O dodatniości wielomianów Thoma

Kraków, 10.11.2011

Piotr Pragacz

pragacz@impan.pl

IM PAN Warszawa

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Ustalmy $n, e \in \mathbf{N}$. Niech $P(c_1, \ldots, c_e)$ będzie wielomianem stopnia n.

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Ustalmy $n, e \in \mathbf{N}$. Niech $P(c_1, \ldots, c_e)$ będzie wielomianem stopnia n.

Mówimy że P jest dodatni dla wiązek szerokich, gdy dla każdej n-wymiarowej rozmaitości rzutowej X

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Ustalmy $n, e \in \mathbf{N}$. Niech $P(c_1, \ldots, c_e)$ będzie wielomianem stopnia n.

Mówimy że P jest dodatni dla wiązek szerokich, gdy dla każdej n-wymiarowej rozmaitości rzutowej X
i każdej szerokiej wiązki of rangi e na X,
$\deg(P(c_1(E), \ldots, c_e(E)) > 0$.

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Ustalmy $n, e \in \mathbf{N}$. Niech $P(c_1, \ldots, c_e)$ będzie wielomianem stopnia n.

Mówimy że P jest dodatni dla wiązek szerokich, gdy dla każdej n-wymiarowej rozmaitości rzutowej X
i każdej szerokiej wiązki of rangi e na X,
$\deg(P(c_1(E), \ldots, c_e(E))) > 0$.

Rachunki Griffithsa: c_1, c_2, $c_1^2 - c_2$.

Pionierskie rezultaty o dodatniości

Program Griffithsa (1969): Znaleźć dodatnie wielomiany dla wiązek szerokich.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.

Ustalmy $n, e \in \mathbf{N}$. Niech $P(c_1, \ldots, c_e)$ będzie wielomianem stopnia n.

Mówimy że P jest dodatni dla wiązek szerokich, gdy dla każdej n-wymiarowej rozmaitości rzutowej X
i każdej szerokiej wiązki of rangi e na X,
$\deg(P(c_1(E), \ldots, c_e(E)) > 0$.

Rachunki Griffithsa: c_1, c_2, $c_1^2 - c_2$.

Pomyłka: sądzono, że $c_1^2 - 2c_2$ jest dodatni, ale nie jest.

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z "Hard Lefschetz Theorem".

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z "Hard Lefschetz Theorem".

Fulton-Lazarsfeld pokazali, że wielomian jest dodatni

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z "Hard Lefschetz Theorem".

Fulton-Lazarsfeld pokazali, że wielomian jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy jego rozwinięcie w bazie funkcji Schura jest dodatnie.

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z "Hard Lefschetz Theorem".

Fulton-Lazarsfeld pokazali, że wielomian jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy jego rozwinięcie w bazie funkcji Schura jest dodatnie.

$n = 3 \quad c_3, \quad c_2c_1 - c_3, \quad c_1^3 - 2c_2c_1 + c_3.$

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z "Hard Lefschetz Theorem".

Fulton-Lazarsfeld pokazali, że wielomian jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy jego rozwinięcie w bazie funkcji Schura jest dodatnie.

$n = 3 \quad c_3, \quad c_2c_1 - c_3, \quad c_1^3 - 2c_2c_1 + c_3.$

Dla wiązek globalnie generowanych, bliski rezultat był uzyskany przez Usui-Tango.

Kleiman: wielomiany, które są dodatnie dla wiązek wektorowych nad powierzchniami, są nieujemnymi kombinacjami c_2 i $c_1^2 - c_2$.

Bloch-Gieseker: c_n jest zawsze dodatnie; ważny związek z "Hard Lefschetz Theorem".

Fulton-Lazarsfeld pokazali, że wielomian jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy jego rozwinięcie w bazie funkcji Schura jest dodatnie.

$n = 3 \quad c_3, \quad c_2c_1 - c_3, \quad c_1^3 - 2c_2c_1 + c_3.$

Dla wiązek globalnie generowanych, bliski rezultat był uzyskany przez Usui-Tango.

Przez klasy cykli algebraicznych, będziemy rozumieli ich Poincaré dualne klasy w kohomologiach.

Wielomian Thoma

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}^m_0, \mathbf{C}^n_0)$.

Wielomian Thoma

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}^m_0, \mathbf{C}^n_0)$.

Wówczas istnieje uniwersalny wielomiam $\mathcal{T}^\Sigma$ nad $\mathbf{Z}$

Wielomian Thoma

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}_0^m, \mathbf{C}_0^n)$.

Wówczas istnieje uniwersalny wielomiam $\mathcal{T}^\Sigma$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n

Wielomian Thoma

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}_0^m, \mathbf{C}_0^n)$.

Wówczas istnieje uniwersalny wielomiam $\mathcal{T}^\Sigma$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n

taki że dla każdej pary rozmaitości M^m, N^n i ogólnego odwzorowania $f : M \to N$

Wielomian Thoma

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}_0^m, \mathbf{C}_0^n)$.

Wówczas istnieje uniwersalny wielomiam $\mathcal{T}^\Sigma$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n

taki że dla każdej pary rozmaitości M^m, N^n i ogólnego odwzorowania $f : M \to N$, klasa $\Sigma(f) = f_k^{-1}(\Sigma)$ jest równa

Wielomian Thoma

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}_0^m, \mathbf{C}_0^n)$.

Wówczas istnieje uniwersalny wielomiam $\mathcal{T}^\Sigma$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n

taki że dla każdej pary rozmaitości M^m, N^n i ogólnego odwzorowania $f : M \to N$, klasa $\Sigma(f) = f_k^{-1}(\Sigma)$ jest równa

$$\mathcal{T}^\Sigma(c_1(M), \ldots, c_m(M), f^*c_1(N), \ldots, f^*c_n(N)).$$

Wielomian Thoma

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}_0^m, \mathbf{C}_0^n)$.

Wówczas istnieje uniwersalny wielomiam $\mathcal{T}^\Sigma$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n

taki że dla każdej pary rozmaitości M^m, N^n i ogólnego odwzorowania $f : M \to N$, klasa $\Sigma(f) = f_k^{-1}(\Sigma)$ jest równa

$$\mathcal{T}^\Sigma(c_1(M), \ldots, c_m(M), f^*c_1(N), \ldots, f^*c_n(N)).$$

gdzie $f_k : M \to \mathcal{J}^k(M, N)$ jest k-dżetowym rozszerzeniem f.

Wielomian Thoma

Niech Σ będzie algebraicznym prawo-lewo niezmienniczym zbiorem w $\mathcal{J}^k(\mathbf{C}_0^m, \mathbf{C}_0^n)$.

Wówczas istnieje uniwersalny wielomiam $\mathcal{T}^\Sigma$ nad $\mathbf{Z}$

od $m+n$ zmiennych który zależy tylko od Σ, m i n

taki że dla każdej pary rozmaitości M^m, N^n i ogólnego odwzorowania $f : M \to N$, klasa $\Sigma(f) = f_k^{-1}(\Sigma)$ jest równa

$$\mathcal{T}^\Sigma(c_1(M), \ldots, c_m(M), f^*c_1(N), \ldots, f^*c_n(N)).$$

gdzie $f_k : M \to \mathcal{J}^k(M, N)$ jest k-dżetowym rozszerzeniem f.

Jeżeli klasa osobliwości Σ jest „stabilna" (np. domknięta ze względu na równoważność kontaktową), to $\mathcal{T}^\Sigma$ zależy od $c_i(TM - f^*TN)$.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^* c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia
Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia
Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna.
Dla $x \in M$, niech $e_x =$: liczba gałęzi f w x.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^* c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia
Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna.
Dla $x \in M$, niech $e_x =:$ liczba gałęzi f w x.
Wtedy dywizor rozgałęzienia f jest równy $\sum (e_x - 1)x$.

