O dodatniości wielomianów Thoma

Seminarium G-K-W

Piotr Pragacz

pragacz@impan.pl

IM PAN Warszawa

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Ustalmy $n, e \in \mathbf{N}$. Niech $P(c_1, \ldots, c_e)$ będzie wielomianem stopnia n.

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Ustalmy $n, e \in \mathbf{N}$. Niech $P(c_1, \ldots, c_e)$ będzie wielomianem stopnia n.

Mówimy że P jest dodatni dla wiązek szerokich, gdy dla każdej n-wymiarowej rozmaitości rzutowej X

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Ustalmy $n, e \in \mathbf{N}$. Niech $P(c_1, \ldots, c_e)$ będzie wielomianem stopnia n.

Mówimy że P jest dodatni dla wiązek szerokich, gdy dla każdej n-wymiarowej rozmaitości rzutowej X
i każdej szerokiej wiązki of rangi e na X,
$\deg(P(c_1(E), \ldots, c_e(E)) > 0$.

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Ustalmy $n, e \in \mathbf{N}$. Niech $P(c_1, \ldots, c_e)$ będzie wielomianem stopnia n.

Mówimy że P jest dodatni dla wiązek szerokich, gdy dla każdej n-wymiarowej rozmaitości rzutowej X
i każdej szerokiej wiązki of rangi e na X,
$\deg(P(c_1(E), \ldots, c_e(E)) > 0$.

Rachunki Griffithsa: c_1, c_2, $c_1^2 - c_2$.

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Ustalmy $n, e \in \mathbf{N}$. Niech $P(c_1, \ldots, c_e)$ będzie wielomianem stopnia n.

Mówimy że P jest dodatni dla wiązek szerokich, gdy dla każdej n-wymiarowej rozmaitości rzutowej X
i każdej szerokiej wiązki of rangi e na X,
$\deg(P(c_1(E), \ldots, c_e(E))) > 0$.

Rachunki Griffithsa: c_1, c_2, $c_1^2 - c_2$.

Pomyłka: sądzono, że $c_1^2 - 2c_2$ jest dodatni, ale nie jest.

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z "Hard Lefschetz Theorem".

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z “Hard Lefschetz Theorem”.

Fulton-Lazarsfeld pokazali, że wielomian jest dodatni

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z “Hard Lefschetz Theorem”.

Fulton-Lazarsfeld pokazali, że wielomian jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy jego rozwinięcie w bazie funkcji Schura jest dodatnie.

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z “Hard Lefschetz Theorem”.

Fulton-Lazarsfeld pokazali, że wielomian jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy jego rozwinięcie w bazie funkcji Schura jest dodatnie.

$n = 3 \quad c_3, \quad c_2c_1 - c_3, \quad c_1^3 - 2c_2c_1 + c_3.$

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z “Hard Lefschetz Theorem”.

Fulton-Lazarsfeld pokazali, że wielomian jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy jego rozwinięcie w bazie funkcji Schura jest dodatnie.

$n = 3 \quad c_3, \quad c_2c_1 - c_3, \quad c_1^3 - 2c_2c_1 + c_3.$

Dla wiązek globalnie generowanych, bliski rezultat był uzyskany przez Usui-Tango.

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z "Hard Lefschetz Theorem".

Fulton-Lazarsfeld pokazali, że wielomian jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy jego rozwinięcie w bazie funkcji Schura jest dodatnie.

$n = 3 \quad c_3, \quad c_2c_1 - c_3, \quad c_1^3 - 2c_2c_1 + c_3.$

Dla wiązek globalnie generowanych, bliski rezultat był uzyskany przez Usui-Tango.

Przez klasy cykli algebraicznych, będziemy rozumieli ich Poincaré dualne klasy w kohomologiach.

Osobliwości odwzorowań

Pkt x_0 jest *punktem krytycznym (osobliwym)* funkcji $f(x)$ jeżeli $f'(x_0) = 0$.

Osobliwości odwzorowań

Pkt x_0 jest *punktem krytycznym (osobliwym)* funkcji $f(x)$ jeżeli $f'(x_0) = 0$.

Pkt $x \in M$ jest *punktem krytycznym (osobliwym)* odwzorowania rozmaitości $f : M \to N$ jeżeli ranga $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ nie jest maksymalna.

Osobliwości odwzorowań

Pkt x_0 jest *punktem krytycznym (osobliwym)* funkcji $f(x)$ jeżeli $f'(x_0) = 0$.

Pkt $x \in M$ jest *punktem krytycznym (osobliwym)* odwzorowania rozmaitości $f : M \to N$ jeżeli ranga $df_x : T_x M \to T_{f(x)} N$ nie jest maksymalna.

Osobliwość odwzorowania: klasa równoważności kiełków $\eta : (\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ ze względu na analityczne reparametryzacje dziedziny i przeciwdziedziny.

Osobliwości odwzorowań

Pkt x_0 jest *punktem krytycznym (osobliwym)* funkcji $f(x)$ jeżeli $f'(x_0) = 0$.

Pkt $x \in M$ jest *punktem krytycznym (osobliwym)* odwzorowania rozmaitości $f : M \to N$ jeżeli ranga $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ nie jest maksymalna.

Osobliwość odwzorowania: klasa równoważności kiełków $\eta : (\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ ze względu na analityczne reparametryzacje dziedziny i przeciwdziedziny.

Najprostsza osobliwość: $A_1 : z \mapsto z^2$.

Osobliwości odwzorowań

Pkt x_0 jest *punktem krytycznym (osobliwym)* funkcji $f(x)$ jeżeli $f'(x_0) = 0$.

Pkt $x \in M$ jest *punktem krytycznym (osobliwym)* odwzorowania rozmaitości $f : M \to N$ jeżeli ranga $df_x : T_x M \to T_{f(x)} N$ nie jest maksymalna.

Osobliwość odwzorowania: klasa równoważności kiełków $\eta : (\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ ze względu na analityczne reparametryzacje dziedziny i przeciwdziedziny.

Najprostsza osobliwość: $A_1 : z \mapsto z^2$.

$A_i : z \mapsto z^{i+1}$ - osobliwości Morina.

Osobliwości odwzorowań

Pkt x_0 jest *punktem krytycznym (osobliwym)* funkcji $f(x)$ jeżeli $f'(x_0) = 0$.

Pkt $x \in M$ jest *punktem krytycznym (osobliwym)* odwzorowania rozmaitości $f : M \to N$ jeżeli ranga $df_x : T_x M \to T_{f(x)} N$ nie jest maksymalna.

Osobliwość odwzorowania: klasa równoważności kiełków $\eta : (\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ ze względu na analityczne reparametryzacje dziedziny i przeciwdziedziny.

Najprostsza osobliwość: $A_1 : z \mapsto z^2$.

$A_i : z \mapsto z^{i+1}$ - osobliwości Morina.

Interesuje nas geometria zbioru: $\overline{\{x \in M : f \text{ ma w } x \text{ osobliwość } \eta\}}$.

– dla ogólnego f.

Klasa osobliwości

„Prawo-lewe działanie": Niech $k >> 0$, Aut_n = grupa k-dżetów automorfizmów $(\mathbf{C}^n, 0)$. Grupa $\mathrm{Aut}_m \times \mathrm{Aut}_n$ działa na $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}^m_0, \mathbf{C}^n_0)$.

Klasa osobliwości

„Prawo-lewe działanie”: Niech $k >> 0$, Aut_n = grupa k-dżetów automorfizmów $(\mathbf{C}^n, 0)$. Grupa $\mathrm{Aut}_m \times \mathrm{Aut}_n$ działa na $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}^m_0, \mathbf{C}^n_0)$.

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}^m_0, \mathbf{C}^n_0)$ - “klasa osobliwości”.

Klasa osobliwości

„Prawo-lewe działanie”: Niech $k >> 0$, $\mathrm{Aut}_n =$ grupa k-dżetów automorfizmów $(\mathbf{C}^n, 0)$. Grupa $\mathrm{Aut}_m \times \mathrm{Aut}_n$ działa na $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}^m_0, \mathbf{C}^n_0)$.

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}^m_0, \mathbf{C}^n_0)$ - “klasa osobliwości”.

Prawo-lewa orbita, suma takich orbit, rodzina takich orbit: DOMKNIĘCIA takich zbiorów.

Klasa osobliwości

„Prawo-lewe działanie”: Niech $k >> 0$, $\mathrm{Aut}_n =$ grupa k-dżetów automorfizmów $(\mathbf{C}^n, 0)$. Grupa $\mathrm{Aut}_m \times \mathrm{Aut}_n$ działa na $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}^m_0, \mathbf{C}^n_0)$.

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}^m_0, \mathbf{C}^n_0)$ - “klasa osobliwości”.

Prawo-lewa orbita, suma takich orbit, rodzina takich orbit: DOMKNIĘCIA takich zbiorów.

M^m, N^n - rozmaitości, $\mathcal{J}^k(M, N)$ - przestrzeń k-dżetów odwzorowań z M do N, $j^k f : M \to \mathcal{J}^k(M, N)$ - k-dżetowe rozszerzenie.

Klasa osobliwości

„Prawo-lewe działanie”: Niech $k >> 0$, $\mathrm{Aut}_n =$ grupa k-dżetów automorfizmów $(\mathbf{C}^n, 0)$. Grupa $\mathrm{Aut}_m \times \mathrm{Aut}_n$ działa na $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}_0^m, \mathbf{C}_0^n)$.

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}_0^m, \mathbf{C}_0^n)$ - “klasa osobliwości”.

Prawo-lewa orbita, suma takich orbit, rodzina takich orbit: DOMKNIĘCIA takich zbiorów.

M^m, N^n - rozmaitości, $\mathcal{J}^k(M, N)$ - przestrzeń k-dżetów odwzorowań z M do N, $j^k f : M \to \mathcal{J}^k(M, N)$ - k-dżetowe rozszerzenie.

