Józef Maria Hoene-Wroński'nin Hayatı ve Çalışmaları Üzerine Notlar[*]

Piotr Pragacz (Varşova)[†]

Öz

Bu makale bilim tarihinin en orijinal figürlerinden birisi olan Hoene-Wroński (1776–1853) hakkındadır. 12–13 Ocak 2007'de Varşova'da, Polonya Bilimler Akademisi Matematik Enstitüsü'nde yapılan *Józef Hoene-Wroński'ye bir anma* isimli Impanga[1] oturumunda yapılan iki konuşma temel alınarak yazılmıştır.

Kaynağa ulaşmak için akıntıya karşı yüzmek gerekir.
Stanisław J. Lec

1. Giriş ve kısa biyografi. Bu makale öncelikli olarak bilimdeki gerçeğin yılmaz arayıcısı ama aynı zamanda çok orijinal bir filozof ve aşırı derecede çalışkan olan Józef Maria Hoene-Wroński hakkındadır.

Wroński'nin hayatı ve çalışmalarıyla ilgili çeşitli yazıları okuyup bu insanoğlunu anlamaya çalışırken aklımda hep şu deyiş vardı:

Büyük insanlardan bize öğrettikleri büyük şeyleri öğren. Onların zayıflıkları o kadar önemli değildir.

Józef Maria Hoene-Wroński'nin kısa bir biyografisi.

1776	- 23 Ağustos'ta Wolsztyn'de doğdu.
1794	- Polonya ordusuna katıldı.
1795.1797	- Rus ordusunda görev yaptı.
1797.1800	- Almanya'da öğrenim gördü.
1800	- Fransa'ya gidip, Marsilya'daki Polonya Lejyonlarına katıldı.
1803	- İlk çalışması *Kant'ın Kritik Felsefesi*'ni yayınladı.
1810	- V.H. Sarrazin de Montferrier ile evlendi.
1853	- 9 Ağustos'ta Paris yakınlarındaki Neuilly'de öldü.

Bu makalenin başlangıç noktasının uzun süre önce okuduğum [6]'nın XII bölümü olduğu söyleyebilirim. Daha sonra Hoene-Wroński hakkında başka yayınlar okumuş olmama rağmen bu bölümün dengeli yargıları aklımdan hiç çıkmadı. Bu yazıda Wroński'nin genellikle matematiksel çalışmalarıyla özellikle de cebir ve analize yaptığı katkılarla ilgileneceğiz. Dolayısıyla hayatıyla ilgili sadece temel bilgilere değineceğiz. Hayatıyla ilgili daha fazla bilgi

---

[*] Türkçe'ye Özer Öztürk tarafından çevrilmiştir. Bu makalenin aslı Polonya dergisi Wiadomości Matematyczne (Ann. Soc. Math. Pol.)} vol.~43 (2007)'de yayınlanmıştır. Makalenin tekrar yayınlanmasına izin verdikleri için bu derginin editörlerine teşekkür ediyoruz.

[†] Bu çalışma Polonya Bilim Kurumu tarafından desteklenmiştir.

[1] Impanga, 2000'den beri Polonya Bilimler Akademisi Matematik Enstitüsü'nde cebirsel geometri alanında faaliyet gösteren bir grubun adıdır. Bahsedilen oturumda şu konuşmalar sunulmuştur: R. Murawski: *Hoene-Wroński'nin felsefesi*, T. Maszczyk: *H-W'nin En Yüksek Kanun'u*, W. Karkucińska: *H-W'nin Kórnik Kütüphanesi'ndeki mirası*, W. Więsław: *H-W döneminde matematik*, P. Domański: *Banach'ın H-W'nin En Yüksek Kanun'u üzerine çalışmaları*, W. Wójcik: *H-W'nin matematik reformu* ve P. Pragacz: *H-W'nin hayatı ve cebire katkıları.*

isteyenlere [9]'u öneriyoruz. Yine aynı şekilde Wroński'nin felsefeye yaptığı katkıların en önemlileriyle yetineceğiz. Daha fazla bilgi için [36], [37], [47] ve [10]'a bakınız. Son olarak teknik buluşlarında detaya girmeden en önemlilerinden bahsedeceğiz.

Józef Maria Hoene-Wroński
(Kórnik Kütüphanesi'ninden gümüşlü levha üzerine çekilmiş fotoğrafı)

2. Polonya'da gençlik yılları. Józef Hoene 23[2] Ağustos 1776'da Wolsztyn'de doğdu. Çek göçmeni olan babası Antoni, tanınmış bir mimardı. Józef Hoene'nin doğumundan bir sene sonra aile Poznań'a taşındı. Burada geleceğin filozofunun babası ünlü bir inşaatçı oldu (1779'da Polonya'nın son kralı Stanisław August kendisine *Kraliyet Mimarı* unvanını verdi.) 1786–1790 yılları arasında Józef, Poznań'da okula gitti. Dönemin politik olaylarından etkilenerek orduya katılmaya karar verdi. Baba çok dirençliydi ama çocuğun kararlılığı onunkinden daha fazlaydı. (Kararlılık kesinlikle Wroński'nin doğasının temel karakteridir.) 1792 yılında evden kaçtı ve babasının takibini zorlaştırmak için adını değiştirdi. Bundan sonra Józef Wroński olarak bilinecekti. Hatta bu isimle topçu birliğine seçildi. 1794 direnişinde cesareti dikkat çekti ve kısa sürede terfi etti. Varşova'nın Prusya ordusuna karşı savunmasında bir bölüğün komutanıydı. Buradaki başarıları komutanı Tadeusz Kościuszko tarafından bir madalyayla ödüllendirildi. Maciejowice yakınlarındaki savaşa da katıldı ve bu sırada yüzbaşı rütbesine yükseltildi. Bu dönemde Rus ordusuna katılma kararı aldı. Bu kararın nedenini bilmiyoruz. Wroński'nin hayatıyla ilgili çeşitli kaynakları incelememe rağmen bu kararla ilgili bir açıklamanın izine rastlayamadım. Rusya'da eğitim alma olasılığını hesaba kattığını tahmin edebiliriz. Wroński'nin en büyük arzusu bilim kanunlarını derinliklerine kadar anlamaktı. Bu kanunlar evrenseldir. Başka her yerde nasıllarsa Rusya'da da öyledirler… Yüzbaşı rütbesine terfisinden sonra Suworow generalinin danışmanlarından birisi oldu. 1795 – 1797 yılları arasında Rus ordusunda görev yaptı ve yarbay rütbesine yükseldi.

3. Polonya'dan ayrılış. Babasının ani ölümünün haberi Wroński'nin planlarını değiştirdi. Kendisine kalan yüklüce miras sayesinde uzun zamandır istediği çalışmalara kendisini adama fırsatı buldu. Ordudan ayrıldı ve Batı'ya seyahat etti. Kant'ın felsefesinden çok etkilenerek Königsberg'e gitti. Ancak Kant'ın artık ders vermediğini öğrenince Königsberg'den ayrılarak Halle ve Göttingen'de bulundu. 1800 yılında İngiltere ve Fransa'da

[2] Çeşitli kaynaklar 20 ve 24 Ağustos tarihlerini de veriyor.

bulundu. Dąbrowski'nin Lejyonerlerinden çok etkilenerek generalden onlara katılmak için izin istedi. Dąbrowski kabul etti (ancak Wroński'ye Çar'ın ordusunda kazandığı rütbeyi vermedi) ve onu Marsilya'ya gönderdi. Burada Wroński görevini ve bilime olan aşkını birleştirebildi. Marsilya Bilimler Akademisi ve Marsilya Tıp Birliği'nin üyesi oldu.

Wroński, Marsilya'da bir aydınlanma anı yaşadı. Bu 15 Ağustos 1803'te Napolyon'un doğum günü balosunda zihninde beliriveren bir şeydi. Kendi tarifiyle bir gerginlik, kesinlik duydu ve "Mutlaklığın Özü'nü" bulacağını hissetti. Evrenin başlangıcının gizemini ve onu yöneten yasaları kavradığını düşündü. Bu andan sonra insan düşüncesini yeniden yapılandırmaya ve evrensel bir felsefi sistem yaratmaya karar verdi. Bu günün anısına "Maria" ismini aldı ve bilim tarihine "Józef Maria Hoene-Wroński" olarak geçti. Wroński'nin insanlığın bilgisini yeniden yapılandırması, matematiğin temel yasa ve metotlarını keşfederek derin bir reform yapmaya dayanıyordu. Aynı zamanda (uygulamalı) matematiğin şu üç anahtar meselesini çözmeyi amaçları arasına koydu.