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^*c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia
Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna.
Dla $x \in M$, niech $e_x =$: liczba gałęzi f w x.
Wtedy dywizor rozgałęzienia f jest równy $\sum(e_x - 1)x$.
Twierdzenie Riemanna-Hurwitza orzeka:

$$\sum_{x \in M}(e_x - 1) = 2g(M) - 2 - \deg(f)\big(2g(N) - 2\big) = f^*c_1(N) - c_1(M).$$

Twierdzenie Riemanna-Hurwitza

Niech Σ będzie domknięciem prawo-lewej orbity osobliwości A_1, zadanej przez $z \mapsto z^2$.
Dla każdego odwzorowania krzywych $f : M \to N$, $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^* c_1(N))$ daje klasę domknięcia zbioru punktów M w których f ma osobliwość A_1.
Ale to domknięcie to zbiór wszystkich punktów krytycznych f - dywizor rozgałęzienia
Niech $f : M \to N$ będzie surjektywnym odwzorowaniem zwartych powierzchni Riemanna.
Dla $x \in M$, niech $e_x =:$ liczba gałęzi f w x.
Wtedy dywizor rozgałęzienia f jest równy $\sum(e_x - 1)x$.
Twierdzenie Riemanna-Hurwitza orzeka:

$$\sum_{x \in M}(e_x - 1) = 2g(M) - 2 - \deg(f)\big(2g(N) - 2\big) = f^* c_1(N) - c_1(M).$$

Zatem: $\mathcal{T}^{A_1}(c_1(M), f^* c_1(N)) = f^* c_1(N) - c_1(M)$.

Funkcje Schura

Alfabet $\mathbb{A}$: skończony zbiór zmiennych.

Funkcje Schura

Alfabet $\mathbb{A}$: skończony zbiór zmiennych.

Identyfikujemy alfabet $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ z sumą $a_1 + \cdots + a_m$.

Funkcje Schura

Alfabet $\mathbb{A}$: skończony zbiór zmiennych.

Identyfikujemy alfabet $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ z sumą $a_1 + \cdots + a_m$.

Weźmy inny alfabet $\mathbb{B}$.

$$\sum S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B}) z^i = \prod_{b \in \mathbb{B}} (1-bz) / \prod_{a \in \mathbb{A}} (1-az) \,.$$

Funkcje Schura

Alfabet $\mathbb{A}$: skończony zbiór zmiennych.

Identyfikujemy alfabet $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ z sumą $a_1 + \cdots + a_m$.

Weźmy inny alfabet $\mathbb{B}$.

$$\sum S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})z^i = \prod_{b\in\mathbb{B}}(1-bz) / \prod_{a\in\mathbb{A}}(1-az)\,.$$

Dla podziału $I = (0 \geq i_1 \geq \cdots \geq i_h \geq 0)$, definiujemy *funkcję Schura* $S_I(\mathbb{A}-\mathbb{B})$ jako

Funkcje Schura

Alfabet $\mathbb{A}$: skończony zbiór zmiennych.

Identyfikujemy alfabet $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ z sumą $a_1 + \cdots + a_m$.

Weźmy inny alfabet $\mathbb{B}$.

$$\sum S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B}) z^i = \prod_{b \in \mathbb{B}} (1-bz) / \prod_{a \in \mathbb{A}} (1-az) \,.$$

Dla podziału $I = (0 \geq i_1 \geq \cdots \geq i_h \geq 0)$, definiujemy *funkcję Schura* $S_I(\mathbb{A}-\mathbb{B})$ jako

$$S_I(\mathbb{A}-\mathbb{B}) := \left| S_{i_p - p + q}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) \right|_{1 \leq p,q \leq h} \,.$$

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Wzór faktoryzacyjny!

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Wzór faktoryzacyjny!

Dla wiązek wektorowych E, F, $S_I(E-F) := S_I(\mathbb{A} - \mathbb{B})$,

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Wzór faktoryzacyjny!

Dla wiązek wektorowych E, F, $S_I(E-F) := S_I(\mathbb{A} - \mathbb{B})$, dla $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ równych alfabetom pierwiastków Cherna E i F.

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}-\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Wzór faktoryzacyjny!

Dla wiązek wektorowych E, F, $S_I(E-F) := S_I(\mathbb{A} - \mathbb{B})$, dla $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ równych alfabetom pierwiastków Cherna E i F.

Giambelli: Klasa *rozmaitości Schuberta* w Grassmannianie

Np. pisząc $S_i = S_i(\mathbb{A}{-}\mathbb{B})$,

$$S_{44333}(\mathbb{A}{-}\mathbb{B}) = \begin{vmatrix} S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & 1 & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Wzór faktoryzacyjny!

Dla wiązek wektorowych E, F, $S_I(E{-}F) := S_I(\mathbb{A} - \mathbb{B})$, dla $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ równych alfabetom pierwiastków Cherna E i F.

Giambelli: Klasa *rozmaitości Schuberta* w Grassmannianie jest dana przez wielomian Schura od wiązki tautologicznej nad nim.

Osobliwości Morina $A_i(r)$. Definiujemy $F_r^{(1)}(-) = S_r(-)$ oraz dla $i \geq 2$,

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + \boxed{i})S_{r+|J|,r-j_{i-1},\ldots,r-j_1}(-)\,,$$

Osobliwości Morina $A_i(r)$. Definiujemy $F_r^{(1)}(-) = S_r(-)$ oraz dla $i \geq 2$,

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + \boxed{i}) S_{r+|J|, r-j_{i-1}, \ldots, r-j_1}(-)\,,$$

gdzie suma jest po podziałach $J \subset (r^{i-1})$.

Osobliwości Morina $A_i(r)$. Definiujemy $F_r^{(1)}(-) = S_r(-)$ oraz dla $i \geq 2$,

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + \boxed{i})S_{r+|J|,r-j_{i-1},\ldots,r-j_1}(-)\,,$$

gdzie suma jest po podziałach $J \subset (r^{i-1})$.

Twierdzenie. *$F_r^{(1)} = S_r$ and $F_r^{(2)} = \sum_{j \leq r} 2^j S_{r+j,r-j}$ są wielomianami Thoma osobliwości $A_1(r)$ oraz $A_2(r)$.*

Osobliwości Morina $A_i(r)$. Definiujemy $F_r^{(1)}(-) = S_r(-)$ oraz dla $i \geq 2$,

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + \boxed{i})S_{r+|J|,r-j_{i-1},\ldots,r-j_1}(-)\,,$$

gdzie suma jest po podziałach $J \subset (r^{i-1})$.

Twierdzenie. $F_r^{(1)} = S_r$ *and* $F_r^{(2)} = \sum_{j\leq r} 2^j S_{r+j,r-j}$ *są wielomianami Thoma osobliwości* $A_1(r)$ *oraz* $A_2(r)$.

– przeformuowane klasyczne wyniki Thoma oraz Rongi.

Osobliwości Morina $A_i(r)$. Definiujemy $F_r^{(1)}(-) = S_r(-)$ oraz dla $i \geq 2$,

$$F_r^{(i)}(-) := \sum_J S_J(\boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + \boxed{i}) S_{r+|J|, r-j_{i-1}, \ldots, r-j_1}(-)\,,$$

gdzie suma jest po podziałach $J \subset (r^{i-1})$.

Twierdzenie. *$F_r^{(1)} = S_r$ and $F_r^{(2)} = \sum_{j \leq r} 2^j S_{r+j, r-j}$ są wielomianami Thoma osobliwości $A_1(r)$ oraz $A_2(r)$.*

– przeformuowane klasyczne wyniki Thoma oraz Rongi.

Twierdzenie. *(PP) Przypuśćmy, że $\Sigma^j(f) = \emptyset$ dla $j \geq 2$. (To mówi, że nad $\Sigma^1(f)$, jądro $df : TM \to f^*TN$ jest wiązką liniową.) Wówczas dla każdego $r \geq 1$,*

$$\mathcal{T}_r^{A_i} = F_r^{(i)}\,.$$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3})S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3})S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$H_3 = 5S_{441} + 24S_{54}$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3})S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$H_3 = 5S_{441} + 24S_{54}$

...

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$H_3 = 5S_{441} + 24S_{54}$

...

$H_7 = 5S_{885} + 24S_{984} + 24S_{993} + 89S_{10,8,3} + 113S_{10,9,3} + 300S_{11,8,2} + 113S_{10,10,1} + 413S_{11,9,1} + 965S_{12,8,1} + 526S_{11,10} + 1378S_{12,9} + 3024S_{13,8}$

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1,j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$H_3 = 5S_{441} + 24S_{54}$

...