Σ definiuje $\Sigma(M, N) \subset \mathcal{J}^k(M, N)$: w mapach $M \simeq \mathbf{C}^m$ i $N \simeq \mathbf{C}^n$, punkt należy do $\Sigma(M, N)$ w.i.t.w gdy należy do Σ. Gdy zmienimy mapy, to definiowany zbiór się nie zmieni, dzięki prawo-lewej niezmienniczości Σ.

Wielomian Thoma

Wówczas istnieje uniwersalny wielomian $\mathcal{T}^{\Sigma}$ nad $\mathbf{Z}$

Wielomian Thoma

Wówczas istnieje uniwersalny wielomian $\mathcal{T}^{\Sigma}$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n,

Wielomian Thoma

Wówczas istnieje uniwersalny wielomian $\mathcal{T}^{\Sigma}$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n,

taki że dla każdej pary rozmaitości M^m, N^n i ogólnego odwzorowania $f : M \to N$,

Wielomian Thoma

Wówczas istnieje uniwersalny wielomian $\mathcal{T}^{\Sigma}$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n,

taki że dla każdej pary rozmaitości M^m, N^n i ogólnego odwzorowania $f : M \to N$,

$$\text{klasa } \; \Sigma(f) = (j^k f)^{-1}(\Sigma(M,N))$$

Wielomian Thoma

Wówczas istnieje uniwersalny wielomian $\mathcal{T}^{\Sigma}$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n,

taki że dla każdej pary rozmaitości M^m, N^n i ogólnego odwzorowania $f: M \to N$,

$$\text{klasa } \Sigma(f) = (j^k f)^{-1}(\Sigma(M,N))$$

$$\text{jest równa } \mathcal{T}^{\Sigma}(c_1(M), \ldots, c_m(M), f^*c_1(N), \ldots, f^*c_n(N)).$$

Wielomian Thoma

Wówczas istnieje uniwersalny wielomian $\mathcal{T}^\Sigma$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n,

taki że dla każdej pary rozmaitości M^m, N^n i ogólnego odwzorowania $f : M \to N$,

$$\text{klasa } \ \Sigma(f) = (j^k f)^{-1}(\Sigma(M,N))$$

$$\text{jest równa } \ \mathcal{T}^\Sigma(c_1(M), \ldots, c_m(M), f^* c_1(N), \ldots, f^* c_n(N)).$$

Jeżeli klasa osobliwości Σ jest „stabilna" (np. domknięta ze względu na równoważność kontaktową), to $\mathcal{T}^\Sigma$ zależy od $c_i(TM - f^*TN)$.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia
Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia
Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna.
Dla $x \in M$, niech $e_x =$: liczba gałęzi f w x.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^* c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia
Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna.
Dla $x \in M$, niech $e_x =:$ liczba gałęzi f w x.
Wtedy dywizor rozgałęzienia f jest równy $\sum (e_x - 1)x$.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia
Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna.
Dla $x \in M$, niech $e_x =:$ liczba gałęzi f w x.
Wtedy dywizor rozgałęzienia f jest równy $\sum(e_x - 1)x$.
Twierdzenie Riemanna-Hurwitza orzeka:

$$\sum_{x \in M}(e_x - 1) = 2g(M) - 2 - \deg(f)\big(2g(N) - 2\big) = f^*c_1(N) - c_1(M).$$

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia
Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna.
Dla $x \in M$, niech $e_x =:$ liczba gałęzi f w x.
Wtedy dywizor rozgałęzienia f jest równy $\sum(e_x - 1)x$.
Twierdzenie Riemanna-Hurwitza orzeka:

$$\sum_{x \in M}(e_x - 1) = 2g(M) - 2 - \deg(f)\big(2g(N) - 2\big) = f^*c_1(N) - c_1(M).$$

Zatem: $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N)) = f^*c_1(N) - c_1(M)$.

Funkcje Schura

Alfabet $\mathbb{A}$: skończony zbiór zmiennych.

Funkcje Schura

Alfabet $\mathbb{A}$: skończony zbiór zmiennych.

Identyfikujemy alfabet $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ z sumą $a_1 + \cdots + a_m$.

Funkcje Schura

Alfabet $\mathbb{A}$: skończony zbiór zmiennych.

Identyfikujemy alfabet $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ z sumą $a_1 + \cdots + a_m$.

Weźmy inny alfabet $\mathbb{B}$.

$$\sum S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B}) z^i = \prod_{b \in \mathbb{B}} (1-bz) / \prod_{a \in \mathbb{A}} (1-az) \,.$$

Funkcje Schura

Alfabet $\mathbb{A}$: skończony zbiór zmiennych.

Identyfikujemy alfabet $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ z sumą $a_1 + \cdots + a_m$.

Weźmy inny alfabet $\mathbb{B}$.

$$\sum S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})z^i = \prod_{b\in\mathbb{B}}(1-bz) / \prod_{a\in\mathbb{A}}(1-az)\,.$$

Dla podziału $I = (0 \geq i_1 \geq \cdots \geq i_h \geq 0)$, definiujemy *funkcję Schura* $S_I(\mathbb{A}-\mathbb{B})$ jako

Funkcje Schura

Alfabet $\mathbb{A}$: skończony zbiór zmiennych.

Identyfikujemy alfabet $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ z sumą $a_1 + \cdots + a_m$.

Weźmy inny alfabet $\mathbb{B}$.

$$\sum S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B}) z^i = \prod_{b \in \mathbb{B}} (1-bz) / \prod_{a \in \mathbb{A}} (1-az)\,.$$

Dla podziału $I = (0 \geq i_1 \geq \cdots \geq i_h \geq 0)$, definiujemy *funkcję Schura* $S_I(\mathbb{A}-\mathbb{B})$ jako

$$S_I(\mathbb{A}-\mathbb{B}) := \Big| S_{i_p - p + q}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) \Big|_{1 \leq p, q \leq h}\,.$$

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A} - \mathbb{B})$,

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Wzór faktoryzacyjny!

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Wzór faktoryzacyjny!

Dla wiązek wektorowych E, F, $S_I(E-F) := S_I(\mathbb{A} - \mathbb{B})$,

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Wzór faktoryzacyjny!

Dla wiązek wektorowych E, F, $S_I(E-F) := S_I(\mathbb{A} - \mathbb{B})$, dla $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ równych alfabetom pierwiastków Cherna E i F.

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} .$$

Wzór faktoryzacyjny!

Dla wiązek wektorowych E, F, $S_I(E-F) := S_I(\mathbb{A} - \mathbb{B})$, dla $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ równych alfabetom pierwiastków Cherna E i F.

Giambelli: Klasa *rozmaitości Schuberta* w Grassmannianie

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}{-}\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}{-}\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Wzór faktoryzacyjny!

Dla wiązek wektorowych E, F, $S_I(E{-}F) := S_I(\mathbb{A} - \mathbb{B})$, dla $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ równych alfabetom pierwiastków Cherna E i F.

Giambelli: Klasa *rozmaitości Schuberta* w Grassmannianie jest dana przez wielomian Schura od wiązki tautologicznej nad nim.

Now, $f : M \to N$, $r := \dim(N) - \dim(M) + 1 \geq 1$.

Now, $f : M \to N$, $r := \dim(N) - \dim(M) + 1 \geq 1$.
Osobliwości Morina $A_i(r)$. Definiujemy $F_r^{(1)}(-) = S_r(-)$ oraz dla $i \geq 2$,

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + \boxed{i}) S_{r+|J|, r-j_{i-1}, \ldots, r-j_1}(-)\,,$$

Now, $f : M \to N$, $r := \dim(N) - \dim(M) + 1 \geq 1$.

Osobliwości Morina $A_i(r)$. Definiujemy $F_r^{(1)}(-) = S_r(-)$ oraz dla $i \geq 2$,

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + \boxed{i}) S_{r+|J|, r-j_{i-1}, \ldots, r-j_1}(-)\,,$$

gdzie suma jest po podziałach $J \subset (r^{i-1})$.

Now, $f : M \to N$, $r := \dim(N) - \dim(M) + 1 \geq 1$.

Osobliwości Morina $A_i(r)$. Definiujemy $F_r^{(1)}(-) = S_r(-)$ oraz dla $i \geq 2$,

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + \boxed{i})S_{r+|J|, r-j_{i-1}, \ldots, r-j_1}(-)\,,$$

gdzie suma jest po podziałach $J \subset (r^{i-1})$.

Twierdzenie. *$F_r^{(1)} = S_r$ and $F_r^{(2)} = \sum_{j \leq r} 2^j S_{r+j, r-j}$ są wielomianami Thoma osobliwości $A_1(r)$ oraz $A_2(r)$.*

Now, $f : M \to N$, $r := \dim(N) - \dim(M) + 1 \geq 1$.

Osobliwości Morina $A_i(r)$. Definiujemy $F_r^{(1)}(-) = S_r(-)$ oraz dla $i \geq 2$,

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + \boxed{i}) S_{r+|J|, r-j_{i-1}, \ldots, r-j_1}(-)\,,$$

gdzie suma jest po podziałach $J \subset (r^{i-1})$.

Twierdzenie. $F_r^{(1)} = S_r$ *and* $F_r^{(2)} = \sum_{j \leq r} 2^j S_{r+j, r-j}$ *są wielomianami Thoma osobliwości* $A_1(r)$ *oraz* $A_2(r)$.

– przeformuowane klasyczne wyniki Thoma oraz Rongi.

Now, $f : M \to N$, $r := \dim(N) - \dim(M) + 1 \geq 1$.

Osobliwości Morina $A_i(r)$. Definiujemy $F_r^{(1)}(-) = S_r(-)$ oraz dla $i \geq 2$,

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + \boxed{i}) S_{r+|J|, r-j_{i-1}, \ldots, r-j_1}(-)\,,$$

gdzie suma jest po podziałach $J \subset (r^{i-1})$.

Twierdzenie. *$F_r^{(1)} = S_r$ and $F_r^{(2)} = \sum_{j \leq r} 2^j S_{r+j, r-j}$ są wielomianami Thoma osobliwości $A_1(r)$ oraz $A_2(r)$.*

– przeformuowane klasyczne wyniki Thoma oraz Rongi.