1. Madde ve enerji arasındaki ilişki nedir? (Wroński'nin buradaki derin öngörüsüne dikkat ediniz.)
2. Gökcisimlerinin yapısı ve oluşumu nasıldır?
3. Bu gökcisimleri nasıl evreni oluşturuyorlar? Evrenin yapısı nedir?

Wroński'nin çalışmalarında en göze çarpan karakter, diğer tüm bilgilerin çıkarılabileceği genel bir prensip bularak tüm bilgiyi felsefede temellendirme kararlılığıdır.

Makale yazmak için gerekli kaynaklar çabucak tükendi ve Wroński özel matematik dersleri vererek geçimini sağlamaya başladı. Victoria Henriette Sarrazin de Montferrier de onun öğrencilerinden biriydi. Öğretmen bu öğrencisini o kadar çok sevdi ki 1810'da evlendiler. Aynı yılın Eylül ayında Wroński Paris'i almak için yapılan savaşa liderlik etti.

4. Paris: denklemlerin çözümleri, algoritmalar, tekrarlı kesirler ve Akademi ile mücadele. 1811 yılında Wroński Matematik Felsefesi'ni yayınlar [14] (ayrıca bkz. [24]). Çok daha önceden matematikten beklenen aşağıdaki iki temel özellikle uğraşmayı gözüne kestirmişti.

1. Matematiksel kavramların özünü anlamayı amaçlayan teoriler oluşturmak.
2. Matematikte bilinmeyenleri hesaplamanın kapısını açacak algoritmik teknikler geliştirmek.

Buradaki ikinci nokta gösteriyor ki Wroński matematikte algoritmik düşünmenin öncülerindendir. Matematikteki önemli problemleri çözecek çok sayıda ve çok akıllıca algoritmalar üretmiştir.

1812'de Wroński bütün derecelerden denklemlerin çözümleri hakkında bir makale yayınlar [15] (ayrıca bkz. [20]). Öyle görünüyor ki bu makale olmasaydı Wroński'nin bilimdeki yeri çok daha iyi anlaşılacaktı. Bu makalede Wroński, herhangi dereceden bir denklemin çözümünü bulmak için *cebirsel* bir metod geliştirdiğini savunuyordu. Ancak 1799'dan beri Ruffini'nin derecesi 4'den büyük denklemlerin kökler cinsinden çözülmesinin imkânsız olduğunu ispatladığına inanılıyordu. (Ruffini'nin – bugün temelde doğru olduğu kabul edilen – ispatı o zamanlar tartışmalıydı[3] ve matematik dünyası bu ispatı ancak 1824'te

[3] 1801'de Ruffini bulduğu sonuçları bir kitapta yayınladı ve kitabın bir kopyasını Lagrange'a gönderdi. Ama Lagrange'dan cevap alamadı. Legendre ve Paris Akademisi'nin diğer üyeleri bu çalışmayı dikkate değer

Abel yayınladıktan sonra kabul etti.) Yani Wroński, Ruffini – Abel teoremini sorgulamış mıydı? Ya da bu teoremi bilmiyor muydu? Daha sonraki yıllarda olduğu gibi aslında Wroński matematiksel literatürü sistematik bir şekilde taramamıştı. 19.yy'ın ilk on yılında matematiğe yapılan temel katkılara göz atmıştı. Anlaşılması zor olsa da, teksirleri ve hesaplamaları dikkatle incelendiğinde görünen o ki, Wroński'nin metodu hatanın keyfi derecede küçük yapılabildiği yaklaşık sonuçlar veriyor[4]. Kullandığı cebirsel argümanların yanında analitik ve transandantal olanlarda bulunur. Örneğin biraz sonra tarif edeceğimiz gibi söz konusu makaledeki çarpanlara ayırma probleminin çözümü bu şekildedir. Bu yaklaşım Newton'dan beri kullanıldığından çok orijinal değildir[5]. Wroński bu çalışmayı çok önemsediğinden (1840'ın sonlarına doğru makale yeniden yayımlanmıştı) durumun gerçekten anlaşılabilmesi ve Wroński'nin neleri yapıp neleri yapmadığının ortaya çıkartılabilmesi için alana hâkim birinin gerekli yorumlarla bu makalenin yeni bir versiyonunu yayınlaması çok faydalı olurdu.

Bence bu hâkim kişi Alain Lascoux olabilir. Lascoux, Wroński'nin bu makalesini ve diğer çalışmalarını inceleyerek tek değişkenli polinomlarla ve bu polinomlar için Öklit algoritması ile ilgili aşağıdaki şu üç cebirsel problemi hedeflediğini görmüştür.

I. İki monik polinom *F(x)* ve *G(x)*'i ele alalım. Kabul edelim ki *derece G* ≤ *derece F* olsun. *F(X)*'i *G(x)*'e bölerek başlarsak

$$F = {*G} + c_1R_1, \quad G = {*R_1} + c_2R_2, \quad R_1 = {*R_2} + c_3R_3, \ \ldots$$

olacak şekilde bir çoklu bölme elde ederiz. Burada "*" katsayıları *x* değişkeninin polinomlarıdır ve *derece G* ≥ *derece* R_1 ≥ *derece* $R_2\ldots$ koşuluyla tek bir biçimde belirlenirler. $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = 1$ biçimindeki ve $R_i(x)$'in *F(x)* ve *G(x)*'in köklerinin rasyonel fonksiyonu olan c_i'ler öyle bir şekilde seçilebilir ki $R_i(x)$ kalanları *x* değişkeninin ve aynı köklerin polinomu olurlar. Bu kalanlara *normlu polinom* kalanları veya *altkalıntıla*r denir. Wroński $R_i(x)$'leri bulmak için zekice bir algoritma oluşturdu. Ayrıca J.J. Sylvester'in bu kalanlar için başka formüller bulduğunu hatırlatalım [43] Bu formüllerin geçerliliği ise ancak yakın zamanda ispatlanmıştır. Bkz. [31].

II. Wroński, I'deki algoritmayı kullandıktan sonra limite geçerek aşağıdaki önemli çarpanlara ayırma problemini de çözmüştür [15] (Ayrıca bkz. [20]):

Kökleri birim çember üzerinde olmayan kompleks değişkenli W(x) polinomu verilsin. W'nin birim çemberin dışında kalan köklerinin kümesini A, birim çemberin içindeki köklerinin kümesini B ile gösterelim. W(x) 'ten $\prod_{b\in B}(x-b)$ *çarpanını ayırın.*

Wroński'nin çözümünü, Lascoux'nun [29]'da anlattığı yolu izleyerek, *Schur fonksiyonları* cinsinden vereceğiz (Burada Schur fonksiyonları için [29] ve [30]'daki tanım ve notasyonu kullanıyoruz). Normu birden küçük olan köklere karşılık gelen bir çarpanını ayırmaya çalıştığımız W(x) polinomunun katsayıları, A ve B (çoklu)kümelerinin toplamları $A\cup B$'nin elementer simetrik fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla problem B'nin elementer simetrik

---

bulmadılar. Ancak 1821'de (ölümünden bir yıl önce) Ruffini, Cauchy'den sonuçlarını çok önemli bulduğunu söyleyen bir mektup aldı.

[4] Daha fazla detay vermeseler de ilginçtir ki [6]'nın yazarları da benzer bir görüşe ulaşmışlar.

