Status 15. problemu Hilberta w roku 1993

Piotr Pragacz[1]
Instytut Matematyczny PAN
ul. Chopina 12
87-100 Toruń

David Hilbert formułując swój 15. problem nie stawiał przed matematykami konkretnego zadania matematycznego. Apelował on raczej o stworzenie precyzyjnej teorii, która by pozwoliła na ścisłe uzasadnienie rachunków jakie w 2. połowie 19. wieku wykonał Hermann Schubert. Oto tłumaczenie tekstu Hilberta:

,,Problem polega na tym, aby otrzymać w ścisły sposób z dokładnym wyznaczeniem zakresu ich prawdziwości te liczby geometryczne, które Schubert wyznaczył w stworzonym przez siebie rachunku opierającym się głównie na tzw. zasadzie specjalnego położenia lub zachowania liczby."

Oto prosty (i standardowy) przykład na czym polega *zasada specjalnego położenia.* Rozważmy następujące zadanie:

Ile istnieje prostych przecinających 4 dane proste w $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ *?*

Aby rozwiązać to zadanie zmieniamy położenie 4 prostych tak by pierwsza przecinała drugą a trzecia czwartą. Wówczas istnieją dokładnie 2 proste przecinające dane 4 proste: prosta przechodząca przez punkty przecięcia 2 par prostych oraz prosta będąca punktem przecięcia 2 płaszczyzn rozpiętych przez 2 pary prostych. Zasada specjalnego położenia orzeka wówczas, że szukana liczba dla dowolnego układu 4 prostych w $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ jest równa 2 (o ile jest skończona).

O ile ta sytuacja jest raczej prosta, o tyle liczby: **666 841 048** kwadryk stycznych do 9 danych kwadryk w $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ oraz **5 819 539 783 680** skośnych krzywych stopnia 3 stycznych do 9 danych kwadryk w $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ uzyskane przy pomocy tej samej zasady, wydają się być bardziej intrygujące.

W rzeczy samej, Schubert aby rozwiązywać takie problemy jak te opisane wyżej stosował pewien intuicyjnie bardzo prosty aparat algebraiczny, którego zasady były następujące. Przypuśćmy, że interesujemy się zbiorem pewnych obiektów geometrycznych, w skrócie: figur. Każdemu geometrycznemu warunkowi nałożonemu na figurę przyporządkowujemy symbol algebraiczny. Wówczas nałożenie chociażby jednego z dwóch warunków przedstawiamy jako sumę odpowiadających im symboli, natomiast nałożenie dwóch niezależnych warunków interpretujemy jako iloczyn odpowiadających im symboli. Tak określone operacje dodawania i mnożenia są przemienne, łączne i spełniają prawo rozdzielności. Rozpatrywane figury zależą od pewnej liczby parametrów (mają pewien ,,stopień swobody"). Równość dwóch symboli oznacza, że odpowiadające im warunki ograniczają stopień swobody o tyle samo oraz dla dowolnego trzeciego warunku takiego, że moce zbiorów figur spełniających warunki pierwszy i trzeci oraz odpowiednio drugi i trzeci są liczbami skończonymi,

[1] W czasie pisania tej pracy autor był sponsorowany przez grant KBN No 2 P301 002 05.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

zachodzi równość tych dwóch ostatnich liczb. Zasada zachowania liczby orzeka, że zmieniając parametry warunku w sposób ciagły, symbol odpowiadającego warunku nie ulega zmianie.

