WIELOMIANY THOMA

Piotr Pragacz (IM PAN, Warszawa)

Osobliwości odwzorowań: x_0 jest *punktem krytycznym (osobliwym)* funkcji $f(x)$ jeżeli $f'(x_0) = 0$.

Rozważać będziemy *rozmaitości zespolone*: przestrzenie, które „lokalnie wyglądają" jak $\mathbf{C}^n$: $x \in M$ jest *punktem krytycznym (osobliwym)* odwzorowania rozmaitości $f : M \to N$ jeżeli ranga $df_x : T_x M \to T_{f(x)} N$ nie jest maksymalna.

Twórcy teorii osobliwości odwzorowań:

Hassler Whitney: twierdzenia o aproksymacji dowolnych odwzorowań przy pomocy odwzorowań bez punktów osobliwych.

René Thom: Lemat o transwersalności, wielomiany Thoma – ważny i intrygujący rozdział *globalnej teorii osobliwości.*

Cel: Nowe metody *algebraiczne* w wyliczaniu i badaniu struktury wielomianów Thoma.

Wielomiany Thoma pochodzą z geometrii; aby więc je wprowadzić i podkreślić ich *uniwersalny* charakter, potrzebne są podstawowe informacje z *teorii przecięć* w geometrii rozmaitości.

Baaardzo skrótowo:

Niech M będzie rozmaitością. Np. $M = \mathbf{P}^n$, lub M=Grassmannian $G_k(n) = \{\Lambda \subset \mathbf{C}^n : |\Lambda| = k\}$.

Chcemy „mnożyć” podrozmaitości $X, Y \subset M$. Można skonstruować „pierścień przecięć” $H(M)$ ze strukturą mnożenia indukowaną z „$X \cap Y$” modulo „przesuwanie” podrozmaitości, i uwzględniającą krotności przecięcia. Np.

$$H(\mathbf{P}^n) = \mathbf{Z}[x]/(x^{n+1}) \qquad x = \text{hiperpłaszczyzna}$$

$$H(G_k(n)) = \mathrm{Sym}(x_1, \ldots, x_k)/(...)$$

Rozmaitość Schuberta w Grassmannianie:

$$\{\Lambda \in G_k(n) : |\Lambda \cap V^{r_1}| \geq 1, ..., |\Lambda \cap V^{r_k}| \geq k\}$$

Tu $V^{r_1} \subset \cdots \subset V^{r_k} \subset \mathbf{C}^n$ jest „ogólnym” ciągiem podprzestrzeni liniowych oraz $r_1 < \cdots < r_k$.

A. Lascoux 1978: „Rozmaitość Schuberta jest FUNKCJĄ SCHURA”?!

Funkcje Schura będą głównym narzędziem w tym wykładzie.

Klasa fundamentalna podrozmaitości $X = \bigcup_i X_i$, gdzie X_i są składowymi nieprzywiedlnymi jest równa $\sum_i m_i X_i$, gdzie m_i jest krotnością składowej X_i.

Np. klasa fundamentalna podrozmaitości rzutowej stopnia d i wymiaru r w $\mathbf{P}^n$ jest równa $d \cdot x^{n-r}$; w szczególności klasa hiperpowierzchni stopnia d jest równa $d \cdot x$.

Wiązka wektorowa: $E \to M$ to rozwłóknienie przestrzeni liniowych ustalonego wymiaru nad M: $\bigcup_{x\in M} E_x$. (Kombinacja geometrii rozmaitości z algebrą liniową). Np.

- wiązka styczna do rozmaitości $TM = \bigcup_{x\in M} T_x M$;

- wiązka „tautologiczna" na $G_k(n)$: włóknem nad punktem odpowiadającym Λ jest właśnie przestrzeń liniowa Λ. (Jeżeli ograniczyć się do odwzorowań ciągłych, to każdą wiązkę można otrzymać z tautologicznej za pomocą następującej operacji „przeciagnięcia").

Dla odwzor. $f : M \to N$ i wiązki $E \to N$ konstruuje się wiązkę $f^*E \to M$, której włóknem nad $x \in M$ jest $E_{f(x)}$.

