}{s}\right)' x^s ds$$

lub podobną (z $1-\frac{s}{b}$ zamiast $\frac{s}{b}-1$, co zmienia wartość o stałą). Składnik 3. sprowadzamy do tej postaci dzięki tożsamości

$$\Gamma(z) = \prod_{n\geqslant 1} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}},$$

dowiedzionej w dodatku, z której otrzymujemy:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \prod_{n\geqslant 1} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s/2}}{1+\frac{s}{2n+2}}.$$

W wyrażeniu $(\frac{\log\Gamma(\frac{s}{2}+1)}{s})'$ „liczniki” w powyższym iloczynie (tworzące iloczyn rozbieżny) kasują się przy zróżniczkowaniu i otrzymujemy sumę $\sum_{n\geqslant 1}\Phi(2n, x)$.
Policzymy teraz całkę $\Phi(\beta, x)$. Ustalmy $x > 1$. Mamy

$$\frac{d\Phi(\beta,x)}{d\beta} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left(\frac{d}{d\beta}\frac{\log(\frac{s}{\beta}-1)}{s}\right)' x^s ds = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \left(\frac{1}{\beta(s-\beta)}\right)' x^s ds.$$

Po scałkowaniu przez częsci dostajemy

$$\frac{d\Phi(\beta,x)}{d\beta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s}{\beta(s-\beta)} ds = (\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}(\beta^{-1}x^\beta h_1(x)))(\beta) = \frac{x^\beta}{\beta},$$

skąd

$$\Phi(\beta, x) = \int^\beta \frac{x^b}{b} db = \int_{x^\beta} \frac{dc}{\log c} = \mathrm{Li}(x^\beta).$$

[3] w tej części rachunki stają się naprawdę zawiłe, dlatego sporą ich część pomijam; zainteresowanych odsyłam do książki Edwardsa wymienionej na końcu

Składnik 5. sprowadzamy przez scałkowanie przez części do policzenia całki $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s}{s} ds$, jednakże już policzyliśmy ją kilka linijek wyżej (z mianownikiem $s-\beta$); po podstawieniu $\beta = 0$ otrzymujemy $\mathrm{Li}(x^0) = 1$. Podsumowując,

$$\text{Skł 1.} = \quad 0 \tag{1}$$
$$\text{Skł 2.} = \quad \mathrm{Li}(x) \tag{2}$$
$$\text{Skł 3.} = \quad -\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{Li}(x^{-2n}) \tag{3}$$
$$\text{Skł 4.} = \quad \sum_{\alpha} \mathrm{Li}(x^{\alpha}) \tag{4}$$
$$\text{Skł 5.} = \quad \log \xi(0) \tag{5}$$

Możemy jeszcze uprościć składnik 3. Jest on równy sumie całek

$$-\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{Li}(x^{2n}) = \sum_{n\geqslant 1} \int_x^{\infty} \frac{x^{-2n-1}}{\log x} dx = \int_x^{\infty} (\sum_{n\geqslant 1} x^{-2n-1}) \frac{dx}{\log x} =$$
$$= \int_x^{\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)\log x}.$$

Finalnie po podstawieniu otrzymujemy główny wynik pracy Riemanna:

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) + \sum_{\Xi(\alpha)=0;\, \Re\alpha>0} (\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}+i\alpha}) + \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}-i\alpha})) + \int_x^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)x\log x} + \log \xi(0),$$

stąd „płynie" wniosek, że powinno być prawdziwe oszacowanie

$$\pi(x) = \sum_n \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n}) \approx \sum_n \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{1/n}).$$

Riemann nie podał ścisłego dowodu; napisał jedynie, że dla niewielkich x powyższe oszacowanie jest dużo lepsze niż oszacowanie Gaussa $\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x)$.

6 Dodatek

Na koniec przedstawię dowody wzorów (Γ_1), (Γ_2), oraz (J).

(1) Skoro $\log(t^{x-1}e^{-t})$ jest funkcją wypukłą oraz jeśli $\log f$ i $\log g$ są wypukłe, to $\log(f+g)$ jest wypukła, to $g(x) := \log \Gamma(x)$ jest funkcją wypukłą. Otrzymujemy stąd

$$\frac{g(n-1)-g(n)}{n-1-n} \leqslant \frac{g(n+x)-g(n)}{n+x-n} \leqslant \frac{g(n+1)-g(n)}{n+1-n},$$

lecz skoro $g(x) = \log(x-1) + g(x-1)$,

$$\log(n-1) \leqslant \frac{g(n+x)-g(n)}{x} \leqslant \log n,$$

$$x\log(n-1) \leqslant g(n+x)-g(n) \leqslant x\log n,$$

ale $g(n+x) = g(x) + (\log x + \log(x+1) + \ldots + \log(x+n-1))$ oraz $\log n = \log(1+\frac{1}{1}) + \ldots + \log(1+\frac{1}{n-1})$, zatem

$$x\sum_{j=2}^{n-1} \log\frac{j}{j-1} \leqslant g(x) + \log x + \sum_{j=2}^{n-1}(\log(x+j-1) - \log(j-1)) \leqslant x\sum_{j=2}^{n} \log\frac{j}{j-1},$$

$$-\ln x + \sum_{j=2}^{n-1}\left(x\log(1+\frac{1}{j-1}) - \log(1+\frac{x}{j-1})\right) \leqslant g(x) \leqslant \sum_{j=2}^{n}\left(x\log(1+\frac{1}{j-1}) - \log(1+\frac{x}{j-1})\right) - \log(1+\frac{x}{n}).$$