Zilustrujmy ten algebraiczny rachunek Schuberta na przykładzie pierwszego z opisanych powyżej zadań. ,,Figurami" są tu proste w $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. ,,Warunki" nałożone na figurę ujęte są w następującej tabelce:

Symbol	Warunek	Stopień swobody
l	prosta przecina ustaloną prostą	3
l_P	prosta przechodzi przez ustalony punkt	2
l_π	prosta leży w ustalonej płaszczyznie	2
l_s	prosta przechodzi przez ustalony punkt i leży w ustalonej płaszczyźnie	1
$\lvert l \rvert$	prosta pokrywa sie z ustaloną prostą	0

Między tymi symbolami zachodzą następujące relacje algebraiczne:

$l_P^2 = |l|$: istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez 2 różne punkty,

$l_\pi^2 = |l|$: istnieje dokładnie jedna prosta w przecięciu 2 różnych płaszczyzn,

$l_P \cdot l_\pi = 0$: nie istnieje prosta, która jednocześnie leży na płaszczyznie i przechodzi przez punkt, który na tej płaszczyznie nie leży.

$l^2 = l_P + l_\pi$: przy wyprowadzeniu tej relacji stosuje Schubert zasadę specjalnego położenia. Symbol l^2 reprezentuje warunek: ,,prosta przecina 2 ustalone proste". Załóżmy, że te proste się przecinają. Mamy wówczas 2 możliwości: albo prosta przechodzi przez punkt przecięcia pary ustalonych prostych albo prosta leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez parę ustalonych prostych. Ponieważ tym dwóm warunkom odpowiadają symbole l_P oraz l_π, otrzymujemy żądaną relację.

Skoro $l^4 = (l_P + l_\pi)^2 = l_P^2 + 2l_P l_\pi + l_\pi^2 = 2|l|$, Schubert wnosi, że istnieją 2 proste przecinające 4 proste w $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ w położeniu ogólnym.

Zasada specjalnego położenia (lub zachowania liczby), pod jeszcze inną nazwą ,,zasady ciągłości" była po raz pierwszy świadomie użyta przez J.V. Ponceleta w roku 1822 do rozwiązania szeregu problemów geometrii rzutowej. Poncelet używał jej na prawach aksjomatu. Schubert, który uzyskał bez wątpienia najbardziej spektakularne rezultaty (liczby) stosując tę zasadę, wydawał się być świadom tego, że zasada ta powinna uzyskać przekonywujące algebro-geometryczne uzasadnienie. Było to na pewno spowodowane krytyką wielu matematyków przełomu 19. i 20. wieku skierowaną pod adresem tej zasady. Niewątpliwie kontrowersje te skłoniły Hilberta do sformułowania jakby ,,metamatematycznego" 15. problemu, którego myślą przewodnią było skonstruowanie teorii, w której owa zasada będzie logicznym wnioskiem (a nie aksjomatem).

Kilka pokoleń matematyków związało swą pracę z 15. problemem Hilberta. Wymieńmy nazwiska niektórych z nich (ta lista na pewno nie jest pełna): Schubert, Chasles, Severi, Zeuthen, Giambelli, Pieri, Halphen, van der Waerden, Poincaré, Kronecker, Lefschetz, Chow, Chevalley, Zariski, Weil, Hodge, Gröbner, Samuel, Hirzebruch, Serre, Grothendieck, Kleiman, Fulton, MacPherson, Quillen, Arakelov, Faltings, Gillet, Soulé ...

Język, który umożliwił precyzyjną i zgodną z dzisiejszymi standardami ścisłości odpowiedź na 15. problem Hilberta został wypracowany przez *geometrię algebraiczną* i *topologię algebraiczną.* W tym ujęciu ,,figury", o których mowa wyżej są to punkty pewnej *rozmaitości algebraicznej* (,,przestrzeni parametrów"). Warunek nałożony na figurę definiuje pewien podzbiór tej rozmaitości. Warunek jest *stopnia swobody i* jeżeli odpowiadający mu podzbiór ma – jako rozmaitość – *wymiar i.* Warunkom, które są niezależne odpowiadają podzbiory *w położeniu ogólnym.* Iloczyn niezależnych warunków odpowiada przecięciu odpowiadających podzbiorów (przy czym składowe takiego przekroju należy wyposażyć w odpowiednie krotności). Równość warunków odpowiada – w dzisiejszej terminologii – *numerycznej równoważności* odpowiadających podzbiorów.