Każdą wiązkę można „rozszczepić" na sumę wiązek 1-wymiarowych: dla wiązki $E^n \to M^m$ istnieje $f : M' \to M$ takie, że $f^*E = L_1 + \cdots + L_n$ (oraz $H(M) \hookrightarrow H(M')$).

Niech wiązce L_j odpowiada dywizor D_j (miejsce zer ogólnego przekroju $M' \to L_j$).

Klasa Cherna: $c_i(E) = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le n} D_{j_1}\cdots D_{j_i} \in H(M)$

– elementarna funkcja symetryczna stopnia i od $D_1, \ldots, D_n$.

Ta algebraiczna definicja posiada szereg interpretacji geometrycznych. Np. $c_m(TM)$ to klasyczna *charakterystyka Eulera* $\chi(M)$ rozmaitości M. Nazwa pochodzi od znanego wzoru Eulera: $W - K + S = 2$, wiążącego liczbę W wierzchołków, K krawędzi i S ścian wielościanu ($\chi = 2$).

Po tym wstępie, zmierzamy do defincji wielomanu Thoma.

Osobliwość: klasa równoważności kiełków $(\mathbf{C}^m, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ ze względu na analityczne reparametryzacje dziedziny i przeciwdziedziny.

Ustalmy osobliwość η. Niech $f : M^m \to N^n$ będzie odwzorowaniem między rozmaitościami zespolonymi. Niech $V^\eta(f)$ będzie *domknięciem* zbioru

$$\{x \in M : \text{osobliwość } f \text{ w } x \text{ jest równa } \eta\}\,.$$

Przez *kowymiar* osobliwości η rozumiemy kowymiar $V^\eta(f)$ dla ogólnego odwzorowania f.

Zakładamy w tym wykładzie, że liczba osobliwości kowymiaru mniejszego niż kowymiar η jest skończona.

W roku 1955 Thom dowiódł, że istnieje wielomian $\mathcal{T}^\eta$ (nazywany obecnie *wielomianem Thoma* osobliwości η), który zależy od formalnych zmiennych $c_1, c_2, \ldots, c_m;\ c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$, i posiada następującą własność:

Po podstawieniu $c_i = c_i(TM)$, $c'_j = c_j(f^*TN)$ dla ogólnego odwzorowania $f : M \to N$ rozmaitości zespolonych, $\mathcal{T}^\eta$ oblicza klasę fundamentalną $V^\eta(f)$.

Wielomian Thoma koduje więc „numeryczną” informację o ustalonej osobliwości przy pomocy niezmienników dziedziny i przeciwdziedziny ogólnego odwzorowania.

Okazuje się, że pierwszy „wielomian Thoma” odkrył już ... Riemann w roku 1857 (!).

Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem holomorficznym zwartych powierzchni Riemanna stopnia d.

e_x: = *indeks rozgałęzienia* f w $x \in M$ (tzn. liczba gałęzi f spotykających się w x). Algebraicznie oznacza to, że używając współrzednej z w otoczeniu x, lokalnie $f(z) = z^{e_x}$.

Wzór Riemanna-Hurwitza orzeka

$$\sum_{x \in M} (e_x - 1) = d \cdot \chi(N) - \chi(M)\,.$$

(Jeśli powierzchnię M przedstawimy sobie jako „precelek” z g dziurami to $\chi(M) = 2 - 2g$.)

Jeżeli $e_x = 2$, to mówimy, że x jest *osobliwością typu* A_1.

Oczywiście $V^{A_1}(f)$ – jako zbiór – zawiera wszystkie punkty krytyczne f (tzn. punkty, dla których $e_x \geq 2$). Jego klasa fundamentalna (*dywizor rozgałęzienia* f) jest równa

$$\sum_{x \text{ krytyczny}} (e_x - 1)[x]\,.$$

Zatem wzór Riemanna-Hurwitza można zinterpretować jako:

$$V^{A_1}(f)] = c_1(f^*TN) - c_1(TM),$$

co implikuje, że

$$\mathcal{T}^{A_1} = c_1' - c_1\,.$$

Symetrie osobliwości i układ równań na wielomian Thoma

Bedziemy zajmować się osobliwościami stabilnymi $(\mathbf{C}^\bullet, 0) \to (\mathbf{C}^{\bullet+k}, 0)$. Wielomiany Thoma takich osobliwości wyrażają się przez $c_i(f^*TN - TM) = [c(f^*TN)/c(TM)]_i$.