$H_7 = 5S_{885} + 24S_{984} + 24S_{993} + 89S_{10,8,3} + 113S_{10,9,3} + 300S_{11,8,2} + 113S_{10,10,1} + 413S_{11,9,1} + 965S_{12,8,1} + 526S_{11,10} + 1378S_{12,9} + 3024S_{13,8}$

...

$\mathcal{T}_r^{A_3} = F_r + H_r$ (A. Lascoux+PP)

$F_r := \sum_{r \geq j_1 \geq j_2} S_{(j_1, j_2)}(\boxed{2} + \boxed{3}) S_{(r+j_1+j_2, r-j_2, r-j_1)}$

$H_1 = 0$

$H_2 = 5S_{33}$

$H_3 = 5S_{441} + 24S_{54}$

...

$H_7 = 5S_{885} + 24S_{984} + 24S_{993} + 89S_{10,8,3} + 113S_{10,9,3} + 300S_{11,8,2} + 113S_{10,10,1} + 413S_{11,9,1} + 965S_{12,8,1} + 526S_{11,10} + 1378S_{12,9} + 3024S_{13,8}$

...

Rozwinięcia w bazie funkcji Schura $\mathcal{T}_r^{A_4}$ nie są znane (za wyjątkiem $r = 1, 2, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ – Özer Öztürk).

$I_{2,2}$: $c_2^2 - c_1 c_3$

$I_{2,3}$: $2c_1 c_2^2 - c_1^2 c_3 + 2c_2 c_3 - 2c_1 c_4$

$I_{2,4}$: $2c_1^2 c_2^2 + c_2^3 - 2c_1^3 c_3 + 2c_1 c_2 c_3 - 3c_3^3 - 5c_1^2 c_4 + 9c_2 c_4 - 6c_1 c_5$

$I_{3,3}$: $c_1^2 c_2^2 - c_2^3 - c_1^3 c_3 + 3c_1 c_2 c_3 + 3c_3^2 - 2c_1^2 c_4 - 3c_2 c_4$

$I_{2,2}$: $c_2^2 - c_1 c_3$
$I_{2,3}$: $2c_1 c_2^2 - c_1^2 c_3 + 2c_2 c_3 - 2c_1 c_4$
$I_{2,4}$: $2c_1^2 c_2^2 + c_2^3 - 2c_1^3 c_3 + 2c_1 c_2 c_3 - 3c_3^3 - 5c_1^2 c_4 + 9c_2 c_4 - 6c_1 c_5$
$I_{3,3}$: $c_1^2 c_2^2 - c_2^3 - c_1^3 c_3 + 3c_1 c_2 c_3 + 3c_3^2 - 2c_1^2 c_4 - 3c_2 c_4$

$I_{2,2}$: S_{22}
$I_{2,3}$: $4S_{32} + 2S_{221}$
$I_{2,4}$: $16S_{42} + 4S_{33} + 12S_{321} + 5S_{222} + 2S_{2211}$
$I_{3,3}$: $2S_{42} + 6S_{33} + 3S_{321} + S_{2211}$

Twierdzenie. *(PP+A.Weber, 2006) Niech Σ będzie nietrywialną, stabilną klasą osobliwości. Wtedy dla dowolnego podziału I, współczynnik α_I w*

$$\mathcal{T}^{\Sigma} = \sum \alpha_I S_I(T^*M - f^*T^*N)\,,$$

jest nieujemny i $\sum \alpha_I > 0$.

Twierdzenie. *(PP+A.Weber, 2006) Niech* Σ *będzie nietrywialną, stabilną klasą osobliwości. Wtedy dla dowolnego podziału* I*, współczynnik* α_I *w*

$$\mathcal{T}^{\Sigma} = \sum \alpha_I S_I(T^*M - f^*T^*N)\,,$$

jest nieujemny i $\sum \alpha_I > 0$*.*

– dla osobliwości Thom-Boardman była to hipoteza Fehera i Komuvesa (2004), którzy wyliczyli Schurowskie rozwinięcie wielomianu Thoma dla $\Sigma^{i,j} : M^m \to N^{m-i+1}$.

Twierdzenie. *(PP+A.Weber, 2006) Niech* Σ *będzie nietrywialną, stabilną klasą osobliwości. Wtedy dla dowolnego podziału* I*, współczynnik* α_I *w*

$$\mathcal{T}^{\Sigma} = \sum \alpha_I S_I(T^*M - f^*T^*N)\,,$$

jest nieujemny i $\sum \alpha_I > 0$*.*

– dla osobliwości Thom-Boardman była to hipoteza Fehera i Komuvesa (2004), którzy wyliczyli Schurowskie rozwinięcie wielomianu Thoma dla $\Sigma^{i,j} : M^m \to N^{m-i+1}$.

Dla dowolnej klasy osobliwości Σ, współczynniki w

$$\mathcal{T}^{\Sigma} = \sum \alpha_{I,J} S_I(T^*M) S_J(f^*TN)$$

są nieujemne.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w wiązce tautologicznej Q, nie tracimy żadnego składnika Schura.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w wiązce tautologicznej Q, nie tracimy żadnego składnika Schura.
Identyfikujmy – za pośrednictwem wzoru Giambelli'ego – wielomian Schura od Q z cyklem Schuberta na Grassmannianie.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w wiązce tautologicznej Q, nie tracimy żadnego składnika Schura.
Identyfikujmy – za pośrednictwem wzoru Giambelli'ego – wielomian Schura od Q z cyklem Schuberta na Grassmannianie.
Aby wytestować współczynnik, przetnijmy $[\Sigma]$ z odpowiednim $dualnym$ cyklem Schuberta.

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura.
Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, że specjalizując $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w wiązce tautologicznej Q, nie tracimy żadnego składnika Schura.
Identyfikujmy – za pośrednictwem wzoru Giambelli'ego – wielomian Schura od Q z cyklem Schuberta na Grassmannianie.
Aby wytestować współczynnik, przetnijmy $[\Sigma]$ z odpowiednim $dualnym$ cyklem Schuberta.
Używając twierdzenia Bertini-Kleimana, przesuwamy cykle w położenie ogólne, i sprowadzamy

Szkic dowodu przy pomocy twierdzenia Bertiniego:

Przy pomocy odwzorowania Veronese, realizujemy wszystkie klasy osobliwości w dostatecznie dużych Grassmannianach. Ustalmy klasę osobliwości Σ i przedstawmy $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w bazie funkcji Schura. Weźmy dostatecznie duży Grassmannian zawierający Σ i taki, ze specjalizując $\mathcal{T}^{\Sigma}$ w wiązce tautologicznej Q, nie tracimy żadnego składnika Schura. Identyfikujmy – za pośrednictwem wzoru Giambelli'ego – wielomian Schura od Q z cyklem Schuberta na Grassmannianie. Aby wytestować współczynnik, przetnijmy $[\Sigma]$ z odpowiednim $dualnym$ cyklem Schuberta. Używając twierdzenia Bertini-Kleimana, przesuwamy cykle w położenie ogólne, i sprowadzamy problem do przecięcia teorio-mnogościowego, które jest nieujemne.

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, $klasa$ $Masłova$ jest reprezentowana przez cykl

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, *klasa Masłova* jest reprezentowana przez cykl

$$\Sigma = \{x \in L \ : \ \dim(T_x L \cap W^*) > 0\}.$$

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, *klasa Masłova* jest reprezentowana przez cykl

$$\Sigma = \{x \in L \;:\; \dim(T_x L \cap W^*) > 0\}.$$

Jest to zbiór osoblwości rzutowania $L \to W$. Jego klasa kohomologii jest całkowita, i mod 2 jest równa $w_1(T^* L)$.

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, $klasa$ $Masłova$ jest reprezentowana przez cykl

$$\Sigma = \{x \in L \ : \ \dim(T_x L \cap W^*) > 0\}.$$

Jest to zbiór osoblwości rzutowania $L \to W$. Jego klasa kohomologii jest całkowita, i mod 2 jest równa $w_1(T^*L)$.

Ustalmy liczbę całkowitą $k >> 0$ i identifikujmy dwa kiełki Lagranżowskich podrozmaitości jeśli stopień ich styczności w 0 jest większy niz k.

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, $klasa$ $Masłova$ jest reprezentowana przez cykl

$$\Sigma = \{x \in L \ : \ \dim(T_x L \cap W^*) > 0\}.$$

Jest to zbiór osoblwości rzutowania $L \to W$. Jego klasa kohomologii jest całkowita, i mod 2 jest równa $w_1(T^*L)$.