[5] Newton-Raphson ve Laguerre metodları biliniyordu.

fonksiyonlarının, $A \cup B$'nin Schur fonksiyonları $S_J(A+B)$'ler türünden ifade edilmesine indirgenir. *A* kümesinin kardinalitesi *m* olsun. Bir $I \in N^m$ ve $k, p \in N$ için

$$I(k) := (i_1 + k, \ldots, i_m + k), \qquad 1^p I(k) := (1, \ldots, 1, i_1 + k, \ldots, i_m + k)$$

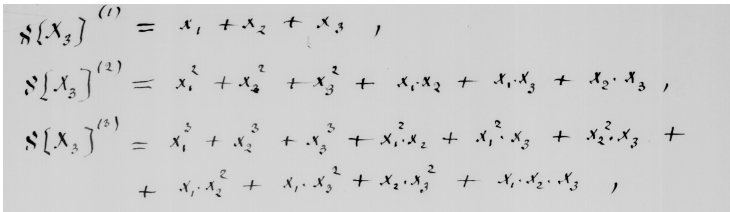
(burada 1, *p* defa yazılıyor) biçiminde tanımlayalım. *B* kümesinin kardinalitesi *n* olsun. Wrońskiʼnin teoremi, Lascouxʼnun aktarışıyla (bkz. [29]), şunu ifade eder:

$$\prod_{b \in B} (x - b) = \lim_{k \to \infty} \Big(\sum_{o \le p \le n} (-1)^p x^{n-p} \frac{S_{1^p I(k)}(A+B)}{S_{I(k)}(A+B)} \Big)$$

(burada *I*, N^mʼde keyfi bir dizidir.) Dikkat edilirse çözüm limite geçmeyi gerektirmektedir. Dolayısıyla cebirsel argümanların yanı sıra transandantal olanlar da kullanılmıştır. Bu sonucun ispatı [29]ʼda bulunabilir. Sonuç olarak Wrońskiʼnin cebirsel denklemlerin çözümlerini bulmaya çalışırken kendisini köklerle *sınırlandırmadığını* görüyoruz.

III. Wroński, *F(x)*ʼin derecesinin *G(x)*ʼinkinden 1 büyük olduğu durumlarda $R_i(x)$ kalanlarını *tekrarlı kesirler* olarak veren ilginç formüller de bulmuştur ([30]ʼda Wrońskiʼnin formüllerinin Schur fonksiyonları cinsinden ifadelerini bulabilirsiniz).

Wrońskiʼnin $x_1, x_2, \ldots$ değişkenlerinin simetrik fonksiyonlarını ve özellikle *alef fonksiyonlarını* da kullandığını belirtelim.


$$\aleph[X_3]^{(1)} = x_1 + x_2 + x_3 ,$$
$$\aleph[X_3]^{(2)} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 ,$$
$$\aleph[X_3]^{(3)} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2.x_2 + x_1^2.x_3 + x_2^2.x_3 + x_1.x_2^2 + x_1.x_3^2 + x_2.x_3^2 + x_1.x_2.x_3 ,$$

Wrońskiʼnin manuskriptlerinden üç değişkenli
1, 2 ve 3ʼüncü dereceden alef fonksiyonları.

Daha genel olarak $n \in N$ için $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ olsun ve $\aleph[X_n]^i$'leri

$$\sum_{i \ge o} \aleph[X_n]^i = \prod_{j=1}^{n} (1 - x_j)^{-1}$$

formülüyle tanımlayalım. Yani $\aleph[X_n]^i$ derecesi *i* olan bütün monomiyallerin toplamıdır. Wroński bu fonksiyonları daha "popüler" olan *elementer simetrik* fonksiyonlardan daha önemli buluyordu. Wrońskiʼnin bu sezgisi, *simetrikleştirme operatörleri* teorisinde [30], bilgisayar cebirinde çok önemli olan Gröbner bazlarında ve elementer simetrik fonksiyonlara karşılık gelen *Chern sınıfları* yerine alef fonksiyonlarına karşılık gelen *Segre sınıflarının* tercih edildiği modern *kesişim teorisinde* haklılık kazanmıştır. Kesişim teorisinin ana yaratıcılarından W. Fulton [11], s.47ʼde şöyle diyor:

Normal koniler için Segre sınıfları, Chern sınıflarının sahip olmadıkları kayda değer özelliklere sahiptirler.

Bütün bunlar gösteriyor ki Wroński matematik konusunda alışılmadık derinlikte bir sezgiye sahipti.

Wroński döneminde tekrarlı kesirler oldukça modaydı[6]. Daha önceki dönemlerdeki matematikçiler (Bombelli, Cataldi, Wallis, Huygens, Euler, Lambert, Lagrange…) özellikle irrasyonel sayıları tekrarlı kesirler halinde yazarak

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \qquad e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{\ddots}}}}, \qquad \pi = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{\ddots}}}}$$

gibi büyüleyici sonuçlar elde etmeye çalışmışlardı. Wroński'nin dönemindeyse çabalar tek değişkenli fonksiyonları tekrarlı kesirlerle ifade etmeye yoğunlaşmıştı. Wroński, tek değişkenli bir fonksiyonun *interpolasyonu problemini* 1811 yılında, tekrarlı kesirlerle, *Matematiğin Felsefesi*'nde [14] çoktan incelemişti. *g(x),* 0'da 0 değerini alan bir fonksiyon ve ε bir değişken olsun. Wroński, *f(0),* f(ε), f(2ε), … cinsinden ifade edilen $c_0, c_1, c_2, \ldots$ parametrelerini kullanarak *f(x)*'in tekrarlı kesir açılımını

$$f(x) = c_0 + \cfrac{g(x)}{c_1 + \cfrac{g(x-\varepsilon)}{c_2 + \cfrac{g(x-2\varepsilon)}{c_3 + \cfrac{g(x-3\varepsilon)}{\ddots}}}}$$

şeklinde verir. Bu *Thiele tekrarlı kesirleriyle* ilgilidir [44]. Birkaç sene sonra Wroński daha genel tekrarlı kesirler üretti. Bu defa tek bir *g(x)* fonksiyonu yerine

$$0 = g_0(\alpha_0) = g_1(\alpha_1) = g_2(\alpha_2) = \cdots$$

olacak şekilde $g_0(x), g_1(x), g_2(x), \ldots$ fonksiyon sistemlerini kullandı. c_j katsayılarını, $i = 0,1,\ldots$ olmak üzere $f(\alpha_i)$'lerin determinantlarını içeren ifadelerle verip

$$f(x) = c_0 + \cfrac{g(x)}{c_1 + \cfrac{g_q(x)}{c_2 + \cfrac{g_2(x)}{c_3 + \cfrac{g_3(x)}{\ddots}}}}$$

açılımını elde etti. İnterpolasyon teorisinde anahtar bir rol oynayan bu açılımlarsa *Stieltjes tekrarlı kesirleriyle* bağlantılıdır [42]. Lascoux [30]'da bu açılımlara Wroński *tekrarlı kesirleri* adını vererek Wroński'nin adını (Wrońskiyan'lardan sonra) ikinci kez matematik

[6] Tekrarlı kesirlerin tarihi [4]'te anlatılmıştır. 19. yüzyıl, abartısız bir şekilde, tekrarlı kesirlerin altın çağı olarak tarif edilebilir. Bu dönemde bu konuyu her matematikçi bilirdi. Jacobi, Peron, Hermite, Gauss, Cauchy ve Stieltjes bu konuyla uğraşanlardandır. Matematikçiler sayıları içeren tekrarlı kesirleri inceledikleri gibi fonksiyonlu tekrarlı kesirlerle de uğraşmışlardır (Euler ve Lambert'in çalışmaları dikkate alındığında aynı durumun bir önceki yüzyıl için de geçerli olduğu görülür). Fakat, şaşırtıcı bir şekilde ancak yakın zamanda Lascoux tarafından keşfedildiği üzere, interpolasyon teorisinde fonksiyonlu tekrarlı kesirlerin öncüsü Wroński'dir.

literatürüne soktu. Wroński'nin makalelerine referanslar ve daha detaylı bilgi [30]'da bulunabilir.

1812 yılında Wroński *Lagrange'ın analitik fonksiyonlar teorisine eleştiri*'yi yayınladı [16]. Wroński'nin bu konudaki görüşleri aralarında Poisson'un da bulunduğu başka matematikçiler tarafından da paylaşılıyordu. Eleştiri özel olarak "sonsuz küçüklükteki değerlerin" ifade edilmesinde Taylor formülünün çıkarılmasındaki eksikliği ele alıyordu. Wroński'nin bugün *Wrońskiyanlar* olarak adlandırılan ve türevleri içeren "kombinatorik toplamları" ilk kez yazdığı makale de budur.