Oznaczmy przez $\kappa : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^{n+k}, 0)$ prototyp osobliwości η. Analizując symetrie związane z maksymalną zwartą podgrupą grupy

$$\mathrm{Aut}\,\kappa = \{(\phi, \psi) \in \mathrm{Diff}(\mathbf{C}^n, 0) \times \mathrm{Diff}(\mathbf{C}^{n+k}, 0) : \psi \circ \kappa \circ \phi^{-1} = \kappa\}$$

stowarzysza się z η *klasę Cherna* $c(\eta)$ i *klasę Eulera* $e(\eta)$.

– A_i: $\mathbf{C}[[z]]/(z^{i+1})$;

$$c(A_i) = \frac{1 + (i+1)x}{1 + x} \prod_{j=1}^{k} (1 + y_j),$$

$$e(A_i) = i!\ x^i \prod_{j=1}^{k} (y_j - x)(y_j - 2x) \cdots (y_j - ix).$$

– $I_{2,2}$: $\mathbf{C}[[x, y]]/(xy, x^2 + y^2)$;

$$c(I_{2,2}) = \frac{(1 + 2x_1)(1 + 2x_2)}{(1 + x_1)(1 + x_2)} \prod_{j=1}^{k} (1 + y_j),$$

$$e(I_{2,2}) = x_1 x_2 (x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) \prod_{j=1}^{k} (y_j - x_1)(y_j - x_2)(y_j - x_1 - x_2).$$

– $III_{2,2}$: $\mathbf{C}[[x,y]]/(xy,x^2,y^2)$, (tu $k \geq 1$);

$$c(III_{2,2}) = \frac{(1+2x_1)(1+2x_2)(1+x_1+x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)} \prod_{j=1}^{k-1}(1+y_j).$$

Twierdzenie 1 *Ustalmy osobliwość η. Załóżmy, że klasy Eulera wszystkich osobliwości kowymiaru mniejszego niż kowymiar η są nie-dzielnikami zera. Wówczas zachodzą następujace równania:*

(i) jeżeli $\xi \neq \eta$ oraz kowymiar ξ jest nie większy niż kowymiar η, to $\mathcal{T}^\eta(c(\xi)) = 0$;

(ii) $\mathcal{T}^\eta(c(\eta)) = e(\eta)$.

Ten system równań (gdzie ξ przebiega zbiór wszystkich takich osobliwości) wyznacza wielomian Thoma $\mathcal{T}^\eta$ jednoznacznie.

Twierdzenie to zwane dalej „metodą węgierską” zostało udowodnione i po raz pierwszy wykorzystane do obliczania wielomianów Thoma przez R. Rimanyi’ego i grupę matematyków węgierskich na początku lat 2000. Metoda ta odwołuje się do klasyfikacji osobliwości – patrz monografia Du Plesis-Wall’a.

Trzeba rachunki „zorganizować” konceptualnie, używając odpowiedniej bazy wielomianów. „Standardową” bazą używaną do wyliczeń wielomianów Thoma (np. w pracach liderów tej dziedziny: Rimanyi’ego i Kazariana) była baza *jednomianów od klas Cherna.*

W roku 2004 (dzięki dyskusjom z A. Lascoux) zainteresowałem się wielomianami Thoma i zacząłem stosować inną bazę: *funkcji Schura.*

Alfabet $\mathbb{A}$: (skończony) multi-zbiór elementów w pierścieniu przemiennym (najczęściej jest to zbiór zmiennych).

Będziemy identyfikować alfabet $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ z sumą $a_1 + \cdots + a_m$ i wykonywać zwykłe operacje algebraiczne na takich elementach. Rozważmy inny alfabet $\mathbb{B}$.

Funkcje pełne od różnicy alfabetów $S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$:

$$\sum S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})z^i = \prod_{b\in\mathbb{B}}(1-bz)/\prod_{a\in\mathbb{A}}(1-az)\,.$$

Te funkcje interpolują między $S_i(\mathbb{A})$ – pełnymi funkcjami symetrycznymi od $\mathbb{A}$ i $S_i(-\mathbb{B})$ – $\pm$ elementarnymi funkcjami symetrycznymi od $\mathbb{B}$.