Można więc powiedzieć, że 15. problem Hilberta składał się z grubsza z dwóch podproblemów:

1) precyzyjne skonstruowanie *przestrzeni parametrów* ("parameter spaces") dla rodzin figur występujących w problemach geometrii enumeratywnej (jest to proponowane tłumaczenie terminu "enumerative geometry"),
2) zbudowanie precyzyjnej *teorii przecięć* dla przestrzeni parametrów – lub ogólniej – rozmaitości algebraicznych i schematów Grothendiecka.

Przestrzenie parametrów

Konstrukcja przestrzeni parametrów była zadaniem subtelnym, na które było nałożonych szereg warunków. Załóżmy, że dana jest rodzina $\{X_\alpha\}$ podrozmaitości w $\mathbb{P}^n$ o ustalonych pewnych niezmiennikach (np wymiarze i stopniu). Zadanie polega na skonstruowaniu rozmaitości algebraicznej X, której punkty są w bijekcji ze zbiorem $\{X_\alpha\}$. Ale sama bijekcja nie wystarcza. Od przestrzeni parametrów żąda się ponadto, że gdy punkt zmienia się w sposób ciągły w X to współczynniki równań odpowiadającej podrozmaitości też zmieniają się w sposób ciągły. Poza tym jeżeli istnieje algebraiczna rodzina podrozmaitości w $\mathbb{P}^n$ to odpowiadający jej elementom podzbiór w X musi być podrozmaitością algebraiczną.

Istnieją zasadniczo 2 konstrukcje tego typu przestrzeni parametrów: *schematy Chow* i *schematy Hilberta.*

Schematy Chow (teoria ta została zbudowana przez W.L. Chow i B.L. van der Waerden) parametryzują efektywne *cykle* ustalonego wymiaru i stopnia leżące w ustalonej rozmaitości rzutowej.

Schematy Hilberta (teoria ta została zbudowana przez A. Grothendiecka) parametryzują domknięte *podschematy* ustalonej rozmaitości rzutowej posiadające ustalony *wielomian Hilberta-Samuela.* Obiekty te są wyposażone w tzw. ,,uniwersalne rodziny", z których każda inna rodzina podrozmaitości (z ustalonymi odpowiednimi dyskretnymi niezmiennikami) może być otrzymana za pomocą zamiany bazy.

Obie konstrukcje są dalece nieefektywne. Precyzyjny opis geometrii tych obiektów jest nadal atrakcyjnym problemem ogniskującym pracę wielu współczesnych geometrów algebraicznych. Dla przykładu podajmy, że nadal otwartym jest problem:

Ile składowych nieprzywiedlnych posiadają schematy Chow (odpowiednio Hilberta) krzywych w $\mathbb{P}^3$ *i jaki jest precyzyjny opis geometryczny tych składowych?*

Trudniejszym problemem jest parametryzacja klas izomorfizmu rozmaitości będących elementami pewnej rodziny rozmaitości, czyli tzw. problem ,,moduli". Tutaj technika geometrii rzutowej zastosowana przy konstrukcji schematów Chow i Hilberta okazuje się niewystarczająca. Geometryczna teoria niezmienników D. Mumforda a zwłaszcza pojęcie *stabilnosci* i *ilorazu geometrycznego* pozwoliły na skonstruowanie przestrzeni moduli dla pewnych rodzin rozmaitości. Dla przykładu, dla krzywych o ustalonym genusie g, sensowną przestrzeń moduli można zbudować dla krzywych spójnych, mających tylko punkty podwójne jako osobliwości oraz skończoną grupę automorfizmów. Ta przestrzeń moduli jest nieprzywiedlną rozmaitością rzutową wymiaru $3g-3$. Geometria przestrzeni moduli krzywych została wszechstronnie zbadana w pracach głównie J. Harrisa w latach 80-tych.