Bu yıllarda Wroński planları için katı bir temel arıyordu. Bu temeli en ayrıcalıklı bilimsel kurumda, Fransız Akademisi'nde bulacağını düşündü. 1810 yılında Akademi'ye, bağlantı kurmak amacıyla, tek değişkenli fonksiyonları seriye açmaya olanak sağlayan "En Yüksek Kanun"u içeren *Algoritmik metodların temel prensipleri üzerine* makalesini gönderdi[7]. Makaleyi inceleyen heyet Wroński'nin formülünün, o zamana kadar bilinen bütün açılımları (örneğin Taylor formülü) içerdiğini ancak formülün en genel durumdaki geçerliliğini göstermediği kararını verdi. Wroński açıklayıcı bir cevap için ısrar etti ve bu olayın verdiği antipatiyle, Lagrange tarafından önerilen Akademi'nin karşılıklı üyeliği statüsünü reddetti. Akademi Wroński'nin bu cevabına ve sonraki mektuplarına resmi bir tepki vermedi. Bunların üstüne daha önce değinilen *Matematiğin Felsefesi* gibi ciddi bir çalışma ve *Denklemlerin çözümleri üzerine* makalesi Akademice fark edilmemişti. Tabiî ki Akademi'nin *Lagrange'ın analitik fonksiyonlar teorisine eleştiri*'ye karşı tutumu farklı ve Wroński'ye yaklaşımı dostane olamazdı. Makaleyi inceleyen heyette … Lagrange ve onun çalışma arkadaşları vardı. Bu negatif görüş üzerine Wroński, karakterine uygun olarak, makalesini Akademiden çekti ve Paris'li akademisyenlere yönelik (aralarında "born enemies of truth", les savants sur brevêts" ve çok daha ağırlarının bulunduğu) sert söylemlerde bulundu.

Bu dönemde Wroński'nin maddi durumu daha da kötüleşti. Yayınlarıyla uğraşırken verdiği özel dersleri ihmal etmişti. Dahası eşinin ve çocuğunun hastalığı yüzünden sahip olduğu her şeyi satmak zorunda kaldı. Bütün çabalara rağmen çocuk kurtarılamadı ve Wroński karalar bağladı. Napolyon'dan kendisini desteklemesini istedi ancak Napolyon onun uğraşlarıyla ilgilenmiyordu. Wroński, Paris'teki kalabalık Polonyalı göçmenlerin arasında zor koşullarda yaşadı. Buna rağmen günlüğünde acıyla belirttiği gibi denklemler üzerine çalışmasını vatanı Polonya'ya adamıştır.

Sonraki dönemde Wroński için (ekonomik açıdan) önemli bir an yaşandı: Eski dostu Ph. Girard - bu arada belirtelim Girard, Polonya'daki Żyrardów kasabasının kurucusudur - Wroński'yi Nice'tan varlıklı bir tüccar ve banker olan P. Arson'la tanıştırdı. Arson, Wroński'nin düşüncelerinden etkilenerek onu birkaç sene desteklemeye söz verdi. Karşılığında Wroński O'na Mutlağın sırrını açıklayacaktı. Filozofla banker arasındaki bu tuhaf bağ 1816'ya kadar sürdü. Sonunda Arson, Wroński'den sırrı kendisine açıklamasını istedi. Wroński bunu yapmayınca da O'nu mahkemeye verdi. Mesele o kadar yayıldı ki birkaç sene sonra Balzac'ın *Mutlağı Arayış* kitabının teması oldu. Arson destekleyici konumunu bıraktı ama eski-çalışanının borçlarını ödemek zorunda kaldı (Çünkü Wroński, jüriyi

[7] Bir fonksiyonu seriye açma olanağını tarif etmek için "En Yüksek Kanun" (The Highest Low") isminin kullanılması birazcık abartılı görünebilir. Ancak, hatırlamalıyız ki, o dönemin matematikçileri "sonsuza geçmek" ihtimalinden etkilenmişlerdi. Bu etkilenme, hatta büyülenme, sadece sonsuz serilerle değil sonsuz tekrarlı kesirlerle de ilgiliydi. Günümüzde sonsuzla ilgili özel bir durum yoktur: eğer bir uzayın kompaktlaştırılması gerekiyorsa "sonsuza bir nokta ekleriz" o kadar… Wroński ve çağdaşları sonsuza büyük ve aşkın bir sır olarak merak ve saygıyla yaklaşmışlardır.

Mutlağın gizemlerini bildiğine ikna etti ve mahkemeyi kazandı). Bu sıralarda Wroński, sosyal doktrinlerini popülerleştirmek amacıyla *Le Sphinx* dergisini yayınlıyordu.

1814 – 1819 yılları çoğunlukla matematik felsefesi alanında yeni Wroński yayınları getirdi: *Sonsuzluk felsefesi* (1814), *Algoritmik tekniklerin felsefesi* (1815, 1816, 1817), *Laplace'in üreten fonksiyonlarının kritiği*. Akademi bu yayınların tümünü ihmal etti.

5. İngiltere dönemi. 1820'de Wroński, denizcilikte mesafeleri ölçmekle ilgili bir ödül için yarışmak üzere İngiltere'ye gitti. Yolculuk çok talihsiz geçti. Sınırda gümrük görevlileri bütün aletlerine el koydular ve Wroński bu aletleri hiçbir zaman kurtaramadı. Makaleleri teorik bulundu ve bu haliyle bir ödül için uygun değillerdi. Son olarak Longitude Komitesi sekreteri T. Young, Wroński'nin kendisine gönderdiği notları kullanarak kendi tablolarını önemli şekilde geliştirdi. Ancak bu gelişmelerin kimin sayesinde yapıldığına ve bunun için kime teşekkür edilmesi gerektiğine değinmeyi "unuttu". Tabiî ki Wroński Young'a ve Kraliyet Topluluğu'na (Royal Society) bir dizi mektup göndererek durumu protesto etti. Hiçbir zaman bir cevap almadı.

Çok orijinal bir eser olan *Matematik derslerine giriş* [18] bu dönemde İngilizce olarak yazılmış ve 1821'de Londra'da yayınlanmıştır. Wroński burada tüm pozitif bilginin matematiğe dayandığını ya da bir şekilde ondan çıkarılabileceğini ifade eder. Wroński matematiğin gelişimini 4+1 döneme ayırır:

1. Doğu ve Mısırlıların çalışmaları: Soyut kavramlar üretmeyecek somut matematik çalışılmıştır.
2. Tales ve Pisagor'dan Rönesans'a kadarki dönem: insan düşüncesi yüksek soyutlama seviyesine ulaşmıştır ancak keşfedilen matematiksel gerçekler birbirleri ile ilişkisiz bir şekilde, koni kesitlerinin özelliklerinin tarifinde olduğu gibi, genel bir prensiple bağlanmadan var olmuşlardır.
3. Tartaglia, Cardano, Ferrari, Cavalieri, Bombelli, Fermat, Vieta, Descartes, Kepler, … : cebir sayesinde matematik genel kanunların çalışıldığı seviyeye ulaştı. Ancak matematikte başarılar hala "bireyseldi" ve matematiğin "genel" kanunları halen bilinmiyordu.
4. Newton ve Leibniz tarafından diferansiyel ve integral calculusun bulunması, fonksiyonların seriye açılması, Euler tarafından popülerleştirilen tekrarlı kesirler, Laplace'ın üreten fonksiyonları, Lagrange'ın analitik fonksiyonlar teorisi. İnsan aklı çoklukları düşünebilme seviyesinden fonksiyonlar calculusunda onların nasıl yaratıldığını yani diferansiyel calculusu düşünebilme seviyesine yükselmişti.

Beşinci dönem Wroński'nin "En Yüksek Kanun"u ve algoritmik teknikleri buluşuyla başlamalıydı. Matematikteki gelişme tüm matematiğe yön gösterecek en genel prensiplere, "mutlak olanlara" dayanmalıydı. O zamana kadarki bütün metodlar ve teoriler, her şeyin çıkartılabileceği genel bir temelden yoksun oldukları için matematiğin esrarını tamamen açıklayamamışlardı. Onlar göreliydiler, hâlbuki bilim mutlak prensipleri aramalıydı. Dolayısıyla beşinci dönem matematiğin genellenmesini zorunlu kılıyordu. Aslında bu daha sonra olacaktı ama Wroński'nin istediği gibi felsefe üzerine oturmayacaktı. Bu konuda hemen bu dönemden sonra ortaya çıkan bazı matematiksel teorilere değinmekle yetinelim: Grup teorisi (Galois), projektif geometri (Monge, Poncelet), Öklit dışı geometriler (Łobaczewski, Bolyai, Gauss, Riemann) ve küme teorisi (Cantor).