Ustalmy liczbę całkowitą $k >> 0$ i identifikujmy dwa kiełki Lagranżowskich podrozmaitości jeśli stopień ich styczności w 0 jest większy niz k.
Otrzymujemy przestrzeń k-dżetów podrozmaitości Lagranżowskich $\mathcal{J}^k(V)$.

Lagranżowskie wielomiany Thoma

Niech L będzie Lagranżowską podrozmaitoscią w liniowej przestrzeni symplektycznej $V = W \oplus W^*$ wyposażonej w standardową formę symplektyczną.
Klasycznie, w rzeczywistej geometrii symplektycznej, $klasa$ $Masłova$ jest reprezentowana przez cykl

$$\Sigma = \{x \in L \ : \ \dim(T_x L \cap W^*) > 0\}.$$

Jest to zbiór osoblwości rzutowania $L \to W$. Jego klasa kohomologii jest całkowita, i mod 2 jest równa $w_1(T^*L)$.
Ustalmy liczbę całkowitą $k >> 0$ i identifikujmy dwa kiełki Lagranżowskich podrozmaitości jeśli stopień ich styczności w 0 jest większy niz k.
Otrzymujemy przestrzeń k-dżetów podrozmaitości Lagranżowskich $\mathcal{J}^k(V)$.
Każdy kiełek Lagranżowskiej podrozmaitości w V jest obrazem W via pewien kiełek symplektomorfizmu.

$$\mathcal{J}^k(V) = \mathrm{Aut}(V)/P\,,$$

gdzie $\mathrm{Aut}(V)$ jest *groupą k-dżetów symplektomorfizmów*, a P jest stabilizatorem W.

$$\mathcal{J}^k(V) = \mathrm{Aut}(V)/P\,,$$

gdzie $\mathrm{Aut}(V)$ jest *groupą k-dżetów symplektomorfizmów*, a P jest stabilizatorem W.
Oczywiście, Grassmannian Lagranżowski $LG(V)$ jest zawarty w $\mathcal{J}^k(V)$.

$$\mathcal{J}^k(V) = \mathrm{Aut}(V)/P\,,$$

gdzie $\mathrm{Aut}(V)$ jest *groupą k-dżetów symplektomorfizmów*, a P jest stabilizatorem W.
Oczywiście, Grassmannian Lagranżowski $LG(V)$ jest zawarty w $\mathcal{J}^k(V)$.

Mamy też rzutowanie $\mathcal{J}^k(V) \to LG(V)$ takie, że $L \mapsto T_0L$ (ale to nie jest wiązka wektorowa dla $k \geq 3$).

$$\mathcal{J}^k(V) = \mathrm{Aut}(V)/P\,,$$

gdzie $\mathrm{Aut}(V)$ jest *groupą k-dżetów symplektomorfizmów*, a P jest stabilizatorem W.
Oczywiście, Grassmannian Lagranżowski $LG(V)$ jest zawarty w $\mathcal{J}^k(V)$.

Mamy też rzutowanie $\mathcal{J}^k(V) \to LG(V)$ takie, że $L \mapsto T_0 L$ (ale to nie jest wiązka wektorowa dla $k \geq 3$).

Niech H będzie podgrupą $\mathrm{Aut}(V)$ skladającą się z holomorficznych symplektomorfizmów zachowujących rzut $V \to W$. Lagranżowskie dżety są Lagranżowsko równoważne gdy należą one do tej samej orbity H.

$$\mathcal{J}^k(V) = \mathrm{Aut}(V)/P\,,$$

gdzie $\mathrm{Aut}(V)$ jest *groupą k-dżetów symplektomorfizmów*, a P jest stabilizatorem W.
Oczywiście, Grassmannian Lagranżowski $LG(V)$ jest zawarty w $\mathcal{J}^k(V)$.

Mamy też rzutowanie $\mathcal{J}^k(V) \to LG(V)$ takie, że $L \mapsto T_0L$ (ale to nie jest wiązka wektorowa dla $k \geq 3$).

Niech H będzie podgrupą $\mathrm{Aut}(V)$ skladającą się z holomorficznych symplektomorfizmów zachowujących rzut $V \to W$. Lagranżowskie dżety są Lagranżowsko równoważne gdy należą one do tej samej orbity H.

Lagranżowska klasa osobliwości to czystowymiarowy algebraiczny zbiór w $\mathcal{J}^k(V)$ który jest niezmienniczy ze względu na działanie H.

Dla alfabetu $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, definiujemy $\widetilde{Q}_i(\mathbb{X}) = e_i(\mathbb{X})$ - elementarna symmetryczna funkcja od $\mathbb{X}$ stopnia i.

Dla alfabetu $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, definiujemy $\widetilde{Q}_i(\mathbb{X}) = e_i(\mathbb{X})$ - elementarna symmetryczna funkcja od $\mathbb{X}$ stopnia i.
Dla $i \geq j$, definiujemy

$$\widetilde{Q}_{i,j}(\mathbb{X}) = \widetilde{Q}_i(\mathbb{X})\widetilde{Q}_j(\mathbb{X}) + 2\sum_{p=1}^{j}(-1)^p\widetilde{Q}_{i+p}(\mathbb{X})\widetilde{Q}_{j-p}(\mathbb{X})\,.$$

Dla alfabetu $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, definiujemy $\widetilde{Q}_i(\mathbb{X}) = e_i(\mathbb{X})$ - elementarna symmetryczna funkcja od $\mathbb{X}$ stopnia i.
Dla $i \geq j$, definiujemy

$$\widetilde{Q}_{i,j}(\mathbb{X}) = \widetilde{Q}_i(\mathbb{X})\widetilde{Q}_j(\mathbb{X}) + 2\sum_{p=1}^{j}(-1)^p \widetilde{Q}_{i+p}(\mathbb{X})\widetilde{Q}_{j-p}(\mathbb{X}) \,.$$

Dla podziału $I = (i_1 \geq \cdots \geq i_h \geq 0)$, gdzie możemy założyć, że h jest parzyste, definiujemy

$$\widetilde{Q}_I(\mathbb{X}) = \mathsf{Pfaffian}(\widetilde{Q}_{i_p,i_q}(\mathbb{X})) \,.$$

Dla alfabetu $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, definiujemy $\widetilde{Q}_i(\mathbb{X}) = e_i(\mathbb{X})$ - elementarna symmetryczna funkcja od $\mathbb{X}$ stopnia i.
Dla $i \geq j$, definiujemy

$$\widetilde{Q}_{i,j}(\mathbb{X}) = \widetilde{Q}_i(\mathbb{X})\widetilde{Q}_j(\mathbb{X}) + 2\sum_{p=1}^{j}(-1)^p\widetilde{Q}_{i+p}(\mathbb{X})\widetilde{Q}_{j-p}(\mathbb{X})\,.$$

Dla podziału $I = (i_1 \geq \cdots \geq i_h \geq 0)$, gdzie możemy założyć, że h jest parzyste, definiujemy

$$\widetilde{Q}_I(\mathbb{X}) = \mathsf{Pfaffian}(\widetilde{Q}_{i_p,i_q}(\mathbb{X}))\,.$$

$\rho := (n, n-1, \ldots, 1)$

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.
Identyfikujemy $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ z pierścieniem funkcji symetrycznych od $\mathbb{X}$.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.
Identyfikujemy $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ z pierścieniem funkcji symetrycznych od $\mathbb{X}$.
Dla podziału I, oznaczamy przez $\widetilde{Q}_I \in \mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ wielomian odpowiadający $\widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$. Dla wiązki wektorowej E, kładziemy $\widetilde{Q}_I(E) := \widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$, gdzie $\mathbb{X}$ są pierwiastkami Cherna E.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$. Identyfikujemy $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ z pierścieniem funkcji symetrycznych od $\mathbb{X}$.

Dla podziału I, oznaczamy przez $\widetilde{Q}_I \in \mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ wielomian odpowiadający $\widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$. Dla wiązki wektorowej E, kładziemy $\widetilde{Q}_I(E) := \widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$, gdzie $\mathbb{X}$ są pierwiastkami Cherna E.

Przypuśćmy, że dana jest flaga $V_\bullet : \ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset V$ podprzestrzeni izotropowych, gdzie $\dim\ V_i = i$.