W latach 80-tych zostały skonstruowane przestrzenie parametrów pozwalające na precyzyjne uzasadnienie rachunków Schuberta, G.Z. Giambelli'ego i innych klasyków geometrii enumeratywnej dotyczące kwadryk, korrelacji, trójkątów itd. Są to tzw. przestrzenie *zupełnych kwadryk, korrelacji, trójkątów* itd., których konstrukcja często odwołuje się do teorii reprezentacji grup algebraicznych.

Teoria przecięć

Skoncentrujmy się teraz na jądrze 15. problemu Hilberta tzn. na konstrukcji teorii przecięć. Wydaje się, że pierwsza teoria spełniająca postulaty 15. problemu Hilberta pochodzi z topologii algebraicznej. Mianowicie van der Waerden pokazał, że *symplicjalna teoria homologii* rozwinięta przez S. Lefschetza w latach dwudziestych (i zainspirowana ideami H. Poincaré) spełnia postulaty wymagane od teorii przecięć. W topologii każdej podrozmaitości w bazowej (gładkiej) rozmaitości przyporządkowana jest jej *klasa kohomologii.* Ciągła deformacja danej podrozmaitości do innej nie zmienia tej klasy. Jeżeli 2 podrozmaitości znajdują się w położeniu ogólnym względem siebie to ich ,,kohomologiczny przekrój" dany jest przez $\cup-$*iloczyn* odpowiadających klas kohomologii. Zatem jeżeli kilka podrozmaitości w położeniu ogólnym przecina się w skończonej liczbie punktów to liczba tych punktów (licząc z krotnościami) nie zmienia się gdy parametry danych podrozmaitości zmieniają się w sposób ciągły, ponieważ ta liczba jest równa $\cup-$iloczynowi odpowiadających klas a te są niezmiennicze. To jest ,,kohomologiczne uzasadnienie" zasady zachowania liczby. Od czasów Lefschetza topologia algebraiczna wyprodukowała kilka innych teorii kohomologii spełniających postulaty 15. problemu Hilberta. Wymieńmy niektóre z nich : *homologie Borela-Moore'a, homologie de Rhama, K-teoria*; na szczególną uwagę zasługuje tu stworzona w latach 80-tych w pracach R. MacPhersona i M. Goreskiego *teoria homologii przecięć* – bardzo subtelne i silne narzędzie współczesnej geometrii i topologii.

Zajmijmy się nieco szczegółowiej teorią przecięć w geometrii algebraicznej.

Lata 50-te i 60-te

W tym okresie teoria przecięć była miejscem aktywnych badań geometrów algebraicznych zajmujących się konstruowaniem podstaw tej teorii. Pracowali nad nią: Chow, Serre, Chevalley, Grothendieck, Weil, Samuel, Hirzebruch, Kleiman - by wymienić nazwiska tylko kilku.

Wypracowana teoria dotyczyła rozmaitości gładkich i opierała się na dwóch składnikach: *lemacie Chow o przesuwaniu cykli* oraz na *teorii krotności* Serre'a.

Dokładniej, w grupie cykli wprowadza się relację *wymiernej równoważności* uznając dwa cykle za równoważne jeżeli jeden z nich można zdeformować do drugiego wzdłuż $\mathbb{P}^1$. Lemat Chow o przesuwaniu mówi wówczas, że jeżeli Y i Z sa cyklami na gładkiej rozmaitości X to istnieje cykl Z' wymiernie równoważny z Z taki, że Y i Z' znajdują się względem siebie w położeniu ogólnym. Ponadto jeżeli Z'' ma podobną własność co Z' to $Y.Z'$ oraz $Y.Z''$ są wymiernie równoważne. Operacja *przecinania cykli* jest nader subtelna ponieważ zaangażowane są w nią krotności. Jeżeli Y i Z są podrozmaitościami X w położeniu ogólnym względem siebie to $Y.Z = \sum i(Y, Z; W_j)W_j$, gdzie suma przebiega po składowych nieprzywiedlnych W_j przekroju Y i Z oraz

$$i(Y, Z; W) = \sum_j (-1)^j \text{ długość } \Big(Tor_j^{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/a, \mathcal{O}/b)\Big),$$

gdzie $\mathcal{O}$ jest pierścieniem lokalnym punktu ogólnego W na X, zaś a i b są ideałami Y i Z w $\mathcal{O}$.