Twierdzenie. *(PP) Przypuśćmy, że $\Sigma^j(f) = \emptyset$ dla $j \geq 2$. (To mówi, że nad $\Sigma^1(f)$, jądro $df : TM \to f^*TN$ jest wiązką liniową.) Wówczas dla każdego $r \geq 1$, $\mathcal{T}_r^{A_i} = F_r^{(i)}$.*

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3})S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$H_3 = 5S_{441} + 24S_{54}$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1, j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$H_3 = 5S_{441} + 24S_{54}$

...

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$H_3 = 5S_{441} + 24S_{54}$

...

$H_7 = 5S_{885} + 24S_{984} + 24S_{993} + 89S_{10,8,3} + 113S_{10,9,3} + 300S_{11,8,2} + 113S_{10,10,1} + 413S_{11,9,1} + 965S_{12,8,1} + 526S_{11,10} + 1378S_{12,9} + 3024S_{13,8}$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3})S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$H_3 = 5S_{441} + 24S_{54}$

...

$H_7 = 5S_{885} + 24S_{984} + 24S_{993} + 89S_{10,8,3} + 113S_{10,9,3} + 300S_{11,8,2} + 113S_{10,10,1} + 413S_{11,9,1} + 965S_{12,8,1} + 526S_{11,10} + 1378S_{12,9} + 3024S_{13,8}$

...

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$H_3 = 5S_{441} + 24S_{54}$

...

$H_7 = 5S_{885} + 24S_{984} + 24S_{993} + 89S_{10,8,3} + 113S_{10,9,3} + 300S_{11,8,2} + 113S_{10,10,1} + 413S_{11,9,1} + 965S_{12,8,1} + 526S_{11,10} + 1378S_{12,9} + 3024S_{13,8}$

...

Rozwinięcia w bazie funkcji Schura $\mathcal{T}_r^{A_4}$ nie są znane (za wyjątkiem $r = 1, 2, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ – Özer Öztürk).

$I_{2,2}$: $c_2^2 - c_1c_3$

$I_{2,3}$: $2c_1c_2^2 - c_1^2c_3 + 2c_2c_3 - 2c_1c_4$

$I_{2,4}$: $2c_1^2c_2^2 + c_2^3 - 2c_1^3c_3 + 2c_1c_2c_3 - 3c_3^3 - 5c_1^2c_4 + 9c_2c_4 - 6c_1c_5$

$I_{3,3}$: $c_1^2c_2^2 - c_2^3 - c_1^3c_3 + 3c_1c_2c_3 + 3c_3^2 - 2c_1^2c_4 - 3c_2c_4$

$I_{2,2}$: $c_2^2 - c_1c_3$
$I_{2,3}$: $2c_1c_2^2 - c_1^2c_3 + 2c_2c_3 - 2c_1c_4$
$I_{2,4}$: $2c_1^2c_2^2 + c_2^3 - 2c_1^3c_3 + 2c_1c_2c_3 - 3c_3^3 - 5c_1^2c_4 + 9c_2c_4 - 6c_1c_5$
$I_{3,3}$: $c_1^2c_2^2 - c_2^3 - c_1^3c_3 + 3c_1c_2c_3 + 3c_3^2 - 2c_1^2c_4 - 3c_2c_4$

$I_{2,2}$: S_{22}
$I_{2,3}$: $4S_{32} + 2S_{221}$
$I_{2,4}$: $16S_{42} + 4S_{33} + 12S_{321} + 5S_{222} + 2S_{2211}$
$I_{3,3}$: $2S_{42} + 6S_{33} + 3S_{321} + S_{2211}$

Twierdzenie. *(PP+A.Weber, 2006) Niech* Σ *będzie nietrywialną, stabilną klasą osobliwości. Wtedy dla dowolnego podziału* I*, współczynnik* α_I *w*

$$\mathcal{T}^{\Sigma} = \sum \alpha_I S_I(T^*M - f^*T^*N)\,,$$

jest nieujemny i $\sum \alpha_I > 0$.

Twierdzenie. *(PP+A.Weber, 2006) Niech Σ będzie nietrywialną, stabilną klasą osobliwości. Wtedy dla dowolnego podziału I, współczynnik α_I w*

$$\mathcal{T}^{\Sigma} = \sum \alpha_I S_I(T^*M - f^*T^*N)\,,$$

jest nieujemny i $\sum \alpha_I > 0$.

– dla osobliwości Thom-Boardman była to hipoteza Fehera i Komuvesa (2004), którzy wyliczyli Schurowskie rozwinięcie wielomianu Thoma dla $\Sigma^{i,j} : M^m \to N^{m-i+1}$.

Twierdzenie. *(PP+A.Weber, 2006) Niech* Σ *będzie nietrywialną, stabilną klasą osobliwości. Wtedy dla dowolnego podziału* I*, współczynnik* α_I *w*

$$\mathcal{T}^{\Sigma} = \sum \alpha_I S_I(T^*M - f^*T^*N)\,,$$

jest nieujemny i $\sum \alpha_I > 0$.

– dla osobliwości Thom-Boardman była to hipoteza Fehera i Komuvesa (2004), którzy wyliczyli Schurowskie rozwinięcie wielomianu Thoma dla $\Sigma^{i,j} : M^m \to N^{m-i+1}$.

Dla dowolnej klasy osobliwości Σ, współczynniki w

$$\mathcal{T}^{\Sigma} = \sum \alpha_{I,J} S_I(T^*M) S_J(f^*TN)$$

są nieujemne.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w wiązce tautologicznej Q, nie tracimy żadnego składnika Schura.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w wiązce tautologicznej Q, nie tracimy żadnego składnika Schura.
Identyfikujmy – za pośrednictwem wzoru Giambelli'ego – wielomian Schura od Q z cyklem Schuberta na Grassmannianie.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w wiązce tautologicznej Q, nie tracimy żadnego składnika Schura.
Identyfikujmy – za pośrednictwem wzoru Giambelli'ego – wielomian Schura od Q z cyklem Schuberta na Grassmannianie.
Aby wytestować współczynnik, przetnijmy $[\Sigma]$ z odpowiednim $dualnym$ cyklem Schuberta.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w wiązce tautologicznej Q, nie tracimy żadnego składnika Schura.
Identyfikujmy – za pośrednictwem wzoru Giambelli'ego – wielomian Schura od Q z cyklem Schuberta na Grassmannianie.
Aby wytestować współczynnik, przetnijmy $[\Sigma]$ z odpowiednim $dualnym$ cyklem Schuberta.
Używając twierdzenia Bertini-Kleimana, przesuwamy cykle w położenie ogólne, i sprowadzamy

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w wiązce tautologicznej Q, nie tracimy żadnego składnika Schura.
Identyfikujmy – za pośrednictwem wzoru Giambelli'ego – wielomian Schura od Q z cyklem Schuberta na Grassmannianie.
Aby wytestować współczynnik, przetnijmy $[\Sigma]$ z odpowiednim $dualnym$ cyklem Schuberta.
Używając twierdzenia Bertini-Kleimana, przesuwamy cykle w położenie ogólne, i sprowadzamy problem do przecięcia teorio-mnogościowego, które jest nieujemne.

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, $klasa$ $Masłova$ jest reprezentowana przez cykl

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, *klasa Masłova* jest reprezentowana przez cykl

$$\Sigma = \{x \in L \ : \ \dim(T_x L \cap W^*) > 0\}.$$

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, $klasa$ $Masłova$ jest reprezentowana przez cykl

$$\Sigma = \{x \in L \ : \ \dim(T_x L \cap W^*) > 0\}.$$

Jest to zbiór osoblwości rzutowania $L \to W$. Jego klasa kohomologii jest całkowita, i mod 2 jest równa $w_1(T^*L)$.

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, *klasa Masłova* jest reprezentowana przez cykl

$$\Sigma = \{x \in L \ : \ \dim(T_x L \cap W^*) > 0\}.$$

Jest to zbiór osoblwości rzutowania $L \to W$. Jego klasa kohomologii jest całkowita, i mod 2 jest równa $w_1(T^*L)$.

Ustalmy liczbę całkowitą $k >> 0$ i identifikujmy dwa kiełki Lagranżowskich podrozmaitości jeśli stopień ich styczności w 0 jest większy niz k.

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, $klasa$ $Masłova$ jest reprezentowana przez cykl

$$\Sigma = \{x \in L \ : \ \dim(T_x L \cap W^*) > 0\}.$$

Jest to zbiór osoblwości rzutowania $L \to W$. Jego klasa kohomologii jest całkowita, i mod 2 jest równa $w_1(T^*L)$.
Ustalmy liczbę całkowitą $k >> 0$ i identifikujmy dwa kiełki Lagranżowskich podrozmaitości jeśli stopień ich styczności w 0 jest większy niz k.
Otrzymujemy przestrzeń k-dżetów podrozmaitości Lagranżowskich $\mathcal{J}^k(V)$.

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, *klasa Masłova* jest reprezentowana przez cykl

$$\Sigma = \{x \in L \ : \ \dim(T_x L \cap W^*) > 0\}.$$

Jest to zbiór osoblwości rzutowania $L \to W$. Jego klasa kohomologii jest całkowita, i mod 2 jest równa $w_1(T^*L)$.