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.
Identyfikujemy $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ z pierścieniem funkcji symetrycznych od $\mathbb{X}$.
Dla podziału I, oznaczamy przez $\widetilde{Q}_I \in \mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ wielomian odpowiadający $\widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$. Dla wiązki wektorowej E, kładziemy $\widetilde{Q}_I(E) := \widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$, gdzie $\mathbb{X}$ są pierwiastkami Cherna E.

Przypuśćmy, że dana jest flaga $V_\bullet :\ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset V$ podprzestrzeni izotropowych, gdzie $\dim\ V_i = i$.
Dla ostrego podziału $I \subset \rho$, tzn. $I = (n \geq i_1 > \cdots > i_h > 0)$, definujemy

$$\Omega_I(V_\bullet) = \{L \in LG(V) :\ \dim\big(L \cap V_{n+1-i_p}\big) \geq p,\ p = 1, \ldots, h\}.$$

Niech $c_1, c_2, \ldots$ będą zmiennymi oraz $\deg(c_i) = i$.
Identyfikujemy $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ z pierścieniem funkcji symetrycznych od $\mathbb{X}$.
Dla podziału I, oznaczamy przez $\widetilde{Q}_I \in \mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$ wielomian odpowiadający $\widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$. Dla wiązki wektorowej E, kładziemy $\widetilde{Q}_I(E) := \widetilde{Q}_I(\mathbb{X})$, gdzie $\mathbb{X}$ są pierwiastkami Cherna E.

Przypuśćmy, że dana jest flaga $V_\bullet : \ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset V$ podprzestrzeni izotropowych, gdzie $\dim\ V_i = i$.
Dla ostrego podziału $I \subset \rho$, tzn. $I = (n \geq i_1 > \cdots > i_h > 0)$, definiujemy

$$\Omega_I(V_\bullet) = \{L \in LG(V) : \ \dim\bigl(L \cap V_{n+1-i_p}\bigr) \geq p, \ p = 1, \ldots, h\}.$$

Twierdzenie. *(PP, 1986)* $\Omega_I = \widetilde{Q}_I(R^*)$, *gdzie* R *jest podwiązką tautologiczną nad* $LG(V)$.

Lagranżowska klasa osobliwości $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(V)$ definiuje klasę kohomologii

$$[\Sigma] \in H^*(\mathcal{J}^k(V), \mathbf{Z}) \cong H^*(LG(V), \mathbf{Z}) .$$

Lagranżowska klasa osobliwości $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(V)$ definiuje klasę kohomologii

$$[\Sigma] \in H^*(\mathcal{J}^k(V), \mathbf{Z}) \cong H^*(LG(V), \mathbf{Z}) \, .$$

Przypuśćmy, że ta klasa jest rowna $\sum_I \alpha_I \, \widetilde{Q}_I(R^*)$, gdzie suma jest po ostrych podziałach $I \subset \rho$ i $\alpha_I \in \mathbf{Z}$ (jest ważne że używamy wiązki R^*).

Lagranżowska klasa osobliwości $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(V)$ definiuje klasę kohomologii

$$[\Sigma] \in H^*(\mathcal{J}^k(V), \mathbf{Z}) \cong H^*(LG(V), \mathbf{Z})\,.$$

Przypuśćmy, że ta klasa jest rowna $\sum_I \alpha_I \widetilde{Q}_I(R^*)$, gdzie suma jest po ostrych podziałach $I \subset \rho$ i $\alpha_I \in \mathbf{Z}$ (jest ważne że używamy wiązki R^*).

Wówczas $\mathcal{T}^\Sigma := \sum_I \alpha_I \widetilde{Q}_I$ jest *wielomianem Thoma* stowarzyszonym z Lagranżowską klasą osobliwości Σ.

Lagranżowska klasa osobliwości $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(V)$ definiuje klasę kohomologii

$$[\Sigma] \in H^*(\mathcal{J}^k(V), \mathbf{Z}) \cong H^*(LG(V), \mathbf{Z})\,.$$

Przypuśćmy, że ta klasa jest rowna $\sum_I \alpha_I \widetilde{Q}_I(R^*)$, gdzie suma jest po ostrych podziałach $I \subset \rho$ i $\alpha_I \in \mathbf{Z}$ (jest ważne że używamy wiązki R^*).

Wówczas $\mathcal{T}^\Sigma := \sum_I \alpha_I \widetilde{Q}_I$ jest *wielomianem Thoma* stowarzyszonym z Lagranżowską klasą osobliwości Σ.

Twierdzenie. *(M.Mikosz+PP+A.Weber, 2007) Dla każdej Lagranżowskiej klasy osobliwości Σ, jej wielomian Thoma $\mathcal{T}^\Sigma$ jest nieujemną kombinacją $\widetilde{Q}$-funcji.*

Niech $i : G = LG(V) \hookrightarrow \mathcal{J}$ oznacza włożenie.

Niech $i : G = LG(V) \hookrightarrow \mathcal{J}$ oznacza włożenie.

Interesują nas współczynniki w $i^*[\Sigma] = \sum \alpha_I \, \widetilde{Q}_I(R^*)\,.$

Niech $i : G = LG(V) \hookrightarrow \mathcal{J}$ oznacza włożenie.

Interesują nas współczynniki w $i^*[\Sigma] = \sum \alpha_I \, \widetilde{Q}_I(R^*)$.

Lemat. *Dla ostrego podziału $I \subset \rho$, istnieje dokładnie jeden ostry podział $I' \subset \rho$ wagi $|I'| = \dim LG(V) - |I|$, dla którego $\widetilde{Q}_I(R^*) \cdot \Omega_{I'} \neq 0$. ($I'$ uzupełnia I in ρ).*

Niech $i : G = LG(V) \hookrightarrow \mathcal{J}$ oznacza włożenie.

Interesują nas współczynniki w $i^*[\Sigma] = \sum \alpha_I \, \widetilde{Q}_I(R^*)$.

Lemat. *Dla ostrego podziału $I \subset \rho$, istnieje dokładnie jeden ostry podział $I' \subset \rho$ wagi $|I'| = \dim LG(V) - |I|$, dla którego $\widetilde{Q}_I(R^*) \cdot \Omega_{I'} \neq 0$. ($I'$ uzupełnia I in ρ).*

Mamy więc: $\alpha_I = i^*[\Sigma] \cdot \Omega_{I'}$.

Niech $i : G = LG(V) \hookrightarrow \mathcal{J}$ oznacza włożenie.
Interesują nas współczynniki w $i^*[\Sigma] = \sum \alpha_I \, \widetilde{Q}_I(R^*)$.
Lemat. *Dla ostrego podziału $I \subset \rho$, istnieje dokładnie jeden ostry podział $I' \subset \rho$ wagi $|I'| = \dim LG(V) - |I|$, dla którego $\widetilde{Q}_I(R^*) \cdot \Omega_{I'} \neq 0$. ($I'$ uzupełnia I in ρ).*

Mamy więc: $\alpha_I = i^*[\Sigma] \cdot \Omega_{I'}$.
Niech

$$C = C_{G \cap \Sigma} \Sigma \subset N_G \mathcal{J}$$

oznacza *stożek normalny* $G \cap \Sigma$ w Σ. Niech $j : G \hookrightarrow N_G \mathcal{J}$ będzie przekrojem zerowym.

Niech $i : G = LG(V) \hookrightarrow \mathcal{J}$ oznacza włożenie.
Interesują nas współczynniki w $i^*[\Sigma] = \sum \alpha_I \, \widetilde{Q}_I(R^*)\,.$
Lemat. *Dla ostrego podziału $I \subset \rho$, istnieje dokładnie jeden ostry podział $I' \subset \rho$ wagi $|I'| = \dim LG(V) - |I|$, dla którego $\widetilde{Q}_I(R^*) \cdot \Omega_{I'} \neq 0$. ($I'$ uzupełnia I in ρ).*

Mamy więc: $\alpha_I = i^*[\Sigma] \cdot \Omega_{I'}$.
Niech

$$C = C_{G\cap\Sigma}\Sigma \subset N_G\mathcal{J}$$

oznacza *stożek normalny* $G \cap \Sigma$ w Σ. Niech $j : G \hookrightarrow N_G\mathcal{J}$ będzie przekrojem zerowym.
Dzięki deformacji do stożka normalnego, mamy w A_*G następującą równość

$$i^*[\Sigma] = j^*[C]\,.$$

Zatem

$$\alpha_I = [C] \cdot \Omega_{I'}$$

(przecięcie w $N_G\mathcal{J}$).