Rugownik $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$: $R(\mathbb{A},\mathbb{B}) := \prod_{a\in\mathbb{A},b\in\mathbb{B}}(a-b)$.

Faktoryzacja: jeżeli card$(\mathbb{B}) = n$, to $S_n(a-\mathbb{B}) = R(a,\mathbb{B})$.

Dla *podziału* $I = (0 \le i_1 \le \cdots \le i_h)$, definiujemy *funkcję Schura* $S_I(\mathbb{A}-\mathbb{B})$ jako

$$S_I(\mathbb{A}-\mathbb{B}) := \Big| S_{i_q+q-p}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) \Big|_{1\le p,q\le h}\,.$$

Funkcje Schura odgrywają podstawową rolę w wielu działach matematyki: teorii reprezentacji, teorii przecięć w geometrii i topologii, kombinatoryce i innych.

Np. oznaczając $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$, mamy

$$S_{33344}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_3 & S_4 & S_5 & S_7 & S_8 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_5 & S_6 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_4 & S_5 \\ 0 & 1 & S_1 & S_3 & S_4 \end{vmatrix},$$

Użycie „$\mathbb{A} - \mathbb{B}$" jest wygodne: pozwala traktować wielomiany (symetryczne) „funktorialnie". I tak, dla kombinacji liniowej W funkcji Schura mamy

$$W(\mathbb{A} + \mathbb{C} - \mathbb{B} - \mathbb{C}) = W(\mathbb{A} - \mathbb{B}).$$

Poszukiwane wielomiany Thoma bedę miały postać

$$\sum_I \alpha_I S_I(T^*M - f^*T^*N) =: \sum_I \alpha_I S_I.$$

Thom policzył (geometrycznie) $\mathcal{T}^{A_1}$ dla dowolnego $k \geq 0$. Kowymiar A_1 jest równy k+1. Mamy 2 równania na $\mathcal{T}^{A_1}$:

$$W(-\mathbb{B}_k) = 0, \quad W(x - \mathbb{B}_k - \boxed{2x}) = R(x, \mathbb{B}_k + \boxed{2x})$$

Skoro mamy

$$S_{k+1}(-\mathbb{B}_k) = 0, \quad S_{k+1}(x - \mathbb{B}_k - \boxed{2x}) = R(x, \mathbb{B}_k + \boxed{2x}),$$

więc dla parametru k, mamy $\mathcal{T}^{A_1} = S_{k+1}$.

Wygodniejsza notacja:

$\eta(r) : (\mathbf{C}^{\bullet}, 0) \to (\mathbf{C}^{\bullet+r-1}, 0) \qquad \mathcal{T}_r^{\eta} =$ wiel. Thoma $\eta(r)$.

Osobliwości Morina $A_i(r)$.

Thom: $\mathcal{T}_r^{A_1} = S_r$.

Twierdzenie 2 *(Ronga 1972)* $\mathcal{T}_r^{A_2} = \sum_{j \le r} 2^j S_{r-j,r+j}$.

Dla $i = 1, 2$, $\mathcal{T}_r^{A_i}$ były policzone geometrycznie; dla większych i, potrzeba subtelniejszych metod algebry.

Definujemy:

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2}+\boxed{3}+\cdots+\boxed{i})S_{r-j_{i-1},\ldots,r-j_1,r+|J|}(-)\,,$$

gdzie suma jest po podziałach $J \subset (r^{i-1})$.

Przykłady: $\mathcal{T}_r^{A_1} = F_r^{(1)}$; $S_j(2) = 2^j$, więc $\mathcal{T}_r^{A_2} = F_r^{(2)}$.

Czy $\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r^{(3)}$?