Ustalmy liczbę całkowitą $k >> 0$ i identyfikujmy dwa kiełki Lagranżowskich podrozmaitości jeśli stopień ich styczności w 0 jest większy niz k.
Otrzymujemy przestrzeń k-dżetów podrozmaitości Lagranżowskich $\mathcal{J}^k(V)$.
Każdy kiełek Lagranżowskiej podrozmaitości w V jest obrazem W via pewien kiełek symplektomorfizmu

$$\mathcal{J}^k(V) = \mathrm{Aut}(V)/P\,,$$

gdzie $\mathrm{Aut}(V)$ jest *groupą k-dżetów symplektomorfizmów*, a P jest stabilizatorem W.

$$\mathcal{J}^k(V) = \mathrm{Aut}(V)/P\,,$$

gdzie $\mathrm{Aut}(V)$ jest *groupą k-dżetów symplektomorfizmów*, a P jest stabilizatorem W.
Oczywiście, Grassmannian Lagranżowski $LG(V)$ jest zawarty w $\mathcal{J}^k(V)$.

$$\mathcal{J}^k(V) = \mathrm{Aut}(V)/P\,,$$

gdzie $\mathrm{Aut}(V)$ jest *groupą k-dżetów symplektomorfizmów*, a P jest stabilizatorem W.
Oczywiście, Grassmannian Lagranżowski $LG(V)$ jest zawarty w $\mathcal{J}^k(V)$.

Mamy też rzutowanie $\mathcal{J}^k(V) \to LG(V)$ takie, że $L \mapsto T_0 L$ (ale to nie jest wiązka wektorowa dla $k \geq 3$).

$$\mathcal{J}^k(V) = \mathrm{Aut}(V)/P\,,$$

gdzie $\mathrm{Aut}(V)$ jest *groupą k-dżetów symplektomorfizmów*, a P jest stabilizatorem W.
Oczywiście, Grassmannian Lagranżowski $LG(V)$ jest zawarty w $\mathcal{J}^k(V)$.

Mamy też rzutowanie $\mathcal{J}^k(V) \to LG(V)$ takie, że $L \mapsto T_0L$ (ale to nie jest wiązka wektorowa dla $k \geq 3$).

Niech H będzie podgrupą $\mathrm{Aut}(V)$ skladającą się z holomorficznych symplektomorfizmów zachowujących rzut $V \to W$. Lagranżowskie dżety są Lagranżowsko równoważne gdy należą one do tej samej orbity H.

$$\mathcal{J}^k(V) = \mathrm{Aut}(V)/P\,,$$

gdzie $\mathrm{Aut}(V)$ jest *groupą k-dżetów symplektomorfizmów*, a P jest stabilizatorem W.
Oczywiście, Grassmannian Lagranżowski $LG(V)$ jest zawarty w $\mathcal{J}^k(V)$.

Mamy też rzutowanie $\mathcal{J}^k(V) \to LG(V)$ takie, że $L \mapsto T_0 L$ (ale to nie jest wiązka wektorowa dla $k \geq 3$).

Niech H będzie podgrupą $\mathrm{Aut}(V)$ skladającą się z holomorficznych symplektomorfizmów zachowujących rzut $V \to W$. Lagranżowskie dżety są Lagranżowsko równoważne gdy należą one do tej samej orbity H.

Lagranżowska klasa osobliwości to czystowymiarowy algebraiczny zbiór w $\mathcal{J}^k(V)$ który jest niezmienniczy ze względu na działanie H.

Dla alfabetu $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, definiujemy $\widetilde{Q}_i(\mathbb{X}) = e_i(\mathbb{X})$ - elementarna symetryczna funkcja od $\mathbb{X}$ stopnia i.

Dla alfabetu $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, definiujemy $\widetilde{Q}_i(\mathbb{X}) = e_i(\mathbb{X})$ - elementarna symetryczna funkcja od $\mathbb{X}$ stopnia i.
Dla $i \geq j$, definiujemy

$$\widetilde{Q}_{i,j}(\mathbb{X}) = \widetilde{Q}_i(\mathbb{X})\widetilde{Q}_j(\mathbb{X}) + 2\sum_{p=1}^{j}(-1)^p\widetilde{Q}_{i+p}(\mathbb{X})\widetilde{Q}_{j-p}(\mathbb{X})\,.$$

Dla alfabetu $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, definiujemy $\widetilde{Q}_i(\mathbb{X}) = e_i(\mathbb{X})$ - elementarna symetryczna funkcja od $\mathbb{X}$ stopnia i.
Dla $i \geq j$, definiujemy

$$\widetilde{Q}_{i,j}(\mathbb{X}) = \widetilde{Q}_i(\mathbb{X})\widetilde{Q}_j(\mathbb{X}) + 2\sum_{p=1}^{j}(-1)^p \widetilde{Q}_{i+p}(\mathbb{X})\widetilde{Q}_{j-p}(\mathbb{X})\,.$$

Dla podziału $I = (i_1 \geq \cdots \geq i_h \geq 0)$, gdzie możemy założyć, że h jest parzyste, definiujemy

$$\widetilde{Q}_I(\mathbb{X}) = \mathrm{Pfaffian}(\widetilde{Q}_{i_p,i_q}(\mathbb{X}))\,.$$

Dla alfabetu $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, definiujemy $\widetilde{Q}_i(\mathbb{X}) = e_i(\mathbb{X})$ - elementarna symetryczna funkcja od $\mathbb{X}$ stopnia i.
Dla $i \geq j$, definiujemy

$$\widetilde{Q}_{i,j}(\mathbb{X}) = \widetilde{Q}_i(\mathbb{X})\widetilde{Q}_j(\mathbb{X}) + 2\sum_{p=1}^{j}(-1)^p\widetilde{Q}_{i+p}(\mathbb{X})\widetilde{Q}_{j-p}(\mathbb{X})\,.$$

Dla podziału $I = (i_1 \geq \cdots \geq i_h \geq 0)$, gdzie możemy założyć, że h jest parzyste, definiujemy

$$\widetilde{Q}_I(\mathbb{X}) = \mathsf{Pfaffian}(\widetilde{Q}_{i_p,i_q}(\mathbb{X}))\,.$$

$\rho := (n, n-1, \ldots, 1)$

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.
Identyfikujemy $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ z pierścieniem funkcji symetrycznych od $\mathbb{X}$.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$. Identyfikujemy $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ z pierścieniem funkcji symetrycznych od $\mathbb{X}$.
Dla podziału I, oznaczamy przez $\widetilde{Q}_I \in \mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ wielomian odpowiadający $\widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$. Dla wiązki wektorowej E, kładziemy $\widetilde{Q}_I(E) := \widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$, gdzie $\mathbb{X}$ są pierwiastkami Cherna E.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$. Identyfikujemy $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ z pierścieniem funkcji symetrycznych od $\mathbb{X}$.

Dla podziału I, oznaczamy przez $\widetilde{Q}_I \in \mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ wielomian odpowiadający $\widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$. Dla wiązki wektorowej E, kładziemy $\widetilde{Q}_I(E) := \widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$, gdzie $\mathbb{X}$ są pierwiastkami Cherna E.

Przypuśćmy, że dana jest flaga $V_\bullet :\ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset V$ podprzestrzeni izotropowych, gdzie $\dim\ V_i = i$.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.
Identyfikujemy $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ z pierścieniem funkcji symetrycznych od $\mathbb{X}$.
Dla podziału I, oznaczamy przez $\widetilde{Q}_I \in \mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ wielomian odpowiadający $\widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$. Dla wiązki wektorowej E, kładziemy $\widetilde{Q}_I(E) := \widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$, gdzie $\mathbb{X}$ są pierwiastkami Cherna E.

Przypuśćmy, że dana jest flaga $V_\bullet :\ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset V$ podprzestrzeni izotropowych, gdzie $\dim\ V_i = i$.
Dla ostrego podziału $I \subset \rho$, tzn. $I = (n \geq i_1 > \cdots > i_h > 0)$, definujemy

$$\Omega_I(V_\bullet) = \{L \in LG(V) :\ \dim\big(L \cap V_{n+1-i_p}\big) \geq p,\ p = 1, \ldots, h\}.$$

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.
Identyfikujemy $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ z pierścieniem funkcji symetrycznych od $\mathbb{X}$.
Dla podziału I, oznaczamy przez $\widetilde{Q}_I \in \mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ wielomian odpowiadający $\widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$. Dla wiązki wektorowej E, kładziemy $\widetilde{Q}_I(E) := \widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$, gdzie $\mathbb{X}$ są pierwiastkami Cherna E.

Przypuśćmy, że dana jest flaga $V_\bullet : \; V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset V$ podprzestrzeni izotropowych, gdzie $\dim \; V_i = i$.
Dla ostrego podziału $I \subset \rho$, tzn. $I = (n \geq i_1 > \cdots > i_h > 0)$, definujemy

$$\Omega_I(V_\bullet) = \{L \in LG(V) : \; \dim\big(L \cap V_{n+1-i_p}\big) \geq p, \; p = 1, \ldots, h\}.$$

Twierdzenie. *(PP, 1986)* $\Omega_I = \widetilde{Q}_I(R^*)$, *gdzie* R *jest podwiązką tautologiczną nad* $LG(V)$.

Lagranżowska klasa osobliwości $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(V)$ definiuje klasę kohomologii

$$[\Sigma] \in H^*(\mathcal{J}^k(V), \mathbf{Z}) \cong H^*(LG(V), \mathbf{Z})\,.$$

Lagranżowska klasa osobliwości $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(V)$ definiuje klasę kohomologii

$$[\Sigma] \in H^*(\mathcal{J}^k(V), \mathbf{Z}) \cong H^*(LG(V), \mathbf{Z}) \,.$$

Przypuśćmy, że ta klasa jest rowna $\sum_I \alpha_I \widetilde{Q}_I(R^*)$, gdzie suma jest po ostrych podziałach $I \subset \rho$ i $\alpha_I \in \mathbf{Z}$ (jest ważne że używamy wiązki R^*).

Lagranżowska klasa osobliwości $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(V)$ definiuje klasę kohomologii

$$[\Sigma] \in H^*(\mathcal{J}^k(V), \mathbf{Z}) \cong H^*(LG(V), \mathbf{Z}) .$$

Przypuśćmy, że ta klasa jest rowna $\sum_I \alpha_I \widetilde{Q}_I(R^*)$, gdzie suma jest po ostrych podziałach $I \subset \rho$ i $\alpha_I \in \mathbf{Z}$ (jest ważne że używamy wiązki R^*).