6. Logaritma Cüzleri – bir “bestseller”. 1823’te Wroński Paris’e döner ve (çarpma ve bölme için) aritmetik halkası ve (çeşitli aritmetik işlemleri için) “aritmoskop” gibi matematiksel aletlerle matematiksel tablolar üretmeye başlar. Bu alanda yaptıklarından biri de *Logaritma Cüzleri*’dir [19] (arlıca bkz [23]). Sayıları, çok akıllıca ve farklı sayılar için belli kısımlar aynı olacak şekilde parçalara ayırıp, uygun logaritmaları kullanarak çok büyük sayılar için bile tek bir sayfaya sığacak şekilde tablolar hazırladı. 4 ondalıklı logaritmalar için bütün tablo bir cep kitapçığına sığıyordu. Wroński’nin *Logaritma Cüzleri* defalarca ve pek çok dilde basılmıştır (Bu da gösteriyor ki Wroński okunması zor eserlerin yanında kullanılması kolay olanları da üretebiliyordu.).

1826 yılında kısa bir süre için Belçika’ya giden Wroński, yaptıklarıyla buradaki matematikçilerin ilgisini çekmeyi başardı. Aslında Hoene- Wroński’yi bilim literatürüne ilk sokanlar Belçikalı bilim adamlarıdır.

1829 da Wroński, teknolojideki gelişmelerden etkilenerek, buhar motoru üzerine bir inceleme yayınladı.

7. Avrupa hükümdarlarına mektuplar. 1830’dan hayatının sonuna kadar Wroński, geniş bir şekilde mesihçilik kavramıyla ilgilendi. O dönemde çok meşhur olan *Slav milletlerine dünyanın kaderi ile ilgili yol gösterme* ve çok iyi bilinen çalışmaları: *Mesihçilik, Mesih inancı üzerine çalışmalar* ve *Mesih inancına giriş* gibi çalışmalar yayınlar. Ayrıca Papa XII. Leon ve Çarlığa tavsiye niteliğinde bir mektup göndererek onları kendi mesihçi yaklaşımına dönmeye çağırdı.

Bunun dışında Wroński’nin Avrupa’nın hükümdarlarına ülkelerine nasıl hükmetmeleri gerektiğini anlatan mektuplar da gönderdiğine değinmeliyiz. Bu mektuplar ülkelerini nasıl yöneteceklerini açıklayan matematiksel formüller içeriyordu. Şimdi 1851 yılında yazılmış *Majesteleri Prens Louis-Napolyon’a Gizli Mektup*’tan bir örnek verelim.

Anarşi derecesini *a,* despotizm derecesini d harfi ile gösterelim. Bu durumda *m* = liberal parti üyelerinin sayısı, *p* = liberal partinin felsefesinin gerçek dinden sapma derecesi, *n* = dinci partinin üye sayısı ve *r* = dinci partinin gerçek felsefeden sapma derecesi, olmak üzere

$$a = \left(\frac{m+n}{m}\cdot\frac{m+n}{n}\right)^{p-r}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{p+r} = \left(\frac{m+n}{n}\right)^{2p}\cdot\left(\frac{m}{m+n}\right)^{2r},$$

$$b = \left(\frac{m+n}{m}\cdot\frac{m+n}{n}\right)^{r-p}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^{p+r} = \left(\frac{n}{m+n}\right)^{2p}\cdot\left(\frac{m+n}{m}\right)^{2r}$$

bulunur. Wroński’ye göre Fransa için p = r = 1 alınmalıdır. Böylece

$$a = \left(\frac{m}{n}\right)^{2}, \qquad b = \left(\frac{n}{m}\right)^{2}\text{'dir.}$$

Dahası $\frac{m}{n}$ =2 buradan da *a = 4, d = ¼* bulunur. Bunun anlamı Wroński dönemindeki Fransa’da politik özgürlük normal olanın 4 katıdır. Hükümetin otoritesi ise gerekli olanın çeyreği kadardır. (Yukarıdaki formüllerin günümüz Polonya’sındaki politik duruma uygulanması ilginç olurdu.)

8. Felsefe. I. Kant felsefesi, onu Hegelci yaklaşıma benzer şekilde metafiziğe dönüştüren Wroński'nin felsefesinin başlangıç noktasıydı. Wronski felsefi bir sistem yaratmakla kalmayıp, yarattığı sistemin politika, tarih, ekonomi, hukuk, müzik (bkz. [38]) ve eğitime uygulamalarını da üretmişti. Varoluş ve bilgi, Wroński'nin, Tanrı ya da ruh, bilgelik veya kendi içindeki bir şey olarak anladığı Mutlak'tan gelmekteydi. O bunu tarif etmemişti ama "Yaratılış Kanunu" dediği evrensel bir yasadan çıkarmayı denemişti.

Onun tarih felsefesinde, birçok çelişkiden tamamen mantıklı bir politik sistemin tekrar kurulabileceği öngörülüyordu. Felsefe tarihini her biri kendisine farklı amaçlar yüklemiş dört ana döneme ayırmıştır:

1. Doğu – materyalistik amaçlar
2. Yunan-Roma –ahlaki amaçlar
3. Ortaçağ – dini amaçlar
4. Modern (18.yy'a kadar) – entelektüel amaçlar.

XIX. yüzyılı iyiliği amaçlayan tutucu cephe ile amacı doğruluk olan liberal cephe arasındaki rekabeti içeren bir geçiş dönemi olarak görmüştür.

Wroński, en önemli Polonyalı mesihçi filozoftur. "Mesihçilik" kavramını ortaya atan Mickiewicz veya Towiański değil O'dur. Wroński, mesihçiliği insan ırkının, içinde iyilik, doğruluk, din ve bilimin bir birleşiminin yer aldığı ve bir amaç üzerine kurulu politik bir sistem yaratma macerası olarak görmüştür. İnsanlığı mutluluk çağına taşıyacak Mesih, onun kavradığına göre, tam olarak *felsefedir*.

Wroński'nin felsefesinin uzmanı olan ve bu felsefenin Polonya'da yayılması için uğraşan Jerzy Braun 1967'de yayınladığı *Aperçu de la philosphie de Wroński*, Wroński'nin Fransız takipçileri tarafından çok kıymetli bulunmuştur.

9. Matematik: En Yüksek Kanun, Wrońskiyanlar. Wroński genelde matematiksel analiz ve cebir üzerine çalıştı. Wroński'nin cebire olan katkılarını önceki bölümlerde tartışmıştık. Analizde[8] özellikle *fonksiyonların seri açılımlarıyla* ve *diferansiyel denklemlerle* ilgiliydi. Wroński'nin en ilginç matematiksel fikri tek değişkenli bir *f(x)* fonksiyonunu $g_1(x), g_2(x),...$ gibi bir fonksiyon serisi verildiğinde

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + c_3 g_3(x) + \dots,$$

olacak şekilde $c_1, c_2, \dots$ katsayılarını bularak seriye açmaktı. Eğer $g_1(x), g_2(x),...$ fonksiyonları (sonsuz boyutlu) tek değişkenli polinomlar vektör uzayı üzerindeki standart ya da herhangi başka bir $(\, . \, , \, . \,)$ iç çarpımına göre ortogonal bir baz oluşturuyorsa her *i* için

$c_i = (f(x), g_i(x))$'dir.

Ancak, böyle basit bir durum nadiren oluşur. Wroński c_i katsayılarını bulma metoduna *En Yüksek Kanun* payesini verdi. Bugünün bakış açısından bu metot kesinlik ve titizlik bakımından zayıftır (Örneğin Wroński, yakınsaklık meselesini düşünmemiştir). Ancak metot ilginç hesaplamaların yanında faydalı fikirler de içeriyordu. Çok daha sonra bu fikirleri

[8] Daha kesin bir ifadeyle, cebir ve analiz arasında keskin bir ayrım yapmak doğru olmaz çünkü Wroński cebirsel ve analitik yöntemleri birleştirerek kullanmıştır.