Równania (od W) charakteryzujące $\mathcal{T}_r^{A_3}$ pochodzą od osobliwości A_0, A_1, A_2, i dla $r \ge 2$ od $III_{2,2}$:

$$W(-\mathbb{B}_{r-1}) = W(x - \mathbb{B}_{r-1} - \boxed{2x}) = W(x - \mathbb{B}_{r-1} - \boxed{3x}) = 0\,, \tag{1}$$

$$W(x - \mathbb{B}_{r-1} - \boxed{4x}) = R(x + \boxed{2x} + \boxed{3x}, \mathbb{B}_{r-1} + \boxed{4x}) \tag{2}$$

$$W(x_1 + x_2 - \mathbb{D} - \mathbb{B}_{r-2}) = 0\,. \tag{3}$$

gdzie

$$\mathbb{D} = \boxed{2x_1} + \boxed{2x_2} + \boxed{x_1 + x_2}\,.$$

$F_r^{(3)}$ spełnia (1) i (2). Zatem

$$F_1^{(3)} = S_{111} + 5S_{12} + 6S_3 = \mathcal{T}_1^{A_3}\,.$$

Ale dla $r \geq 2$, $F_r^{(3)}$ nie spełnia (3). Należy „poprawić" $F_r^{(3)}$ dodając kombinację liniową funkcji Schura tak by otrzymany wielomian spełniał (3) (oraz (1) i (2)). Dla $r = 2$, ta poprawka to $5S_{33}$, czyli $\mathcal{T}_2^{A_3} = F_2^{(3)} + 5S_{33}$.

Twierdzenie 3 *(A. Lascoux, PP)* $\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r^{(3)} + H_r$, *gdzie*

$$H_3 = 5S_{144} + 24S_{45}, \qquad H_4 = 5S_{255} + 24S_{156} + 24S_{66} + 89S_{57}, \ \ldots$$

$$\begin{aligned} H_7 = {} & 5S_{588} + 24S_{489} + 24S_{399} + 89S_{3,8,10} + 113S_{2,9,10} + 300S_{2,8,11} \\ & + 113S_{1,10,10} + 413S_{1,9,11} + 965S_{1,8,12} + 526S_{10,11} + 1378S_{9,12} \\ & + 3024S_{8,13}, \ \ldots \end{aligned}$$

(Berczi-Feher-Rimanyi zaanonsowali w 2003 r. inny wzór).

Twierdzenie 4 *(PP) Jeżeli dla każdego $x \in M$, jądro $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ jest wymiaru ≤ 1, to dla $i \geq 1$ oraz $r \geq 1$ mamy $\mathcal{T}_r^{A_i} = F_r^{(i)}$.*

Wyliczenie $\mathcal{T}_r^{A_i}$ w całej ogólności dla $i \geq 4$ jest problemem otwartym (to najbardziej „prestiżowy" problem w obliczeniach wielomianów Thoma; Feher-Rimanyi, Berczi-Szenes, Kazarian, Ozturk, ...)

Lata 80.: $\mathcal{T}_1^{A_4} =?$ Sprzeczne wyniki przy pomocy metod geometrycznych. Gaffney: $c_1^4 + 6c_1^2c_2 + 2c_2^2 + 9c_1c_3 + 6c_4$.

Nasze metody dają w prosty sposób: $\mathcal{T}_1^{A_4} = F_1^{(4)} + 10S_{22}$.

Osobliwość $I_{2,2}(r)$; jej kowymiar wynosi $3r+1$.

$\mathcal{T}_1^{I_{2,2}} = S_{22}$ (Porteous 1971). Załóżmy, że $r \geq 2$.

Metoda węgierska charakteryzuje $\mathcal{T}_r^{I_{2,2}}$ za pomocą następujacego układu równań (od W):

Osobliwości A_0, A_1, A_2 dają:

$$W(-\mathbb{B}_{r-1}) = W(x - \boxed{2x} - \mathbb{B}_{r-1}) = W(x - \boxed{3x} - \mathbb{B}_{r-1}) = 0\,,$$

Osobliwość $I_{2,2}$ daje:

$$W(x_1{+}x_2{-}\boxed{2x_1}{-}\boxed{2x_2}{-}\mathbb{B}_{r-1}) =$$

$$= x_1x_2(x_1{-}2x_2)(x_2{-}2x_1)\, R(x_1{+}x_2{+}\boxed{x_1{+}x_2}, \mathbb{B}_{r-1})\,.$$