Wówczas $\mathcal{T}^\Sigma := \sum_I \alpha_I \widetilde{Q}_I$ jest *wielomianem Thoma* stowarzyszonym z Lagranżowską klasą osobliwości Σ.

Lagranżowska klasa osobliwości $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(V)$ definiuje klasę kohomologii

$$[\Sigma] \in H^*(\mathcal{J}^k(V), \mathbf{Z}) \cong H^*(LG(V), \mathbf{Z}) \,.$$

Przypuśćmy, że ta klasa jest rowna $\sum_I \alpha_I \widetilde{Q}_I(R^*)$, gdzie suma jest po ostrych podziałach $I \subset \rho$ i $\alpha_I \in \mathbf{Z}$ (jest ważne że używamy wiązki R^*).

Wówczas $\mathcal{T}^\Sigma := \sum_I \alpha_I \widetilde{Q}_I$ jest *wielomianem Thoma* stowarzyszonym z Lagranżowską klasą osobliwości Σ.

Twierdzenie. *(M.Mikosz+PP+A.Weber, 2007) Dla każdej Lagranżowskiej klasy osobliwości Σ, jej wielomian Thoma $\mathcal{T}^\Sigma$ jest nieujemną kombinacją $\widetilde{Q}$-funcji.*

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).
Standarowa przestrzeń symplektyczna $\quad V := W \oplus (W^* \otimes \xi)$.

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).
Standarowa przestrzeń symplektyczna $V := W \oplus (W^* \otimes \xi)$.
wyposażona w skreconą formę symplektyczną $\omega \in \Lambda^2 V^* \otimes \xi$.
Mamy podrozmaitości Lagranżowskie (kiełki przez 0).

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).
Standarowa przestrzeń symplektyczna $V := W \oplus (W^* \otimes \xi)$.
wyposażona w skreconą formę symplektyczną $\omega \in \Lambda^2 V^* \otimes \xi$.
Mamy podrozmaitości Lagranżowskie (kiełki przez 0).
Standardowa *przestrzeń kontaktowa* wyposażona w *formę kontaktową* α,

$$V \oplus \xi = W \oplus (W^* \otimes \xi) \oplus \xi\,.$$

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).
Standarowa przestrzeń symplektyczna $\quad V := W \oplus (W^* \otimes \xi)$.
wyposażona w skreconą formę symplektyczną $\omega \in \Lambda^2 V^* \otimes \xi$.
Mamy podrozmaitości Lagranżowskie (kiełki przez 0).
Standardowa *przestrzeń kontaktowa* wyposażona w *formę kontaktową* α,

$$V \oplus \xi = W \oplus (W^* \otimes \xi) \oplus \xi \,.$$

Podrozmaitości Leżandrowskie $V \oplus \xi$ to rozmaitości wymiaru n, których przestrzenie styczne są zawarte w $\mathrm{Ker}(\alpha)$.

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).
Standarowa przestrzeń symplektyczna $\quad V := W \oplus (W^* \otimes \xi)$.
wyposażona w skreconą formę symplektyczną $\omega \in \Lambda^2 V^* \otimes \xi$.
Mamy podrozmaitości Lagranżowskie (kiełki przez 0).
Standardowa *przestrzeń kontaktowa* wyposażona w *formę kontaktową* α,

$$V \oplus \xi = W \oplus (W^* \otimes \xi) \oplus \xi\,.$$

Podrozmaitości Leżandrowskie $V \oplus \xi$ to rozmaitości wymiaru n, których przestrzenie styczne są zawarte w $\mathrm{Ker}(\alpha)$.

Każda Leżandrowska podrozmaitość w $V \oplus \xi$ jest wyznaczona przez swój Lagranżowski rzut do V oraz każda Lagranżowska podrozmaitość w V podnosi się do podrozmaitości Leżandrowskiej w $V \oplus \xi$.

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje.

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje. Dwie podrozmaitości Lagranżowskie, gdy są w położeniu ogólnym, to przecinają się transwersalnie. Osobliwe relatywne pozycje mogą być podzielone na Leżandrowskie klasy osobliwości.

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje.
Dwie podrozmaitości Lagranżowskie, gdy są w położeniu ogólnym, to przecinają się transwersalnie. Osobliwe relatywne pozycje mogą być podzielone na Leżandrowskie klasy osobliwości.
Grupa symplektomorfizmów V działa na zbiorze par podrozmaitości Lagranżowskich.

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje. Dwie podrozmaitości Lagranżowskie, gdy są w położeniu ogólnym, to przecinają się transwersalnie. Osobliwe relatywne pozycje mogą być podzielone na Leżandrowskie klasy osobliwości.

Grupa symplektomorfizmów V działa na zbiorze par podrozmaitości Lagranżowskich.

Lemat. *Każda para podrozmaitości Lagranżowskich jest równoważna parze* (L_1, L_2) *takiej, że* L_1 *jest podprzestrzenią liniową oraz* $T_0L_2 = W$.

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje.
Dwie podrozmaitości Lagranżowskie, gdy są w położeniu ogólnym, to przecinają się transwersalnie. Osobliwe relatywne pozycje mogą być podzielone na Leżandrowskie klasy osobliwości.
Grupa symplektomorfizmów V działa na zbiorze par podrozmaitości Lagranżowskich.

Lemat. *Każda para podrozmaitości Lagranżowskich jest równoważna parze* (L_1, L_2) *takiej, że* L_1 *jest podprzestrzenią liniową oraz* $T_0 L_2 = W$.

Dostajemy 2 typy podrozmaitosci Lagranżowskich:
podprzestrzenie liniowe,

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje.
Dwie podrozmaitości Lagranżowskie, gdy są w położeniu ogólnym, to przecinają się transwersalnie. Osobliwe relatywne pozycje mogą być podzielone na Leżandrowskie klasy osobliwości.
Grupa symplektomorfizmów V działa na zbiorze par podrozmaitości Lagranżowskich.

Lemat. *Każda para podrozmaitości Lagranżowskich jest równoważna parze* (L_1, L_2) *takiej, że* L_1 *jest podprzestrzenią liniową oraz* $T_0 L_2 = W$.

Dostajemy 2 typy podrozmaitosci Lagranżowskich:
podprzestrzenie liniowe,
podrozmaitości, których przestrzeń styczna w 0 *jest równa* W; są one wykresami różniczek funkcji $f : W \to \xi$ takimi że $df(0) = 0$ and $d^2 f(0) = 0$.

Niech $\mathcal{J}^k(W, \xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0 L_2 = W$.

Niech $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0 L_2 = W$.

Niech $\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$ będzie rzutowaniem.

Niech $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0 L_2 = W$.

Niech $\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$ będzie rzutowaniem. Jest to trywialna wiązka wektorowa z włóknem $\bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(W^*) \otimes \xi$.

Niech $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0 L_2 = W$.

Niech $\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$ będzie rzutowaniem. Jest to trywialna wiązka wektorowa z włóknem $\bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(W^*) \otimes \xi$.

Interesuje nas teraz grupa kontaktomorfizmów (dyfeomorfizmów kontaktowych) $V \oplus \xi$.

Niech $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0L_2 = W$.

Niech $\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$ będzie rzutowaniem. Jest to trywialna wiązka wektorowa z włóknem $\bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(W^*) \otimes \xi$.

Interesuje nas teraz grupa kontaktomorfizmów (dyfeomorfizmów kontaktowych) $V \oplus \xi$.

Przez *Leżandrowską klasę osobliwości* rozumiemy algebraiczny podzbiór $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ niezmienniczy ze względu na holomorficzne kontaktomorfizmy $\mathbf{C}^{2n+1}$.

Niech $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0L_2 = W$.

Niech $\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$ będzie rzutowaniem. Jest to trywialna wiązka wektorowa z włóknem $\bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(W^*) \otimes \xi$.

Interesuje nas teraz grupa kontaktomorfizmów (dyfeomorfizmów kontaktowych) $V \oplus \xi$.

Przez *Leżandrowską klasę osobliwości* rozumiemy algebraiczny podzbiór $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ niezmienniczy ze względu na holomorficzne kontaktomorfizmy $\mathbf{C}^{2n+1}$.

Dodatkowo, zakładamy, że Σ jest stabilny ze względu na zwiększanie wymiaru W.

Wiązka dżetów $\mathcal{J}^k(W,\xi)$

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, W zespoloną wiązką rangi n nad X oraz ξ zespoloną wiązką liniową nad X.

Wiązka dżetów $\mathcal{J}^k(W,\xi)$

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, W zespoloną wiązką rangi n nad X oraz ξ zespoloną wiązką liniową nad X. Niech $\tau : LG(V,\omega) \to X$ oznacza wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów parametryzującą liniowe podrozmaitości w V_x, $x \in X$.

Wiązka dżetów $\mathcal{J}^k(W,\xi)$

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, W zespoloną wiązką rangi n nad X oraz ξ zespoloną wiązką liniową nad X. Niech $\tau : LG(V,\omega) \to X$ oznacza wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów parametryzującą liniowe podrozmaitości w V_x, $x \in X$. Mamy relatywną wersję
$\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$.

Wiązka dżetów $\mathcal{J}^k(W,\xi)$

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, W zespoloną wiązką rangi n nad X oraz ξ zespoloną wiązką liniową nad X. Niech $\tau : LG(V,\omega) \to X$ oznacza wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów parametryzującą liniowe podrozmaitości w V_x, $x \in X$. Mamy relatywną wersję
$\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$.
Przestrzeń $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ rozwłóknia się nad X. Jest równa:

$$\mathcal{J}^k(W,\xi) = \tau^* \left(\bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(W^*) \otimes \xi \right) .$$

Wiązka dżetów $\mathcal{J}^k(W,\xi)$

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, W zespoloną wiązką rangi n nad X oraz ξ zespoloną wiązką liniową nad X. Niech $\tau : LG(V,\omega) \to X$ oznacza wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów parametryzującą liniowe podrozmaitości w V_x, $x \in X$. Mamy relatywną wersję
$\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$.
Przestrzeń $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ rozwłóknia się nad X. Jest równa:

$$\mathcal{J}^k(W,\xi) = \tau^* \left(\bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(W^*) \otimes \xi \right) .$$

Ponieważ zmiany współrzędnych W i ξ indukują holomorficzne kontaktomorfizmy $V \oplus \xi$, każda Leżandrowska klasa osobliwości Σ wyznacza $\Sigma(W,\xi) \subset \mathcal{J}^k(W,\xi)$.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V, \omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V,\omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Forma symplektyczna ω indukuje izomorfizm $V \cong V^* \otimes \xi$.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V, \omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Forma symplektyczna ω indukuje izomorfizm $V \cong V^* \otimes \xi$.