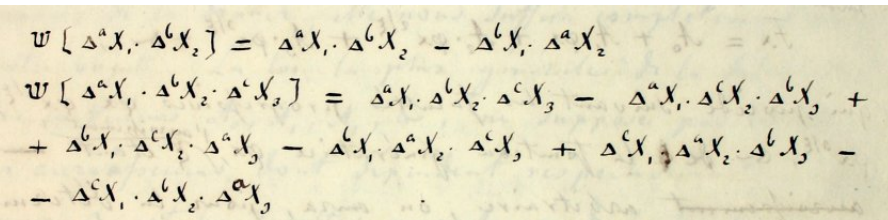
kullanan Stefan Banach, Hoene-Wroński'nin "En Yüksek Kanun"unun bugün bilinen adıyla *Banach uzaylarında* ve *ortogonal polinomlar* teorisinde de kullanılabileceğini ispatladı. Bu noktada, Hugo Steinhaus'un, Zofia Paulikowska-Brożek'e gönderdiği pek bilinmeyen bir mektuptan bir alıntı yapmak istiyorum.

Polonyalı iki matematikçiyle – Hoene-Wroński ve Banach – ilgili şu olayı ilginç bulabilirsin. Lwów'da Wroński'nin Paris'te yayınlanmış çalışmalarından biri vardı. Banach bana filozof tarafından yazılmış ve "En Yüksek Kanun"un tartışıldığı bir sayfa gösterdi. Böylece bana, Wroński'nin sadece mesihçi felsefeyi değil, bir fonksiyonun ortogonal olanlara nasıl açılacağını tartıştığını ispatlamış oldu.

Başkanlığını ünlü astronom Tadeus Banachiewichz'in (Banachiewichz, henüz genç bir araştırmacıyken makalelerinden birinde Wroński'nin sonuçlarından birini teorik astronomiye uygulamıştır[9]) yaptığı Varşova Astronomi Enstitüsü'ndeki bir toplantıda Banach, Wroński'nin *En Yüksek Kanun'unun* fonksiyonel analize nasıl uygulanacağını anlattı. Banach'ın anlattıkları [2]'de yazılı olarak yer aldı. S.Kaczmarz ve H. Steinhous'un ortogonal polinomlar üzerine 1936 yılında yayınlanan kitaplarında [26] Wroński'nin bu polinomlara yaptığı katkıları açıkladıklarını da belirtelim.

Hoene-Wroński "En Yüksek Kanun" metodunu geliştirerek bir fonksiyon serisinin katsayılarını hesaplamanın bir yolunu buldu. Bunu yapmak için kullandığı belli determinantlara, 1882 yılında Thomas Muir *Wroński Determinantları* ya da *Wrońskiyanlar* adını verdi. O dönemde Muir, determinantlar teorisi üzerine çok kapsamlı bir inceleme hazırlıyordu [33]. Wroński'nin makalelerini ve özellikle Lagrange'ın Analitik fonksiyonlar teorisi [16]'ne bakan Muir fark etti ki Wroński "kombinatorik toplamları"[10] öncü bir şekilde tanıtmış ve sistematik bir şekilde kullanmıştı. Modern dilde determinantlar denilen ve Wroński'nin, İbranicedeki "Şin" harfiyle gösterdiği bu kombinatorik toplamlar verilen fonksiyonların

$fg' - f'g, \quad fg'h'' + gh'f'' + hf'g'' - hg'f'' - fh'g'' - gf'h'', \ldots$
gibi ardışık türevlerini içerirler.


$$Ш[\Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2] = \Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2 - \Delta^b X_1 \cdot \Delta^a X_2$$
$$Ш[\Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2 \cdot \Delta^c X_3] = \Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2 \cdot \Delta^c X_3 - \Delta^a X_1 \cdot \Delta^c X_2 \cdot \Delta^b X_3 +$$
$$+ \Delta^b X_1 \cdot \Delta^c X_2 \cdot \Delta^a X_3 - \Delta^b X_1 \cdot \Delta^a X_2 \cdot \Delta^c X_3 + \Delta^c X_1 \cdot \Delta^a X_2 \cdot \Delta^b X_3 -$$
$$- \Delta^c X_1 \cdot \Delta^b X_2 \cdot \Delta^a X_3$$

[16]'nın bir manuskriptinde 11. sayfadan kombinatorik toplamları gösteren bir fragman.

Modern notasyonda *(n-1)* kez türevlenebilen n tane $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ reel fonksiyonlarının Wrońskiyan'ı

[9] T. Banachiewicz, Wroński'nin En Yüksek Kanun'unu Krakovyan hesabına uygulamıştır (bkz. [3]).

[10] Günümüz matematiğinde determinantlar kavramsal olarak da notasyonda da matrislerle ilişkilendirilirler. Tarihsel olarak matrislerden daha önce hesaplamalarda kullanıldıkları biçimiyle "işaretli toplamalar" olarak biliniyorlardı. O dönemde bulunan pek çok ilginç özellikleri yalnızca matris dili kullanıldığında doğal görünür (Örneğin, Binet-Cauchy teoremi). Matrisler 1840'larda Cauchy, Hamilton, … tarafından bulunmuştur ve 1850'lerde Sylvester matris kavramını kullanarak şeffaf bir determinant hesabını ve minörleri geliştirmiştir (bkz. [43]).

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır ve gösterilir (Vektör değerli fonksiyon sistemlerinin de Wrońskiyanları vardır). Wrońskiyanlar diferansiyel denklemler teorisinin temel araçlarındandır ve dünyanın her yerinde matematik literatüründe böyle isimlendirilmişlerdir. Muhtemelen Wrońskiyanlar en çok bir fonksiyon dizisinin lineer bağımlı olup olmadığını test etmek için kullanılır.

$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$, fonksiyonları (n-1) kez türevli olsun. Eğer $W(f_1, f_2, ..., f_n)$ sıfıra özdeş değilse $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ fonksiyonları lineer bağımsızdır[11].

Wrońskiyanların özellikleri ve bazı uygulamaları [7]'de incelenmiştir. Wrońskiyanların kullanımı analizle sınırlı değildir. İnvaryant Teorisi'nin klasik referans kaynağı [13]'te yazarlar Wrońskiyanları ikili formların cebirsel teorisinde kullanmışlardır. Matematiğin diğer alanlarında da Wrońskiyanların benzerleri oluşturulmuştur. Örneğin *lineer sistemlerin Wrońskiyanları* belli vektör demetlerinin morfizmleridir ve modern cebirsel geometrinin önemli araçlarıdandır. Saymalı (enumeratif) geometride, *Plücker Formülleri*'nde ve *Weierstrass noktaları* teorisinde kullanılmıştır. Bu öncü buluş ya da bekli Wrońskі'nin keşfi gerçekten de öyle derindir ve matematiğin o kadar merkezinde yer alır ki Wroński'nin neyin gerçekten önemli olduğunu hissetmek gibi bir yeteneği olduğunu ispatlar. Diğer matematikçilerin çalışmalarında nümerik matrislerin determinantları yeni yeni ortaya çıkarken Wroński, Wrońskiyanlardan çok daha genel fonksiyonal determinantları kullanmıştı.

Fizikte ise Wroński optik aletlerle akışkanlar mekaniği ile ilgiliydi. Buhar motorunu geliştirdi. Mekanik bir hesap makinesi tasarladı. Döneminin *buldozeri* gibi düşünülebilecek "hareketli raylar" kavramını yarattı ve böylece bir kez daha zamanından oldukça ilerideydi.

10. Bilim ve sanat insanlarının gözüyle Wroński: Birçok açıdan bir ve çok çalışma yeteneğine sahipti. Wroński'nin üçyüz sayfayı aşan biyografisinde Dickstein [9] şöyle diyor:

Demir gibi doğası pek az uykuya ve yemeğe ihtiyaç duyardı, sabah çalışmaya başlar ve ancak birkaç saatlik çalışmadan sonra "şimdi günü hak ettim" diyerek yemek yerdi.