Osobliwość $III_{2,2}$ daje:

$$W(x_1{+}x_2 - \mathbb{D} - \mathbb{B}_{r-2}) = 0\,.$$

Lemat 5 *(PP) Diagram Younga funkcji Schura występującej w rozwinięciu $\mathcal{T}_r^{I_{2,2}}$ zawiera $(r+1, r+1)$ i ma conajwyżej 3 części.*

Z mojej rozprawy habilitacyjnej, której zasadnicza część dotyczyła enumeratywnej geometrii rozmaitości wyznacznikowych (Ann. ENS 1988), wynika, że diagramy Younga funkcji Schura występujących w rozwinięciach wielomianów Thoma osobliwości muszą zawierać „dostatecznie duże” prostokąty. W tym wypadku: prostokąt $(r+1, r+1)$.

Rekurencyjny(!) opis $\mathcal{T}_r := \mathcal{T}_r^{I_{2,2}}$ (widać to *jedynie* w bazie funkcji Schura).

Endomorfizm liniowy Φ: $S_{i_1,i_2,i_3} \mapsto S_{i_1+1,i_2+1,i_3+1}$.

$\overline{\mathcal{T}_r}$: = suma składników „$\alpha_{ij}S_{ij}$" w rozwinięciu $\mathcal{T}_r$.

Algebra funkcji Schura pozwala dowieść:

Lemat 6 *(PP)* $\mathcal{T}_r = \overline{\mathcal{T}}_r + \Phi(\mathcal{T}_{r-1})$.

Stwierdzenie 7 *(PP)* $\overline{\mathcal{T}}_r(x_1,x_2) = (x_1x_2)^{r+1}\ S_{r-1}(\mathbb{D})$.

Okazuje się, że problem rozwinięcia $S_{r-1}(\mathbb{D})$ w funkcje Schura wystąpił już wcześniej: *zupełne kwadryki*: Schubert, Giambelli (wiek XIX), Laksov i inni (lata 80.); *liczby Cherna*: PP (Ann. ENS 1988).

Szukane rozwinięcie $S_{r-1}(\mathbb{D})$ to:

$$\sum_{p\leq q,\ p+q=r-1} \left[\binom{r}{p+1}+\binom{r}{p+2}+\cdots+\binom{r}{q+1}\right]\ S_{pq}(x_1+x_2)\,.$$

$$\overline{\mathcal{T}}_2 = 3S_{34}, \qquad \overline{\mathcal{T}}_3 = 7S_{46}+3S_{55},\ \text{etc.}$$

$$\mathcal{T}_2 = \Phi(\mathcal{T}_1)+\overline{\mathcal{T}}_2 = \Phi(S_{22})+3S_{34} = S_{133}+3S_{34}$$

$$\mathcal{T}_3 = \Phi(\mathcal{T}_2)+\overline{\mathcal{T}}_3 = \Phi(S_{133}+3S_{34})+\overline{\mathcal{T}}_3 = S_{244}+3S_{145}+7S_{46}+3S_{55}\,,$$

etc.

Otrzymujemy jawne (zależne od „r") wyrażenie $\sum \alpha_I S_I$ na $\mathcal{T}_r^{I_{2,2}}$ – rozw. problemu Rimanyi'ego w Inv. Math. (2001).

(Kazarian anonsuje inne, geometryczne podejście).

$I_{p,q}$: $\mathbf{C}[[x,y]]/(xy, x^p + y^q)$ $\qquad r = 1$

$I_{2,2}$: $c_2^2 - c_1c_3$

$I_{2,3}$: $2c_1c_2^2 - c_1^2c_3 + 2c_2c_3 - 2c_1c_4$

$I_{2,4}$:
$2c_1^2c_2^2 + c_2^3 - 2c_1^3c_3 + 2c_1c_2c_3 - 3c_3^3 - 5c_1^2c_4 + 9c_2c_4 - 6c_1c_5$

$I_{3,3}$: $c_1^2c_2^2 - c_2^3 - c_1^3c_3 + 3c_1c_2c_3 + 3c_3^2 - 2c_1^2c_4 - 3c_2c_4$

$I_{2,2}$: S_{22}

$I_{2,3}$: $4S_{23} + 2S_{122}$

$I_{2,4}$: $16S_{24} + 4S_{33} + 12S_{123} + 5S_{222} + 2S_{1122}$

$I_{3,3}$: $2S_{24} + 6S_{33} + 3S_{123} + S_{1122}$

CZYM RÓŻNIĄ SIĘ TE DWA RODZAJE ROZWINIĘĆ?