Na $LG(V, \omega)$ mamy ciąg tautologiczny wiązek:
$0 \to R \to V \to R^* \otimes \xi \to 0$.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V,\omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Forma symplektyczna ω indukuje izomorfizm $V \cong V^* \otimes \xi$.

Na $LG(V,\omega)$ mamy ciąg tautologiczny wiązek:
$0 \to R \to V \to R^* \otimes \xi \to 0$.

Rozważmy wiązkę wirtualną $A := W^* \otimes \xi - R_{W,\xi}$.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V,\omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Forma symplektyczna ω indukuje izomorfizm $V \cong V^* \otimes \xi$.

Na $LG(V,\omega)$ mamy ciąg tautologiczny wiązek:
$0 \to R \to V \to R^* \otimes \xi \to 0$.

Rozważmy wiązkę wirtualną $A := W^* \otimes \xi - R_{W,\xi}$.

Mamy relację: $A + A^* \otimes \xi = 0$.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V,\omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Forma symplektyczna ω indukuje izomorfizm $V \cong V^* \otimes \xi$.

Na $LG(V,\omega)$ mamy ciąg tautologiczny wiązek:
$0 \to R \to V \to R^* \otimes \xi \to 0$.

Rozważmy wiązkę wirtualną $A := W^* \otimes \xi - R_{W,\xi}$.

Mamy relację: $A + A^* \otimes \xi = 0$.

Klasy Cherna $a_i = c_i(A)$ generują $H^*(LG(V,\omega),\mathbf{Z}) \cong H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi),\mathbf{Z})$ jako algebrę nad $H^*(X,\mathbf{Z})$.

Niech $X = \mathbf{P}^n$, $\xi = \mathcal{O}(1)$ oraz niech $W = \mathbf{1}^n$ będzie trywialną wiązką rangi n.

Niech $X = \mathbf{P}^n$, $\xi = \mathcal{O}(1)$ oraz niech $W = \mathbf{1}^n$ będzie trywialną wiązką rangi n.

Wówczas $H^*(LG(V,\omega), \mathbf{Z}) \cong H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi), \mathbf{Z})$ jest izomorficzny z pierścieniem Leżandrowskich klas charakterystycznych w stopniach nie większych niż n.

Niech $X = \mathbf{P}^n$, $\xi = \mathcal{O}(1)$ oraz niech $W = \mathbf{1}^n$ będzie trywialną wiązką rangi n.

Wówczas $H^*(LG(V,\omega), \mathbf{Z}) \cong H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi), \mathbf{Z})$ jest izomorficzny z pierścieniem Leżandrowskich klas charakterystycznych w stopniach nie większych niż n.

Element $[\Sigma(W,\xi)]$ of $H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi), \mathbf{Z})$, nazywany jest *Leżandrowskim wielomianem Thoma* Σ.

Niech $X = \mathbf{P}^n$, $\xi = \mathcal{O}(1)$ oraz niech $W = \mathbf{1}^n$ będzie trywialną wiązką rangi n.

Wówczas $H^*(LG(V,\omega),\mathbf{Z}) \cong H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi),\mathbf{Z})$ jest izomorficzny z pierścieniem Leżandrowskich klas charakterystycznych w stopniach nie większych niż n.

Element $[\Sigma(W,\xi)]$ of $H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi),\mathbf{Z})$, nazywany jest *Leżandrowskim wielomianem Thoma* Σ.
i często oznaczany $\mathcal{T}^\Sigma$. Wyrażony jest w terminach a_i and $s = c_1(\xi)$.

Niech $X=\mathbf{P}^n$, $\xi=\mathcal{O}(1)$ oraz niech $W=\mathbf{1}^n$ będzie trywialną wiązką rangi n.

Wówczas $H^*(LG(V,\omega),\mathbf{Z})\cong H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi),\mathbf{Z})$ jest izomorficzny z pierścieniem Leżandrowskich klas charakterystycznych w stopniach nie większych niż n.

Element $[\Sigma(W,\xi)]$ of $H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi),\mathbf{Z})$, nazywany jest *Leżandrowskim wielomianem Thoma* Σ.
i często oznaczany $\mathcal{T}^\Sigma$. Wyrażony jest w terminach a_i and $s=c_1(\xi)$.

Twierdzenie. *(M.Mikosz+PP+A.Weber, 2010) Istnieje 1-parametrowa rodzina baz (w pierścieniu Leżandrowskich klas charakterystycznych) taka, że każdy Leżandrowski wielomian Thoma $\mathcal{T}^\Sigma$ ma dodatnie rozwinięcie w każdej bazie z tej rodziny.*

Niech $\xi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będa przestrzeniami wektorowymi wymiaru 1; $W := \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i \,, \qquad V := W \oplus (W^* \otimes \xi)\,.$

Niech $\xi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będa przestrzeniami wektorowymi wymiaru 1; $W := \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i\,, \qquad V := W \oplus (W^* \otimes \xi)\,.$

Mamy formę symplektyczną ω zdefiniowaną na V o wartościach w ξ. $LG(V, \omega)$ jest przestrzenią jednorodną dla grupy symplektycznej $Sp(V, \omega) \subset \mathrm{End}(V)$.

Niech $\xi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będa przestrzeniami wektorowymi wymiaru 1; $W := \bigoplus_{i=1}^n \alpha_i\,, \qquad V := W \oplus (W^* \otimes \xi)\,.$

Mamy formę symplektyczną ω zdefiniowaną na V o wartościach w ξ. $LG(V, \omega)$ jest przestrzenią jednorodną dla grupy symplektycznej $Sp(V, \omega) \subset \mathrm{End}(V)$.
Ustalmy dwie "przeciwne" standardowe izotropowe flagi w V:

$$F_h^+ := \bigoplus_{i=1}^{h} \alpha_i\,, \qquad F_h^- := \bigoplus_{i=1}^{h} \alpha_{n-i+1}^* \otimes \xi\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

Niech $\xi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ będa przestrzeniami wektorowymi wymiaru 1; $W := \bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i\,, \qquad V := W \oplus (W^* \otimes \xi)\,.$

Mamy formę symplektyczną ω zdefiniowaną na V o wartościach w ξ. $LG(V, \omega)$ jest przestrzenią jednorodną dla grupy symplektycznej $Sp(V, \omega) \subset \mathrm{End}(V)$.
Ustalmy dwie "przeciwne" standardowe izotropowe flagi w V:

$$F_h^+ := \bigoplus_{i=1}^{h} \alpha_i\,, \qquad F_h^- := \bigoplus_{i=1}^{h} \alpha_{n-i+1}^* \otimes \xi\,, \qquad (h = 1, 2, \dots, n)$$

Rozważmy dwie grupy Borela $B^\pm \subset Sp(V, \omega)$, zachowujące flagi $F_\bullet^\pm$. Orbity $B^\pm$ w $LG(V, \omega)$ daja dwa "przeciwne" rozkłady komórkowe $\{\Omega_I(F_\bullet^\pm, \xi)\}$ przestrzeni $LG(V, \omega)$, indeksowane przez ostre podziały.

Wszystko jest funktorialne ze względu na automorfizmy ξ i α_i's, (tworzą one torus $(\mathbf{C}^*)^{n+1}$). Zatem konstrukcja rozkładów komorkowych może być powtórzona dla wiązek ξ oraz $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ nad dowolną bazą X. Dostajemy wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów: $\tau : LG(V, \omega) \to X$.

Wszystko jest funktorialne ze względu na automorfizmy ξ i α_i's, (tworzą one torus $(\mathbf{C}^*)^{n+1}$). Zatem konstrukcja rozkładów komorkowych może być powtórzona dla wiązek ξ oraz $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ nad dowolną bazą X. Dostajemy wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów: $\tau : LG(V,\omega) \to X$. $LG(V,\omega)$ posiada dwie (relatywne) stratyfikacje

$$\{\Omega_I(F_\bullet^\pm, \xi) \to X\}_I$$

Wszystko jest funktorialne ze względu na automorfizmy ξ i α_i's, (tworzą one torus $(\mathbf{C}^*)^{n+1}$). Zatem konstrukcja rozkładów komorkowych może być powtórzona dla wiązek ξ oraz $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ nad dowolną bazą X. Dostajemy wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów: $\tau : LG(V,\omega) \to X$. $LG(V,\omega)$ posiada dwie (relatywne) stratyfikacje

$$\{\Omega_I(F_\bullet^\pm, \xi) \to X\}_I$$

Załóżmy, że $X = G/P$ jest rozmaitoscią zwartą, jednorodną ze względu ma działanie grupy G. Wówczas X posiada algebraiczny rozkład komórkowy $\{\sigma_\lambda\}$.