Ve ekliyor:

Çalışmasının ciddiyeti ve talihsizliğe karşı mücadelesi sakin kişiliğine ve güleç karakterine zarar vermezdi.

Wroński matematik, felsefe, fizik ve teknik bilimlerde çok büyük sayıda makale yazdı (bkz. [25] ve [8]).

[11] Önermenin tersi, genellikle, doğru değildir.

Poznań yakınlarındaki Kórnik'te bulunan bu saray; Wroński'nin orijinal elyazması manuskriptlerinin bir kısmına ev sahipliği yapmaktadır. Bu elyazmaları birçok ilginç –ve bilim çevrelerince bilinmeyen- matematiksel sonuçlar içeriyor
(Resim: Stanisław Nowak)

1875'te Kórnik kütüphanesi Wroński'nin kitapları, makaleleri ve taslaklarının bir kısmını Wroński'nin evlatlık kızı Bathilde Conseillant'tan satın aldı. Ölümünden sonra birçok arkadaşı (Polonya Göçü'nün iyi ruhu ve Wroński'nin yakın arkadaşı Leonard Niedźwrecki başta olmak üzere) Wroński külliyatını basmak için çaba harcadılar (çoğu eseri elyazmalarında kalmıştı). Anlaşıldı ki çalışmaları 800'er sayfadan 10 cildi dolduracak uzunluktaydı. Ölümünden onüç yıl sonra tüm Polonyalı bilim adamlarını bir araya toplamayı amaçlayan Paris'teki Polonya Bilimsel Topluluğu, Wroński'nin çalışmalarının değerlendirilmesi üzerine bir yarışma düzenledi. Yarışmaya sadece bir çalışmayla başvurulmasının ve onu takdir eden kapalı bir grubu kenara bırakırsak çalışmalarının pek popüler olmamasının sebebi, okunmalarının çok zor olmasıydı. Bunun sebebi en yüksek genellemeyi hedeflemesi ve matematiksel kavramları felsefi olanlarla birleştirme çabasıydı. Gerçekten de Wroński'yi okumak hiç de kolay değildir. Kendisi talepkar bir yazardır. Ömrü boyunca da talepkar olmuştu; öncelikle kendisinden, ama aynı zamanda arkadaşlarından da; ve bu tutumu arkadaş kazanmasından çok birçok düşman edinmesine neden oldu. Zor bir karakterdi. [9]'da şu sözleri buluyoruz:

Ev hayatının aşırı basitliğini tarihi görevine ve felsefenin yanılmazlığına duyduğu derin inançtan gelen cesur bir dil ve gururla birleştirmişti. Felsefesinin karşıtlarını Gerçeklik'in düşmanları olarak gördü ve onlarla ateşlice, genelde argümanlarını oldukça kişisel bir şekilde ifade ederek savaştı.

Evet, Wroński, döneminden yıllarca ileriydi. Balzac onu "Avrupa'nın en güçlü zihni" olarak tarif etmiştir. Tanınmış Polonyalı yazar Norwid'in de Wroński'ye dair fikirleri benzerdi (bkz. [38], sayfa 30). Wroński'nin politik görüşü Avrupa'nın birleşmesini –ortak bir parlamento tarafından yönetilen bir ülkeler federasyonunu- "sezmiş" idi. Dickstein muhtemelen şu yazdıklarında haklıdır:

Çok yönlülüğünün yanında, Wrońskiʼnin zihninin baskın özelliği, denebilir ki, mimari becerisiydi. Kendisi de ilk çalışmalarından birinde ("Etik felsefesi"), insanın zihninin en güzel ayrıcalığının sistemler kurma becerisi olduğuna değinmiştir.

Kim bilir belki de, bir bakıma Alman filozofları "stil"inde yazan Wrońskiʼnin Almanyaʼda okuyucu bulma şansı daha yüksek olabilirdi. Wroński, ülkesinde *en az takdir gören* büyük Polonyalı bilim adamıdır –ki bu sadece bu metnin yazarının fikri değildir. Görünen o ki ülkesi dışında çok daha fazla takdir görmekte. Öyle ki, Şikagoʼdaki Bilim Müzesiʼnde matematik tarihinde en büyük etkiye sahip matematikçilerin adlarının bulunduğu tabloda, ancak üç Polonyalı matematikçinin adı bulunabilir: Kopernik, Banach ve… Hoene- Wroński Aynı zamanda Wrońskiʼnin 19. yüzyıl felsefesindeki önemi de büyüktür. Görünen o ki Fransaʼda 'filozof' Wrońskiʼye Polonyaʼda olduğundan çok daha fazla değer veriliyor (bkz. örn. [47] ve [10]). Wroński kadar büyük bir düşünürün mirası, bütünsel bir monografla kendi ülkesinde tanıtılmalıdır.

11. Tamamıyla Ölmeyeceğim. Wrońskiʼnin hayatı uzun ve zordu. O hayattayken onun başarıları hakkında güzel bir söz söyleyen ünlü bir bilim otoritesi oldu mu[12]? 1853 yılında hala çalışmaya devam ediyordu. O yıl, 2 makale yazmıştı ve bir üçüncüsünü yayına hazırlıyordu. Tayd teorisi üzerine çalışmaktaydı. İlk ikisini donanmaya gönderir. Laplaceʼın formüllerinin donanmanın ihtiyaçları için tamamen yeterli olduğunu söyleyen bir cevap alır. Bu 50 yıllık sıkı bir çalışmanın ardından bir kez daha takdir edilmeyen 75 yaşındaki yaşlı bilim adamı için bir yıkım oldu. 9 Ağustos 1853ʼte Neuillyʼde öldü. Ölümünden hemen önce karısına

Yüce Tanrım, söyleyecek o kadar çok şeyim var ki

diye fısıldadı.

Józef Maria Hoene-Wroński Neuillyʼdeki eski bir mezarlığa gömüldü. Aşağıdaki sözler mezarında (Fransızca olarak) yazmaktadır.

DOĞRULUĞUN ARAYIŞI ONU BULMA İHTİMALİNE ŞAHİTLİK ETMEKTİR.

Bu makaleyi yazdıktan sonra bu makalenin aslında 2004 yılında Wiadomości Matematyczne dergisinde yayınlanan A. Grothendieck hakkındaki makalemle birçok ortak

[12] Wrońskiʼnin hayatı boyunca onun matematiksel başarılarına atıf yapan iki önemli çalışma [41] ve [32] yayınlanmıştır. [41]ʼde, Wrońskiʼnin teorem ve formüllerine birkaç düzine yerde verilmiştir. [32]ʼde ise onun en önemli matematiksel fikirleri özetlenmiştir. Buna rağmen o dönemin düşünürleri Wrońskiʼnin ürettiklerinin çok azını biliyorlardı ve genellikle Wrońskiʼnin yıllar önce bulduklarını tekrar keşfettiler.

Wrońskiʼnin ölümünden yaklaşık 20 yıl sonra matematikçi ve filozof Wroński hakkındaki bazı notlar Ponceletʼin *Applications dʼAnalyse et de Géométrie* adlı eserinde ve ayrıca Wrońskiʼnin fikirlerini geliştiren Cayley [5] ve Transon [45], [46] tarafından yayınlanan çalışmalarda yayınlanmıştır. Denilebilir ki Muir tarafından Wrońskiyanlar adı verilmeden önce de bu kavram matematikte "kök salmaya başlamıştı". 1838–1920 döneminde (Liouville, Puiseaux, Christoffel, Sylvester, Frobenius, Torelli, Peano tarafından) Wrońskiyanlarla ilgili yapılan çalışmalar determinantların çok ciltli tarihi [34] ve [35]ʼte özetlenmiştir. Muir burada Wrońskiyanlara olan ilginin zaman geçtikçe arttığını vurguluyor.

noktası olduğunu frak ettim (Ayrıca bkz. American Mathematical Monthly, Kasım 2006). Grothendieck günlüğünde şöyle yazmışltır (Harvest and Soving, cilt I, s.94)

Bir gece gerçeği bilme arzusu ve gerçeği bilme gücü ile gerçeği gerçekten bilmenin aslında tek ve aynı şey olduğunu fark ettim.