Zatem

$$\alpha_I = [C] \cdot \Omega_{I'}$$

(przecięcie w $N_G \mathcal{J}$).

Stwierdzenie. *Niech* $\pi : E \to X$ *będzie globalnie generowaną wiązka wektorową na zwartej rozmaitości jednorodnej* X*. Niech* C *będzie stożkiem w* E*, i niech* Z *będzie dowolnym cyklem w* X *dopelniającego wymiaru. Wówczas przecięcie* $[C] \cdot [Z]$ *jest nieujemne.*

Zatem

$$\alpha_I = [C] \cdot \Omega_{I'}$$

(przecięcie w $N_G \mathcal{J}$).

Stwierdzenie. *Niech $\pi : E \to X$ będzie globalnie generowaną wiązka wektorową na zwartej rozmaitości jednorodnej X. Niech C będzie stożkiem w E, i niech Z będzie dowolnym cyklem w X dopelniającego wymiaru. Wówczas przecięcie $[C] \cdot [Z]$ jest nieujemne.*

Weźmy $X = G$

Zatem

$$\alpha_I = [C] \cdot \Omega_{I'}$$

(przecięcie w $N_G\mathcal{J}$).

Stwierdzenie. *Niech $\pi : E \to X$ będzie globalnie generowaną wiązka wektorową na zwartej rozmaitości jednorodnej X. Niech C będzie stożkiem w E, i niech Z będzie dowolnym cyklem w X dopelniającego wymiaru. Wówczas przecięcie $[C] \cdot [Z]$ jest nieujemne.*

Weźmy $X = G$

Weźmy $E = N_G\mathcal{J} \cong \bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(R^*)$ jest g.g.

Zatem

$$\alpha_I = [C] \cdot \Omega_{I'}$$

(przecięcie w $N_G\mathcal{J}$).

Stwierdzenie. *Niech $\pi : E \to X$ będzie globalnie generowaną wiązka wektorową na zwartej rozmaitości jednorodnej X. Niech C będzie stożkiem w E, i niech Z będzie dowolnym cyklem w X dopelniającego wymiaru. Wówczas przecięcie $[C] \cdot [Z]$ jest nieujemne.*

Weźmy $X = G$

Weźmy $E = N_G\mathcal{J} \cong \bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(R^*)$ jest g.g.

Weźmy $Z = \Omega_{I'}$.

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).
Standarowa przestrzeń symplektyczna $\quad V := W \oplus (W^* \otimes \xi)$.

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).
Standarowa przestrzeń symplektyczna $\quad V := W \oplus (W^* \otimes \xi)$.
wyposażona w skreconą formę symplektyczną $\omega \in \Lambda^2 V^* \otimes \xi$.
Mamy podrozmaitości Lagranżowskie (kiełki przez 0).

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).
Standarowa przestrzeń symplektyczna $V := W \oplus (W^* \otimes \xi)$.
wyposażona w skreconą formę symplektyczną $\omega \in \Lambda^2 V^* \otimes \xi$.
Mamy podrozmaitości Lagranżowskie (kiełki przez 0).
Standardowa *przestrzeń kontaktowa* wyposażona w *formę kontaktową* α,

$$V \oplus \xi = W \oplus (W^* \otimes \xi) \oplus \xi \,.$$

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).
Standarowa przestrzeń symplektyczna $V := W \oplus (W^* \otimes \xi)$.
wyposażona w skreconą formę symplektyczną $\omega \in \Lambda^2 V^* \otimes \xi$.
Mamy podrozmaitości Lagranżowskie (kiełki przez 0).
Standardowa *przestrzeń kontaktowa* wyposażona w *formę kontaktową* α,

$$V \oplus \xi = W \oplus (W^* \otimes \xi) \oplus \xi \,.$$

Podrozmaitości Leżandrowskie $V \oplus \xi$ to rozmaitości wymiaru n, których przestrzenie styczne są zawarte w $\mathrm{Ker}(\alpha)$.

Trochę geometrii Leżandrowskiej

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$. Niech W (odp. ξ) będą przestrzeniami wektorowymi wymiaru n (odp. 1).
Standarowa przestrzeń symplektyczna $\quad V := W \oplus (W^* \otimes \xi)$.
wyposażona w skreconą formę symplektyczną $\omega \in \Lambda^2 V^* \otimes \xi$.
Mamy podrozmaitości Lagranżowskie (kiełki przez 0).
Standardowa *przestrzeń kontaktowa* wyposażona w *formę kontaktową* α,

$$V \oplus \xi = W \oplus (W^* \otimes \xi) \oplus \xi \,.$$

Podrozmaitości Leżandrowskie $V \oplus \xi$ to rozmaitości wymiaru n, których przestrzenie styczne są zawarte w $\mathrm{Ker}(\alpha)$.

Każda Leżandrowska podrozmaitość w $V \oplus \xi$ jest wyznaczona przez swój Lagranżowski rzut do V oraz każda Lagranżowska podrozmaitość w V podnosi się do podrozmaitości Leżandrowskiej w $V \oplus \xi$.

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich
i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje.

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje. Dwie podrozmaitości Lagranżowskie, gdy są w położeniu ogólnym, to przecinają się transwersalnie. Osobliwe relatywne pozycje mogą być podzielone na Leżandrowskie klasy osobliwości.

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje.
Dwie podrozmaitości Lagranżowskie, gdy są w położeniu ogólnym, to przecinają się transwersalnie. Osobliwe relatywne pozycje mogą być podzielone na Leżandrowskie klasy osobliwości.
Grupa symplektomorfizmów V działa na zbiorze par podrozmaitości Lagranżowskich.

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje.
Dwie podrozmaitości Lagranżowskie, gdy są w położeniu ogólnym, to przecinają się transwersalnie. Osobliwe relatywne pozycje mogą być podzielone na Leżandrowskie klasy osobliwości.
Grupa symplektomorfizmów V działa na zbiorze par podrozmaitości Lagranżowskich.

Lemat. *Każda para podrozmaitości Lagranżowskich jest równoważna parze* (L_1, L_2) *takiej, że* L_1 *jest podprzestrzenią liniową oraz* $T_0 L_2 = W$.

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje.
Dwie podrozmaitości Lagranżowskie, gdy są w położeniu ogólnym, to przecinają się transwersalnie. Osobliwe relatywne pozycje mogą być podzielone na Leżandrowskie klasy osobliwości.
Grupa symplektomorfizmów V działa na zbiorze par podrozmaitości Lagranżowskich.

Lemat. *Każda para podrozmaitości Lagranżowskich jest równoważna parze* (L_1, L_2) *takiej, że* L_1 *jest podprzestrzenią liniową oraz* $T_0 L_2 = W$.

Dostajemy 2 typy podrozmaitosci Lagranżowskich:
podprzestrzenie liniowe,

Będziemy pracować z parami podrozmaitości Lagranżowskich i starali się klasyfikować ich możliwe relatywne pozycje.
Dwie podrozmaitości Lagranżowskie, gdy są w położeniu ogólnym, to przecinają się transwersalnie. Osobliwe relatywne pozycje mogą być podzielone na Leżandrowskie klasy osobliwości.
Grupa symplektomorfizmów V działa na zbiorze par podrozmaitości Lagranżowskich.

Lemat. *Każda para podrozmaitości Lagranżowskich jest równoważna parze* (L_1, L_2) *takiej, że* L_1 *jest podprzestrzenią liniową oraz* $T_0 L_2 = W$.

Dostajemy 2 typy podrozmaitosci Lagranżowskich:
podprzestrzenie liniowe,
podrozmaitości, których przestrzeń styczna w 0 *jest równa* W; są one wykresami różniczek funkcji $f : W \to \xi$ takimi że $df(0) = 0$ and $d^2 f(0) = 0$.

Niech $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0 L_2 = W$.

Niech $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0 L_2 = W$.

Niech $\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$ będzie rzutowaniem.

Niech $\mathcal{J}^k(W, \xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0 L_2 = W$.