Wszystko jest funktorialne ze względu na automorfizmy ξ i α_i's, (tworzą one torus $(\mathbf{C}^*)^{n+1}$). Zatem konstrukcja rozkładów komorkowych może być powtórzona dla wiązek ξ oraz $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ nad dowolną bazą X. Dostajemy wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów: $\tau : LG(V,\omega) \to X$. $LG(V,\omega)$ posiada dwie (relatywne) stratyfikacje

$$\{\Omega_I(F_\bullet^\pm, \xi) \to X\}_I$$

Załóżmy, że $X = G/P$ jest rozmaitoscią zwartą, jednorodną ze względu ma działanie grupy G. Wówczas X posiada algebraiczny rozkład komórkowy $\{\sigma_\lambda\}$. Dwa rozkłady komórkowe $LG(V,\omega)$:

$$Z_{I\lambda}^\pm := \tau^{-1}(\sigma_\lambda) \cap \Omega_I(F_\bullet^\pm, \xi) \,.$$

Twierdzenie. *Załóżmy, że wiązka wektorowa* $\mathcal{J}$ *jest globalnie generowana. Wówczas, w* $\mathcal{J}$*, przecięcie* $\Sigma(W, \xi)$ *z domknięciem każdego* $\pi^{-1}(Z_{I\lambda}^{-})$ *jest reprezentowane przez cykl dodatni.*

Twierdzenie. *Załóżmy, że wiązka wektorowa $\mathcal{J}$ jest globalnie generowana. Wówczas, w $\mathcal{J}$, przecięcie $\Sigma(W,\xi)$ z domknięciem każdego $\pi^{-1}(Z^{-}_{I\lambda})$ jest reprezentowane przez cykl dodatni.*

Będziemy stosować to twierdzenie gdy wszystkie α_i są równe tej samej wiązce α (tzn. $W = \alpha^{\oplus n}$) oraz $\alpha^{-m} \otimes \xi$ będzie globalnie generowane dla $m \geq 3$.

Twierdzenie. *Załóżmy, że wiązka wektorowa $\mathcal{J}$ jest globalnie generowana. Wówczas, w $\mathcal{J}$, przecięcie $\Sigma(W,\xi)$ z domknięciem każdego $\pi^{-1}(Z^{-}_{I\lambda})$ jest reprezentowane przez cykl dodatni.*

Będziemy stosować to twierdzenie gdy wszystkie α_i są równe tej samej wiązce α (tzn. $W = \alpha^{\oplus n}$) oraz $\alpha^{-m} \otimes \xi$ będzie globalnie generowane dla $m \geq 3$.

Rozważmy następujące trzy sytuacje: baza to zawsze $X = \mathbf{P}^n$ oraz

$$\xi_1 = \mathcal{O}(-2)\,, \qquad \alpha_1 = \mathcal{O}(-1)\,,$$

$$\xi_2 = \mathcal{O}(1)\,, \qquad \alpha_2 = \mathbf{1}\,,$$

$$\xi_3 = \mathcal{O}(-3)\,, \qquad \alpha_3 = \mathcal{O}(-1)\,,$$

Otrzymujemy wiązki symplektyczne $V_i = \alpha_i^{\oplus n} \oplus (\alpha_i^* \otimes \xi_i)^{\oplus n}$ ze skręconymi formami symplektycznymi ω_i dla $i = 1, 2, 3$.

Żeby objąć wszystkie trzy sytuacje, rozważamy produkt $X := \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$

Żeby objąć wszystkie trzy sytuacje, rozważamy produkt $X := \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ i kładziemy

$$W := p_1^* \mathcal{O}(-1)^{\oplus n}, \qquad \xi := p_1^* \mathcal{O}(-3) \otimes p_2^* \mathcal{O}(1),$$

gdzie $p_i : X \to \mathbf{P}^n$, $i = 1, 2$ są rzutowaniami.

Żeby objąć wszystkie trzy sytuacje, rozważamy produkt $X := \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ i kładziemy

$$W := p_1^* \mathcal{O}(-1)^{\oplus n}, \qquad \xi := p_1^* \mathcal{O}(-3) \otimes p_2^* \mathcal{O}(1),$$

gdzie $p_i : X \to \mathbf{P}^n$, $i = 1, 2$ są rzutowaniami.

Obcinając wiązki W oraz ξ do przekątnej albo do faktorów, otrzymujemy powyższe trzy sytuacje.

Żeby objąć wszystkie trzy sytuacje, rozważamy produkt $X := \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ i kładziemy

$$W := p_1^*\mathcal{O}(-1)^{\oplus n}, \qquad \xi := p_1^*\mathcal{O}(-3) \otimes p_2^*\mathcal{O}(1),$$

gdzie $p_i : X \to \mathbf{P}^n$, $i = 1, 2$ są rzutowaniami.

Obcinając wiązki W oraz ξ do przekątnej albo do faktorów, otrzymujemy powyższe trzy sytuacje.

Przestrzeń $LG(V, \omega)$ posiada rozkład komórkowy $Z^-_{I,a,b}$. Baza dualna kohomologii (w sensie algebry liniowej) będzie oznaczona przez:

$$e_{I,a,b} = [\overline{Z^-_{I,a,b}}]^*.$$

Ta baza jest reprezentowana przez $Z^+_{I,a,b}$.

Żeby objąć wszystkie trzy sytuacje, rozważamy produkt $X := \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ i kładziemy

$$W := p_1^*\mathcal{O}(-1)^{\oplus n}, \qquad \xi := p_1^*\mathcal{O}(-3) \otimes p_2^*\mathcal{O}(1),$$

gdzie $p_i : X \to \mathbf{P}^n$, $i = 1, 2$ są rzutowaniami.

Obcinając wiązki W oraz ξ do przekątnej albo do faktorów, otrzymujemy powyższe trzy sytuacje.

Przestrzeń $LG(V, \omega)$ posiada rozkład komórkowy $Z^-_{I,a,b}$. Baza dualna kohomologii (w sensie algebry liniowej) będzie oznaczona przez:

$$e_{I,a,b} = [\overline{Z^-_{I,a,b}}]^*.$$

Ta baza jest reprezentowana przez $Z^+_{I,a,b}$.

Mamy $e_{I,a,b} = e_{I,0,0}\ v_1^a v_2^b$ oraz $e_{I,0,0} = [\overline{\Omega_I(F^+_\bullet, \xi)}]$.

Twierdzenie. *(MM+PP+AW 2010) Niech* Σ *będzie Leżandrowską klasą osobliwości. Wówczas* $[\Sigma(W, \xi)]$ *ma nieujemne współczynniki w bazie* $\{e_{I,a,b}\}$.

Twierdzenie. *(MM+PP+AW 2010) Niech Σ będzie Leżandrowską klasą osobliwości. Wówczas $[\Sigma(W,\xi)]$ ma nieujemne współczynniki w bazie $\{e_{I,a,b}\}$.*

Wiązka $\mathcal{J}$ jest tu g.g. (więc przecięcia w $\mathcal{J}$ są nieujemne):

$$\tau^*\left(\bigoplus_{j=3}^{k+1}\mathrm{Sym}^j(W^*)\otimes\xi\right)=$$

$$\tau^*\left(\bigoplus_{j=3}^{k+1}\mathrm{Sym}^j(\mathbf{1}^n)\otimes p_1^*\mathcal{O}(j-3)\otimes p_2^*\mathcal{O}(1)\right).$$

Twierdzenie. *(MM+PP+AW 2010) Niech* Σ *będzie Leżandrowską klasą osobliwości. Wówczas* $[\Sigma(W,\xi)]$ *ma nieujemne współczynniki w bazie* $\{e_{I,a,b}\}$.

Wiązka $\mathcal{J}$ jest tu g.g. (więc przecięcia w $\mathcal{J}$ są nieujemne):

$$\tau^*\left(\bigoplus_{j=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^j(W^*)\otimes\xi\right) =$$
$$\tau^*\left(\bigoplus_{j=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^j(\mathbf{1}^n)\otimes p_1^*\mathcal{O}(j{-}3)\otimes p_2^*\mathcal{O}(1)\right).$$

Niech Σ będzie Leżandrowską klasą osobliwości. Jej wielomian Thoma wyrażony w klasach Cherna $A = W^*\otimes\xi - R$ i $c_1(\xi) = v_2 - 3v_1$, jest nieujemną kombinacją

Twierdzenie. *(MM+PP+AW 2010) Niech Σ będzie Leżandrowską klasą osobliwości. Wówczas $[\Sigma(W,\xi)]$ ma nieujemne współczynniki w bazie $\{e_{I,a,b}\}$.*

Wiązka $\mathcal{J}$ jest tu g.g. (więc przecięcia w $\mathcal{J}$ są nieujemne):

$\tau^*\left(\bigoplus_{j=3}^{k+1}\mathrm{Sym}^j(W^*)\otimes\xi\right)=$

$\tau^*\left(\bigoplus_{j=3}^{k+1}\mathrm{Sym}^j(\mathbf{1}^n)\otimes p_1^*\mathcal{O}(j-3)\otimes p_2^*\mathcal{O}(1)\right).$

Niech Σ będzie Leżandrowską klasą osobliwości. Jej wielomian Thoma wyrażony w klasach Cherna $A=W^*\otimes\xi-R$ i $c_1(\xi)=v_2-3v_1$, jest nieujemną kombinacją

$$\mathcal{T}^\Sigma=\sum_{I,a,b}\gamma_{I,a,b}\,e_{I,a,b}=\sum_{I,a,b}\gamma_{I,a,b}[\overline{\Omega_I(F_\bullet^+,\xi)}]v_1^a v_2^b\,.$$

Chcemy znaleźć addytywną bazę pierścienia Leżandrowskich klas charakterystycznych taką że każdy Leżandrowski wielomian Thoma jest nieujemną kombinacją elementów bazowych.

Chcemy znaleźć addytywną bazę pierścienia Leżandrowskich klas charakterystycznych taką że każdy Leżandrowski wielomian Thoma jest nieujemną kombinacją elementów bazowych.
Weźmy parę liczb całkowitych p, q.