***

Hipoteza 8 *(Feher-Komuves, PP 2004) Ustalmy osobliwość η. Jeżeli*

$$\mathcal{T}_r^\eta = \sum \alpha_I S_I(T^*M - f^*T^*N)\,,$$

to $\alpha_I \geq 0$ dla każdego podziału I.

Tego typu rezultaty o *dodatniości* są obecnie przedmiotem sporego zainteresowania w geometrii algebraicznej – patrz monografia Lazarsfelda „Positivity in algebraic geometry”.

Twierdzenie 9 *(A. Weber, PP 2006, 07) Ustalmy osobliwość η (niekoniecznie stabilną). Jeżeli*

$$\mathcal{T}^\eta = \sum \alpha_{IJ} S_I(T^*M) \cdot S_J(f^*TN)\,,$$

to $\alpha_{IJ} \geq 0$ dla każdej pary podziałów I, J.

To jest mocniejsza wersja hipotezy o dodatniości (uogólniona na wielomiany Thoma stożków niezmienniczych względem produktów GL_n'ów).

Użyte metody opierają się na teorii Fultona-Lazarsfelda numerycznej dodatniości stożków w wiązkach generowanych przez przekroje globalne i wiązkach szerokich.

Wielomiany Thoma osobliwości Lagrange'a

Te „wielomiany Thoma" (Kazarian 2003) uogólniają *indeks Masłowa*: niech L będzie podrozmaitością Lagrange'a w przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$; klasa Masłowa jest reprezentowana przez $\{x \in L \ : \ \dim(T_xL \cap W^*) > 0\}$.

Dla tej sytuacji istnieje „naturalna" baza. W roku 1986 zauważyłem, że „rozmaitość Schuberta w Grassmannianie Lagrange'a jest $\widetilde{Q}$-funkcją." Wielomiany Thoma:

$A_2 : \widetilde{Q}_1, \qquad A_7 : 135\widetilde{Q}_{321} + 1275\widetilde{Q}_{42} + 2004\widetilde{Q}_{51} + 2520\widetilde{Q}_6,$

$D_6 : 12(\widetilde{Q}_{32} + 2\widetilde{Q}_{41}), \qquad E_7 : 9\widetilde{Q}_{321} + 60\widetilde{Q}_{42} + 24\widetilde{Q}_{51}.$

Twierdzenie 10 *(M. Mikosz, A. Weber i PP 2007) Wielomian Thoma osobliwości Lagrange'a jest nieujemną kombinacją $\widetilde{Q}$-funkcji $\widetilde{Q}_I(T^*L)$.*

Prace naszego zespołu o wielomianach Thoma:

PP, Thom polynomials and Schur functions I, math.AG/0509234

PP, Thom polynomials and Schur functions: the singularities $I_{2,2}(-)$, Ann. Inst. Fourier (2007).

PP, Thom polynomials and Schur functions: towards the singularities $A_i(-)$, w druku w: „Real and complex singularities - Sao Carlos 2006", Contemp. Math. AMS.

PP, A. Weber, Positivity of Schur function expansions of Thom polynomials, Fund. Math. (2007).

PP, A. Weber, Thom polynomials of invariant cones, Schur functions, and positivity, w: „Algebraic cycles, sheaves, shtukas, and moduli", Birkhauser 2008.

M. Mikosz, PP, A. Weber, Positivity of Thom polynomials II: the Lagrange singularities, preprint 2008.

A. Lascoux, PP, Thom polynomials and Schur functions: the singularities $A_3(-)$, w przygotowaniu.

***

O. Ozturk, On Thom polynomials for $A_4(-)$ via Schur functions, Serdica Math. J. (2007).

O. Ozturk, Thom polynomials and Schur functions: the singularities $III_{2,3}(-)$, preprint IM PAN 2008.