Niech $\pi : \mathcal{J}^k(W, \xi) \to LG(V, \omega)$ będzie rzutowaniem. Jest to trywialna wiązka wektorowa z włóknem $\bigoplus_{i=3}^{k+1} \operatorname{Sym}^i(W^*) \otimes \xi$.

Niech $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0 L_2 = W$.

Niech $\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$ będzie rzutowaniem. Jest to trywialna wiązka wektorowa z włóknem $\bigoplus_{i=3}^{k+1} \operatorname{Sym}^i(W^*) \otimes \xi$.

Interesuje nas większa grupa niż grupa symplektomorfizmów, grupa automorizmów kontaktowych $V \oplus \xi$.

Niech $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ będzie zbiorem par (L_1,L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0L_2=W$.

Niech $\pi:\mathcal{J}^k(W,\xi)\to LG(V,\omega)$ będzie rzutowaniem. Jest to trywialna wiązka wektorowa z włóknem $\bigoplus_{i=3}^{k+1}\mathrm{Sym}^i(W^*)\otimes\xi$.

Interesuje nas większa grupa niż grupa symplektomorfizmów, grupa automorizmów kontaktowych $V\oplus\xi$.

Przez *Leżandrowską klasę osobliwości* rozumiemy algebraiczny podzbiór $\Sigma\subset\mathcal{J}^k(\mathbf{C}^n,\mathbf{C})$ niezmienniczy ze względu na holomorficzne kontaktomorfizmy $\mathbf{C}^{2n+1}$.

Niech $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ będzie zbiorem par (L_1, L_2) k-dżetów Lagranżowskich podrozmaitości w V takich że L_1 jest przestrzenią liniową i $T_0L_2 = W$.

Niech $\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$ będzie rzutowaniem. Jest to trywialna wiązka wektorowa z włóknem $\bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(W^*) \otimes \xi$.

Interesuje nas większa grupa niż grupa symplektomorfizmów, grupa automorizmów kontaktowych $V \oplus \xi$.

Przez *Leżandrowską klasę osobliwości* rozumiemy algebraiczny podzbiór $\Sigma \subset \mathcal{J}^k(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ niezmienniczy ze względu na holomorficzne kontaktomorfizmy $\mathbf{C}^{2n+1}$.

Dodatkowo, zakładamy, że Σ jest stabilny ze względu na zwiększanie wymiaru W.

Wiązka dżetów $\mathcal{J}^k(W,\xi)$

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, W zespoloną wiązką rangi n nad X oraz ξ zespoloną wiązką liniową nad X.

Wiązka dżetów $\mathcal{J}^k(W,\xi)$

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, W zespoloną wiązką rangi n nad X oraz ξ zespoloną wiązką liniową nad X. Niech $\tau : LG(V,\omega) \to X$ oznacza wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów parametryzującą liniowe podrozmaitości w V_x, $x \in X$.

Wiązka dżetów $\mathcal{J}^k(W,\xi)$

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, W zespoloną wiązką rangi n nad X oraz ξ zespoloną wiązką liniową nad X. Niech $\tau : LG(V,\omega) \to X$ oznacza wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów parametryzującą liniowe podrozmaitości w V_x, $x \in X$. Mamy relatywną wersję
$\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)\,.$

Wiązka dżetów $\mathcal{J}^k(W,\xi)$

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, W zespoloną wiązką rangi n nad X oraz ξ zespoloną wiązką liniową nad X. Niech $\tau : LG(V,\omega) \to X$ oznacza wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów parametryzującą liniowe podrozmaitości w V_x, $x \in X$. Mamy relatywną wersję
$\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)$.
Przestrzeń $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ rozwłóknia się nad X. Jest równa:

$$\mathcal{J}^k(W,\xi) = \tau^* \left(\bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(W^*) \otimes \xi \right) .$$

Wiązka dżetów $\mathcal{J}^k(W,\xi)$

Niech X będzie przestrzenią topologiczną, W zespoloną wiązką rangi n nad X oraz ξ zespoloną wiązką liniową nad X. Niech $\tau : LG(V,\omega) \to X$ oznacza wiązkę Lagranżowskich Grassmannianów parametryzującą liniowe podrozmaitości w V_x, $x \in X$. Mamy relatywną wersję
$\pi : \mathcal{J}^k(W,\xi) \to LG(V,\omega)\,.$
Przestrzeń $\mathcal{J}^k(W,\xi)$ rozwłóknia się nad X. Jest równa:

$$\mathcal{J}^k(W,\xi) = \tau^* \left(\bigoplus_{i=3}^{k+1} \mathrm{Sym}^i(W^*) \otimes \xi \right) .$$

Ponieważ zmiany współrzędnych W i ξ indukują holomorficzne kontaktomorfizmy $V \oplus \xi$, każda Leżandrowska klasa osobliwości Σ wyznacza $\Sigma(W,\xi) \subset \mathcal{J}^k(W,\xi)$.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V, \omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V, \omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Forma symplektyczna ω indukuje izomorfizm $V \cong V^* \otimes \xi$.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V, \omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Forma symplektyczna ω indukuje izomorfizm $V \cong V^* \otimes \xi$.

Na $LG(V, \omega)$ mamy ciąg tautologiczny wiązek:
$0 \to R \to V \to R^* \otimes \xi \to 0$.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V,\omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Forma symplektyczna ω indukuje izomorfizm $V \cong V^* \otimes \xi$.

Na $LG(V,\omega)$ mamy ciąg tautologiczny wiązek:
$0 \to R \to V \to R^* \otimes \xi \to 0$.

Rozważmy wiązkę wirtualną $A := W^* \otimes \xi - R_{W,\xi}$.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V,\omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Forma symplektyczna ω indukuje izomorfizm $V \cong V^* \otimes \xi$.

Na $LG(V,\omega)$ mamy ciąg tautologiczny wiązek:
$0 \to R \to V \to R^* \otimes \xi \to 0$.

Rozważmy wiązkę wirtualną $A := W^* \otimes \xi - R_{W,\xi}$.

Mamy relację: $A + A^* \otimes \xi = 0$.

Tautologiczna wiązka wektorowa nad $LG(V, \omega)$ będzie oznaczana przez $R_{W,\xi}$ albo R.

Forma symplektyczna ω indukuje izomorfizm $V \cong V^* \otimes \xi$.

Na $LG(V, \omega)$ mamy ciąg tautologiczny wiązek:
$0 \to R \to V \to R^* \otimes \xi \to 0$.

Rozważmy wiązkę wirtualną $A := W^* \otimes \xi - R_{W,\xi}$.

Mamy relację: $A + A^* \otimes \xi = 0$.

Klasy Cherna $a_i = c_i(A)$ generują
$H^*(LG(V, \omega), \mathbf{Z}) \cong H^*(\mathcal{J}^k(W, \xi), \mathbf{Z})$ jako algebrę nad
$H^*(X, \mathbf{Z})$.

Ustalmy aproksymację $BU(1) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{P}^n$, czyli kładziemy $X = \mathbf{P}^n$, $\xi = \mathcal{O}(1)$. Niech $W = \mathbf{1}^n$ będzie trywialną wiązką rangi n.

Ustalmy aproksymację $BU(1) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}^n$, czyli kładziemy $X = \mathbf{P}^n$, $\xi = \mathcal{O}(1)$. Niech $W = \mathbf{1}^n$ będzie trywialną wiązką rangi n.

Wówczas $H^*(LG(V,\omega),\mathbf{Z}) \cong H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi),\mathbf{Z})$ jest izomorficzny z pierścieniem Leżandrowskich klas charakterystycznych w stopniach nie większych niż n.

Ustalmy aproksymację $BU(1) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}^n$, czyli kładziemy $X = \mathbf{P}^n$, $\xi = \mathcal{O}(1)$. Niech $W = \mathbf{1}^n$ będzie trywialną wiązką rangi n.

Wówczas $H^*(LG(V,\omega),\mathbf{Z}) \cong H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi),\mathbf{Z})$ jest izomorficzny z pierścieniem Leżandrowskich klas charakterystycznych w stopniach nie większych niż n.

Element $[\Sigma(W,\xi)]$ of $H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi),\mathbf{Z})$, nazywany jest *Leżandrowskim wielomianem Thoma* Σ.