Chcemy znaleźć addytywną bazę pierścienia Leżandrowskich klas charakterystycznych taką że każdy Leżandrowski wielomian Thoma jest nieujemną kombinacją elementów bazowych.
Weźmy parę liczb całkowitych p, q.

$$\xi^{(p,q)} = \xi_2^{\otimes p} \otimes \xi_3^{\otimes q}$$

$$\alpha = \alpha^{(p,q)} = \alpha_2^{\otimes p} \otimes \alpha_3^{\otimes q} = \alpha_3^{\otimes q}$$

Chcemy znaleźć addytywną bazę pierścienia Leżandrowskich klas charakterystycznych taką że każdy Leżandrowski wielomian Thoma jest nieujemną kombinacją elementów bazowych.
Weźmy parę liczb całkowitych p, q.

$$\xi^{(p,q)} = \xi_2^{\otimes p} \otimes \xi_3^{\otimes q}$$

$$\alpha = \alpha^{(p,q)} = \alpha_2^{\otimes p} \otimes \alpha_3^{\otimes q} = \alpha_3^{\otimes q}$$

Podzielmy $H^*(LG(V,\omega), \mathbf{Q})$ przez relację: $q \cdot v_1 = p \cdot v_2$

Chcemy znaleźć addytywną bazę pierścienia Leżandrowskich klas charakterystycznych taką że każdy Leżandrowski wielomian Thoma jest nieujemną kombinacją elementów bazowych.
Weźmy parę liczb całkowitych p, q.

$$\xi^{(p,q)} = \xi_2^{\otimes p} \otimes \xi_3^{\otimes q}$$

$$\alpha = \alpha^{(p,q)} = \alpha_2^{\otimes p} \otimes \alpha_3^{\otimes q} = \alpha_3^{\otimes q}$$

Podzielmy $H^*(LG(V,\omega), \mathbf{Q})$ przez relację: $q \cdot v_1 = p \cdot v_2$ czyli specjalizując: $v_1 = p \cdot t$, $v_2 = q \cdot t$, otrzymujemy pierścień $H^*(LG(V^{(p,q)}, \omega^{(p,q)}), \mathbf{Q})$ izomorficzny z pierścienim Leżandrowskich klas charakterstycznych do stopnia n (o ile $c_1(\xi) = v_2 - 3v_1$ nie specjalizuje się do 0.)

Twierdzenie. *Jeśli p i q są nieujemne, $q - 3p \neq 0$, to wielomian Thoma jest nieujemną kombinacją elementów* $[\overline{\Omega_I(F_\bullet^+, \xi)}]\, t^i$*'s.*

Twierdzenie. *Jeśli p i q są nieujemne, $q - 3p \neq 0$, to wielomian Thoma jest nieujemną kombinacją elementów $[\overline{\Omega_I(F_\bullet^+, \xi)}]\, t^i$'s.*

Rodzina $[\overline{\Omega_I(F_\bullet^+, \xi)}]\, t^i$ jest jednoparametrową rodziną baz zależną od parametru p/q.

Twierdzenie. *Jeśli p i q są nieujemne, $q - 3p \neq 0$, to wielomian Thoma jest nieujemną kombinacją elementów $[\overline{\Omega_I(F_\bullet^+, \xi)}]\, t^i$'s.*

Rodzina $[\overline{\Omega_I(F_\bullet^+, \xi)}]\, t^i$ jest jednoparametrową rodziną baz zależną od parametru p/q.
Przypadek 1. $\xi_1 = \mathcal{O}(-2), \alpha_1 = \mathcal{O}(-1)$. To odpowiada wartości parametru 1; $p = 1$ and $q = 1$; $v_1 = v_2 = t$.
Geometrycznie to oznacza, że studiujemy obcięcie wiązek W oraz ξ do przekątnej w $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$.

Twierdzenie. *Jeśli p i q są nieujemne, $q - 3p \neq 0$, to wielomian Thoma jest nieujemną kombinacją elementów $[\overline{\Omega_I(F_\bullet^+, \xi)}]\, t^i$'s.*

Rodzina $[\overline{\Omega_I(F_\bullet^+, \xi)}]\, t^i$ jest jednoparametrową rodziną baz zależną od parametru p/q.
Przypadek 1. $\xi_1 = \mathcal{O}(-2), \alpha_1 = \mathcal{O}(-1)$. To odpowiada wartości parametru 1; $p = 1$ and $q = 1$; $v_1 = v_2 = t$.
Geometrycznie to oznacza, że studiujemy obcięcie wiązek W oraz ξ do przekątnej w $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$.

Twierdzenie. *Wielomian Thoma Lagranżowskiej klasy osobliwości jest kombinacją:*

$$\mathcal{T}^\Sigma = \sum_{j \geq 0} \sum_I \alpha_{I,j}\ \widetilde{Q}_I(A \otimes \xi^{-\frac{1}{2}}) \cdot t^j \,.$$

Tutaj $t = \frac{1}{2} c_1(\xi^*)$, $I \subset \rho$, oraz $\alpha_{I,j}$ sa niejemnymi liczbami

Stwierdzenie. *Niech $t = v_1 = v_2$. Dla niepustej Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ, Lagranżowski wielomian Thoma (czyli $\mathcal{T}^{\Sigma}$ dla $t = 0$) jest niezerowy. (Zatem także $\mathcal{T}^{\Sigma}$ jest niezerowy.)*

Stwierdzenie. *Niech $t = v_1 = v_2$. Dla niepustej Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ, Lagranżowski wielomian Thoma (czyli $\mathcal{T}^\Sigma$ dla $t = 0$) jest niezerowy. (Zatem także $\mathcal{T}^\Sigma$ jest niezerowy.)*

Kazarian: Klasyfikacja osobliwości Leżandrowskich jest równoległa do klasyfikacji osobliwości punktów krytycznych odwzorowań ze względu na stabilną prawą równoważność. Dla Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ rozważmy stowarzyszoną klasę osobliwości odwzorowań $f : M \to C$ z n-wymiarowych rozmaitości do krzywych. Oznaczmy stowarzyszony wielomian przez Tp^Σ.

Stwierdzenie. *Niech $t = v_1 = v_2$. Dla niepustej Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ, Lagranżowski wielomian Thoma (czyli $\mathcal{T}^\Sigma$ dla $t = 0$) jest niezerowy. (Zatem także $\mathcal{T}^\Sigma$ jest niezerowy.)*

Kazarian: Klasyfikacja osobliwości Leżandrowskich jest równoległa do klasyfikacji osobliwości punktów krytycznych odwzorowań ze względu na stabilną prawą równoważność.
Dla Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ rozważmy stowarzyszoną klasę osobliwości odwzorowań $f : M \to C$ z n-wymiarowych rozmaitości do krzywych. Oznaczmy stowarzyszony wielomian przez Tp^Σ.
Mamy

$$Tp^\Sigma = \mathcal{T}^\Sigma \cdot c_n(T^*M \otimes f^*TC)\,.$$

Stwierdzenie. *Niech $t = v_1 = v_2$. Dla niepustej Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ, Lagranżowski wielomian Thoma (czyli $\mathcal{T}^\Sigma$ dla $t = 0$) jest niezerowy. (Zatem także $\mathcal{T}^\Sigma$ jest niezerowy.)*

Kazarian: Klasyfikacja osobliwości Leżandrowskich jest równoległa do klasyfikacji osobliwości punktów krytycznych odwzorowań ze względu na stabilną prawą równoważność.

Dla Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ rozważmy stowarzyszoną klasę osobliwości odwzorowań $f : M \to C$ z n-wymiarowych rozmaitości do krzywych. Oznaczmy stowarzyszony wielomian przez Tp^Σ.

Mamy

$$Tp^\Sigma = \mathcal{T}^\Sigma \cdot c_n(T^*M \otimes f^*TC)\,.$$

Wiemy, że Tp^Σ jest niezerowy. Pokazuje się, że Tp^Σ po specjalizacji $f^*TC = \mathbf{1}$ i.e. $t = 0$, też jest niezerowy. Teza wynika z równania.

Ciekawa hipoteza o dodatniości

Hipoteza Greena-Griffithsa: Każda rzutowa rozmaitość ogólnego typu zawiera właściwą podrozmaitość $Y \subset X$ taką że obrazy wszystkich niestałych całkowitych krzywych holomorficznych $f : \mathbf{C} \to X$ leżą w Y.

Ciekawa hipoteza o dodatniości

Hipoteza Greena-Griffithsa: Każda rzutowa rozmaitość ogólnego typu zawiera właściwą podrozmaitość $Y \subset X$ taką że obrazy wszystkich niestałych całkowitych krzywych holomorficznych $f : \mathbf{C} \to X$ leżą w Y.

Siu: Dla hiperpowierzchni X w przestrzeni rzutowej, hipoteza GG jest prawdziwa, gdy $\deg(X) >> 0$.

Ciekawa hipoteza o dodatniości

Hipoteza Greena-Griffithsa: Każda rzutowa rozmaitość ogólnego typu zawiera właściwą podrozmaitość $Y \subset X$ taką że obrazy wszystkich niestałych całkowitych krzywych holomorficznych $f : \mathbf{C} \to X$ leżą w Y.

Siu: Dla hiperpowierzchni X w przestrzeni rzutowej, hipoteza GG jest prawdziwa, gdy $\deg(X) >> 0$.

Hipoteza Rimanyi: Wielomiany Thoma dla $A_i(r)$ mają dodatnie rozwinięcie w bazie jednomianów od klas Cherna. OK dla: A_1, A_2, A_3, A_4.

Ciekawa hipoteza o dodatniości

Hipoteza Greena-Griffithsa: Każda rzutowa rozmaitość ogólnego typu zawiera właściwą podrozmaitość $Y \subset X$ taką że obrazy wszystkich niestałych całkowitych krzywych holomorficznych $f : \mathbf{C} \to X$ leżą w Y.

Siu: Dla hiperpowierzchni X w przestrzeni rzutowej, hipoteza GG jest prawdziwa, gdy $\deg(X) >> 0$.

Hipoteza Rimanyi: Wielomiany Thoma dla $A_i(r)$ mają dodatnie rozwinięcie w bazie jednomianów od klas Cherna. OK dla: A_1, A_2, A_3, A_4.

Twierdzenie Berczi: Załóżmy, że hipoteza R jest prawdziwa. Wówczas dla ogólnej hiperpowierzchni $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$, hipoteza GG zachodzi dla $\deg(X) > n^6$.

KONIEC