Szereg $\sum_{j\geqslant 1}(x\log(1+\frac{1}{j})-\log(1+\frac{x}{j}))$, którego sumy częsciowe występują powyżej po obu stronach, jest zbieżny. Zatem po przejściu z n do ∞ otrzymujemy

$$g(x) = -\log x + \sum_{j\geqslant 1}\left(x\log(1+\frac{1}{j}) - \log(1+\frac{x}{j})\right).$$

Wynika stąd wzór

$$\Gamma(x) = \exp g(x) = \frac{1}{x}\prod_{j\geqslant 1}\frac{(1+\frac{1}{j})^x}{(1+\frac{x}{j})}. \tag{$\mathbf{G}$}$$

Funkcję *beta* dwóch zmiennych definiujemy jako

$$B(a,\, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

Własności:

(1) podstawiając $u = x^2$ widzimy, że

$$B(a,b) = 2\int_0 1^1 u^{2a-1}(1-u^2)^{b-1}du.$$

(2) podstawiając $z = x/(1+x)$ otrzymujemy

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt.$$

(3) Stosując działanie $\int_0^\infty \Box t^{a-1}dt$ do obu stron równości

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy$$

otrzymujemy dzięki własności (2)

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^\infty t^{a-1}\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dydt =$$

$$= \int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\left(\int_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt\right)dy = \int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy = \Gamma(a)\Gamma(b).$$

Otrzymaliśmy w ten sposób

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Wzór na dopełnienie. Jesteśmy już gotowi do udowodnienia wzoru

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{Γ_1}$$

Skorzystamy ze znanego przedstawienia funkcji $\sin\pi z$:

$$\sin\pi z = \pi z\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{s}$$

Dzieląc lewą stronę (Γ_1) przez prawą otrzymujemy na mocy (s) oraz (G)

$$\frac{1}{\pi}\sin\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(1-z) \;=\; \left(z\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\right)\left(\frac{1}{z}\prod_{n\geqslant 1}\frac{(1+\frac{1}{n})^z}{(1+\frac{z}{n})}\right)\left(\frac{1}{1-z}\prod_{n\geqslant 1}\frac{(1+\frac{1}{n})^{1-z}}{(1+\frac{1-z}{n})}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-z}\prod_{n\geqslant 1}\frac{\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{1-z}{n}\right)} = \frac{1}{1-z}\prod_{n\geqslant 1}\frac{n+1}{n}\frac{n-z}{n+1-z} = \frac{1}{1-z}(1-z) = 1.$$

Wzór na podwojenie. Udowodnimy teraz

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}. \qquad (\Gamma_2)$$

Wyprowadzenie jest dość żmudne. Mamy

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = B(z,z) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{z-1}dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+u}{2}\right)^{z-1}\left(\frac{1-u}{2}\right)^{z-1}\frac{du}{2} =$$

$$= 2^{1-2z}\int_{-1}^1 (1-u^2)^{z-1}du = 2^{1-2z}\cdot 2\int_0^1 u^{2\cdot\frac{1}{2}-1}(1-u^2)^{z-1}du = 2^{1-2z}B(1/2,z) =$$

$$= 2^{1-2z}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)},$$

Po wyznaczeniu $\Gamma(2z)$ wychodzi wzór (Γ_2).

(2) Wzór Jacobiego. Udowodnimy teraz następującą tożsamość dla funkcji $\Psi(x) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-n^2\pi x}$:

$$2\Psi(x) + 1 = \left(2\Psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right)x^{-\frac{1}{2}}. \qquad (\mathbf{J})$$

Jeśli przyjmiemy $\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x} = 2\Psi(x) + 1$, możemy ją przepisać w postaci

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{1}{2}}.$$

Aby ją udowodnić, wychodzimy od tożsamości znanej z teorii szeregów Fouriera

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2\pi i n t}dt,$$

biorąc $f_x(t) = e^{-t^2\pi x}$:

$$\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_x(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2\pi x + 2\pi i n t}dt =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{x}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi x u^2}du = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} = \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{1}{2}}.$$

7 Bibliografia

W przygotowaniu tej pracy korzystałem przede wszystkim z angielskiego tłumaczenia oryginalnej pracy Riemanna *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse*, które można znaleźć pod adresem HTTP://WWW.MATHS.TCD.IE/PUB/HISTMATH/PEOPLE/RIEMANN/ZETA/. Bardzo pomocna była też książka H. M. Edwardsa *Riemann's Zeta Function*.