Ustalmy aproksymację $BU(1) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}^n$, czyli kładziemy $X = \mathbf{P}^n$, $\xi = \mathcal{O}(1)$. Niech $W = \mathbf{1}^n$ będzie trywialną wiązką rangi n.

Wówczas $H^*(LG(V,\omega),\mathbf{Z}) \cong H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi),\mathbf{Z})$ jest izomorficzny z pierścieniem Leżandrowskich klas charakterystycznych w stopniach nie większych niż n.

Element $[\Sigma(W,\xi)]$ of $H^*(\mathcal{J}^k(W,\xi),\mathbf{Z})$, nazywany jest *Leżandrowskim wielomianem Thoma* Σ.
i często oznaczany $\mathcal{T}^\Sigma$. Wyrażony jest w terminach a_i and $s = c_1(\xi)$.

Twierdzenie. *(M.Mikosz+PP+A.Weber, 2010) Istnieje 1-parametrowa rodzina baz (w pierścieniu Leżandrowskich klas charakterystycznych) taka, że każdy Leżandrowski wielomian Thoma* $\mathcal{T}^{\Sigma}$ *ma dodatnie rozwinięcie w każdej bazie z tej rodziny.*

Twierdzenie. *(M.Mikosz+PP+A.Weber, 2010) Istnieje 1-parametrowa rodzina baz (w pierścieniu Leżandrowskich klas charakterystycznych) taka, że każdy Leżandrowski wielomian Thoma* $\mathcal{T}^{\Sigma}$ *ma dodatnie rozwinięcie w każdej bazie z tej rodziny.*

(Specjalizacja do przypadku Lagranżowskiego prowadzi do $\{\widetilde{Q}_I\}$.)

Twierdzenie. *(M.Mikosz+PP+A.Weber, 2010) Istnieje 1-parametrowa rodzina baz (w pierścieniu Leżandrowskich klas charakterystycznych) taka, że każdy Leżandrowski wielomian Thoma* $\mathcal{T}^{\Sigma}$ *ma dodatnie rozwinięcie w każdej bazie z tej rodziny.*

(Specjalizacja do przypadku Lagranżowskiego prowadzi do $\{\widetilde{Q}_I\}$.)

– J. of Differential Geom.

Stwierdzenie. *Niech $t = v_1 = v_2$. Dla niepustej Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ, Lagranżowski wielomian Thoma (czyli $\mathcal{T}^\Sigma$ dla $t = 0$) jest niezerowy. (Zatem także $\mathcal{T}^\Sigma$ jest niezerowy.)*

Stwierdzenie. *Niech $t = v_1 = v_2$. Dla niepustej Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ, Lagranżowski wielomian Thoma (czyli $\mathcal{T}^\Sigma$ dla $t = 0$) jest niezerowy. (Zatem także $\mathcal{T}^\Sigma$ jest niezerowy.)*

Kazarian: Klasyfikacja osobliwości Leżandrowskich jest równoległa do klasyfikacji osobliwości punktów krytycznych odwzorowań ze względu na stabilną prawą równoważność. Dla Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ rozważmy stowarzyszoną klasę osobliwości odwzorowań $f : M \to C$ z n-wymiarowych rozmaitości do krzywych. Oznaczmy stowarzyszony wielomian przez Tp^Σ.

Stwierdzenie. *Niech $t = v_1 = v_2$. Dla niepustej Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ, Lagranżowski wielomian Thoma (czyli $\mathcal{T}^{\Sigma}$ dla $t = 0$) jest niezerowy. (Zatem także $\mathcal{T}^{\Sigma}$ jest niezerowy.)*

Kazarian: Klasyfikacja osobliwości Leżandrowskich jest równoległa do klasyfikacji osobliwości punktów krytycznych odwzorowań ze względu na stabilną prawą równoważność.
Dla Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ rozważmy stowarzyszoną klasę osobliwości odwzorowań $f : M \to C$ z n-wymiarowych rozmaitości do krzywych. Oznaczmy stowarzyszony wielomian przez Tp^{Σ}.
Mamy

$$Tp^{\Sigma} = \mathcal{T}^{\Sigma} \cdot c_n(T^*M \otimes f^*TC)\,.$$

Stwierdzenie. *Niech $t = v_1 = v_2$. Dla niepustej Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ, Lagranżowski wielomian Thoma (czyli $\mathcal{T}^\Sigma$ dla $t = 0$) jest niezerowy. (Zatem także $\mathcal{T}^\Sigma$ jest niezerowy.)*

Kazarian: Klasyfikacja osobliwości Leżandrowskich jest równoległa do klasyfikacji osobliwości punktów krytycznych odwzorowań ze względu na stabilną prawą równoważność.

Dla Leżandrowskiej klasy osobliwości Σ rozważmy stowarzyszoną klasę osobliwości odwzorowań $f : M \to C$ z n-wymiarowych rozmaitości do krzywych. Oznaczmy stowarzyszony wielomian przez Tp^Σ.

Mamy

$$Tp^\Sigma = \mathcal{T}^\Sigma \cdot c_n(T^*M \otimes f^*TC)\,.$$

Wiemy, że Tp^Σ jest niezerowy. Pokazuje się, że Tp^Σ po specjalizacji $f^*TC = \mathbf{1}$ i.e. $t = 0$, też jest niezerowy. Teza wynika z równania.

Hipoteza Greena-Griffithsa): Każda rzutowa rozmaitość ogólnego typu zawiera właściwą podrozmaitość $Y \subset X$ taką że obrazy wszystkich niestałych całkowitych krzywych holomorficznych $f : \mathbf{C} \to X$ leżą w Y.

Hipoteza Greena-Griffithsa): Każda rzutowa rozmaitość ogólnego typu zawiera właściwą podrozmaitość $Y \subset X$ taką że obrazy wszystkich niestałych całkowitych krzywych holomorficznych $f : \mathbf{C} \to X$ leżą w Y.

McQuillen: dla powierzchni z dodatnią drugą klasą Segre $c_1^2 - c_2 > 0$, hipoteza GG zachodzi.

Hipoteza Greena-Griffithsa): Każda rzutowa rozmaitość ogólnego typu zawiera właściwą podrozmaitość $Y \subset X$ taką że obrazy wszystkich niestałych całkowitych krzywych holomorficznych $f : \mathbf{C} \to X$ leżą w Y.

McQuillen: dla powierzchni z dodatnią drugą klasą Segre $c_1^2 - c_2 > 0$, hipoteza GG zachodzi.

Siu: Dla hiperpowierzchni X w przestrzeni rzutowej, hipoteza GG jest prawdziwa, gdy $\deg(X) >> 0$.

Hipoteza Greena-Griffithsa): Każda rzutowa rozmaitość ogólnego typu zawiera właściwą podrozmaitość $Y \subset X$ taką że obrazy wszystkich niestałych całkowitych krzywych holomorficznych $f : \mathbf{C} \to X$ leżą w Y.

McQuillen: dla powierzchni z dodatnią drugą klasą Segre $c_1^2 - c_2 > 0$, hipoteza GG zachodzi.

Siu: Dla hiperpowierzchni X w przestrzeni rzutowej, hipoteza GG jest prawdziwa, gdy $\deg(X) >> 0$.

Diverio, Merker, Rousseau: dla ogólnej hiperpowierzni $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$, hipoteza GG jest prawdziwa, gdy $\deg(X) > 2^{n^5}$.

Hipoteza Rimanyi: Wielomiany Thoma dla $A_i(r)$ mają dodanie rozwinięcie w bazie jednomianów od klas Cherna.

Hipoteza Rimanyi: Wielomiany Thoma dla $A_i(r)$ mają dodanie rozwinięcie w bazie jednomianów od klas Cherna.

Twierdzenie Berczi: Załóżmy, że hipoteza R jest prawdziwa. Wówczas dla ogólnej hiperpowierzchni $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$, hipoteza GG zachodzi, $\deg(X) > n^6$.

Hipoteza Rimanyi: Wielomiany Thoma dla $A_i(r)$ mają dodanie rozwinięcie w bazie jednomianów od klas Cherna.

Twierdzenie Berczi: Załóżmy, że hipoteza R jest prawdziwa. Wówczas dla ogólnej hiperpowierzchni $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$, hipoteza GG zachodzi, $\deg(X) > n^6$.

Techniki lokalizacji, iterowane rezydua

KONIEC