Açıklamalar. Hoene-Wroński'den büyülenmemi sağladığı için Alain Lascoux'ya teşekkür ediyorum; bu büyülenme olmadan bu makale yazılamazdı.

Bu yazı son halini, girişte bahsedilen, Józef Hoene-Wroński'ye bir anma isimli Impanga oturumu dinledikten sonra aldı. Konuşmacılara olduğu kadar Jerzy Browkin'e ve Maciej Skwarczyński'ye de teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca, Jan Krzysztof Kowalski, Maria Pragacz ve Jolanta Zaim'e editörlük işlerindeki yardımlarından dolayı, Polonya Bilimler Akademisi'nin Kórnik Kütüphanesi'ninden Wanda Karkucińska ve Magdalena Marcinkowska'ya Wroński'den kalma eserleri yayınlamama izin verdikleri için ve bu el yazmaları üzerindeki çalışmalarımdaki yardımlarından dolayı teşekkür ediyorum.

Son olarak yazıyı Türkçe'ye çeviren Özer Öztürk'e ve bu makalenin önceki versiyonları hakkında yorumlarını esirgemeyen Paolo Aluffi ve Jacek Brodzki'ye minnettarım.

Kaynaklar

[1] W. I. Arnold, *Ordinary differential equations*, Nauka, Moscow 1971 (in Russian).

[2] S. Banach, *Über das "Loi suprême" von J. Hoene- Wroński*, Bulletin International de l'Academie Polonaise des sciences et de lettres, Série A (1939), 450–457.

[3] T. Banachiewicz, *Rachunek krakowianowy z zastosowaniami*, PAN, Komitet Astronomiczny, PWN, Warszawa 1959.

[4] C. Brezinski, *History of continued fractions and Padé approximants*, Springer, Berlin 1991.

[5] A. Cayley, *On Wroński's theorem*, Quart. J. Math. 12 (1873), 221–228.

[6] J. Dianni, A. Wachułka, *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej* , PZWS, Warszawa 1963.

[7] S. Dickstein, *Własności i niektóre zastosowania wrońskianów*, Prace Matematyczno-Fizyczne 1 (1888), 5–25.

[8] S. Dickstein, *Katalog dzieł i rękopisów Hoene- Wrońskiego*, nakładem Akademii Umiejętności, Kraków 1896; also in [9], pp. 239-351.

[9] S. Dickstein, *Hoene- Wroński. Jego życie i prace*, nakładem Akademii Umiejętno ści, Kraków 1896.

[10] J-C. Drouin, *Les grands thèmes de la pensée messianique en France de Wroński à Esquiros: christianisme ou laïcisme?,* in: Messianisme et slavophilie, Wyd. Uniw. Jagiell., Kraków 1987, 55-66.

[11] W. Fulton, Intersection theory, Springer, Berlin 1984.

[12] G. Galbura, *Il wronskiano di un sistema di sezioni di un fibrato vettoriale di rango i sopra una curva algebrica ed il relativo divisore di Brill-Severi*, Ann. Mat. Pura Appl. 98 (1974), 349–355.

[13] J. H. Grace, A. Young, *The algebra of invariants*, Cambridge University Press, Cambridge 1903; there exists a reprint: Stechert & Co., New York 1941.

[14] J. M. Hoene- Wroński, *Introduction à la Philosophie des Mathématiques et Technie de l'Algorithmique*, Courcier, Paris 1811.

[15] J. M. Hoene- Wroński, *Résolution générale des équations de tous les degrés*, Klostermann, Paris 1812.

[16] J. M. Hoene- Wroński, *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, Blankenstein, Paris 1812.

[17] J. M. Hoene-Wroński, *Philosophie de la technie algorithmique: Loi Suprême et universelle; Réforme des Mathématiques*, Paris 1815–1817.

[18] J. M. Hoene-Wroński, *A course of mathematics, Introduction determining the general state of mathematics*, London 1821.

[19] J. M. Hoene-Wroński, *Canons de logarithms*, Didot, Paris 1824.

[20] J. M. Hoene-Wroński, *Réforme absolue et par conséquent finale du Savoir Humain. Tome I : Réforme des Mathématiques; Tome III : Résolution générale et définitive des équations algébriques de tous les degrés*, Didot, Paris 1847–1848.

[21] J. M. Hoene-Wroński, *Epitre Secrète à son Altesse le Prince Louis-Napoléon*, Dépôt des Ouvrages Messianiques, Metz 1851.

[22] J. M. Hoene-Wroński, *Wstęp do wykładu Matematyki*, transl. from French by L. Niedźwiecki, Biblioteka Polska, Quais d'Orleans 6, Paris 1880.

[23] J. M. Hoene-Wroński, *Kanony logarytmów*, transl. from French by S. Dickstein, Warszawa 1890.

[24] J. M. Hoene-Wroński, *Wstęp do Filozofii Matematyki oraz Technia Algorytmii,* transl. from French by P. Chomicz, Prace Towarzystwa Hoene-Wrońskiego, Inst. Wyd. "Biblioteka Polska", Warszawa 1937.

[25] J. M. Hoene-Wroński, *The legacy of Hoene-Wroński in the Kórnik Library* - see: www.bkpan.poznan.pl/biblioteka/index.html

[26] S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów 1936.

[27] D. Laksov, *Wronskians and Plücker formulas for linear systems on curves*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 17 (1984), 45–66.

[28] A. Lascoux, *Diviser!,* in: M. Lothaire, Mots, Mélanges offerts à M.-P. Schützenberger, Hermès, Paris 1990.

[29] A. Lascoux, *Wroński's factorization of polynomials*, in: Topics in Algebra, Banach Center Publ. 26, Part 2, PWN, Warszawa 1990, 379–386.

[30] A. Lascoux, *Symmetric functions and combinatorial operators on polynomials*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 99, Amer. Math. Soc., Providence 2003.

[31] A. Lascoux, P. Pragacz, *Double Sylvester sums for subresultants and multi-Schur functions*, J. Symbolic Comp. 35 (2003), 689–710.

[32] A. S. de Montferrier, *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées*, Paris 1834–1840.

[33] T. Muir, *A treatise on the theory of determinants*, London 1882; there exists a reprint: Dover, New York 1960.

[34] T. Muir, *The theory of determinants in the historical order development*, 4 volumes, Macmillan & Co., London 1906, 1911, 1920, 1923; there exists a reprint: Dover, New York 1960.

[35] T. Muir, *Contributions to the history of determinants*, 1900{1920, Blackie and Son, London, Glasgow 1930.

[36] R. Murawski, *Józef Maria Hoene-Wroński - filozof i matematyk*, Materiały konferencyjne Uniwersytetu Szczecińskiego, 30 (1998), 29–46.

[37] R. Murawski, *Genius or madman? On the life and work of J. M. Hoene-Wroński*, in: European mathematics in the last centuries (ed. W. Więsław), Wrocław 2005, 77–86.

[38] C. K. Norwid, *O Szopenie,* Fundacja Narodowego Wydania Dzieł Fryderyka Chopina, Łódź 1999.

[39] H. Ohsugi, T. Wada, *Gröbner bases of Hilbert ideals of alternating groups*, J. Symb. Comp. 41 (2006), 905–908.

[40] L. S. Pontrjagin, *Ordinary differential equations*, Mir, Moscow 1974 (in Russian).

[41] F. Schweins, *Theorie der Differenzen und Differentiale*, Heidelberg 1825.

[42] T. J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sc. Toulouse 8 (1894), 1–122.

[43] J. J. Sylvester, *A theory of the syzygetic relations of two rational integral functions,* Phil. Trans. Royal Soc. London CXLIII, Part III (1853), 407–548.

[44] T. N. Thiele, *Interpolationrechnung*, Teubner, Leipzig 1909.

[45] A. Transon, *Réflexions sur l'événement scientifque d'une formule publiée par Wroński en 1812 et démontrée par Cayley en 1873*, Nouvelles Annales de mathématiques 13 (1874), 161–174.

[46] A. Transon, *Lois des séries de Wroński. Sa phoronomie,* Nouvelles Annales de mathématiques 13 (1874), 305–318.

[47] F. Warrain, *L'œuvre philosophique d'Hoene-Wroński. Textes*, commentaires et critique, 3 volumes, Les Editions Vega, Paris 1933, 1936, 1938.