W oparciu o te dwa narzędzia można stowarzyszyć z gładką rozmaitością X jej *pierścień Chow* $A(X)$ (z gradacją przez kowymiar), którego elementami są klasy wymiernej rownoważności cykli i w którym mnożenie indukowane jest przez operację przecinania cykli.

Idee Grothendiecka pozwoliły dostrzec w tej konstrukcji jej *charakter funktorialny*: przyporządkowanie $X \to A(X)$, jest funktorem z kategorii gładkich rozmaitości algebraicznych do kategorii pierścieni przemiennych z gradacją spełniających kilka warunków (pomijamy je tutaj), które go w pełni charakteryzyją. Rownież Grothendieckowi zawdzięcza geometria algebraiczna wprowadzenie doń *klas Cherna* stowarzyszonych z wiązkami wektorowymi. Wartości klas Cherna leżą w pierścieniu Chow i są jednym z podstawowych narzędzi rachunkowych współczesnej enumeratywnej geometrii algebraicznej.

Lata 70-te i 80-te

W tym okresie, dzięki przede wszystkim pracom W. Fultona i MacPhersona, została stworzona zadawalająca algebraiczna teoria przecięć dla *rozmaitości osobliwych.* Podstawowa technika *deformacji do wiązki normalnej* pojawiła się już we wcześniejszych pracach J.P. Jouanolou, A. Lascu-Mumforda-D.B. Scotta oraz M. Gerstenhabera, ale dopiero dwaj wymienieni wyżej autorzy uświadomili sobie że w oparciu o tę metodę można zbudować nową teorię przecięć, nie używającą lematu o przesuwaniu i prawdziwą także dla rozmaitości osobliwych. Jeżeli Y i Z są dwiema podrozmaitościami w (możliwie osobliwej) rozmaitości X, niekoniecznie w położeniu ogólnym względem siebie, to produkt $Y.Z$ w teorii Fultona i MacPhersona jest dobrze zdefiniowany „już” w sumie grup cykli modulo wymierna rownoważność stowarzyszonych z $\pi(C_i)$ gdzie C_i są składowymi nieprzywiedlnymi *stożka normalnego* $Y \cap Z$ w $Y \times Z$ a π jest projekcją $\pi : C \to Y \cap Z$. Szczegółowy wykład teorii przecięć dla rozmaitości osobliwych zawiera fundamentalna ksiażka Fultona "Intersection Theory", która jest encyklopedią tego co do roku 1984 zostało napisane na temat różnych aspektów 15. problemu Hilberta.

Wracając do przestrzeni parametrów - lata 80-te to okres intensywnej pracy nad ich pierścieniami Chow. W wielu wypadkach (przynajmniej *struktura addytywna* tych obiektów) może być opisana dzięki teorii *działań torusa* A. Białynickiego-Biruli. Jako ,,egzotyczną" ciekawostkę podajmy, że w swojej pracy nad enumeratywną geometrią trójkątów, A. Collino i Fulton znalezli 2 błędy w oryginalnych rachunkach Schuberta; o ile autorowi wiadomo, są to jedyne znalezione błędy wśród tysięcy liczb bedących produktem rachunkowego geniuszu Schuberta.

Wspołcześni geometrzy enumeratywni, skupieni głównie wokół S.Kleimana przy pomocy obecnie dostępnej teorii przecięć potwierdzili wiele liczbowych wyników Schuberta. Na przykład dwie intrygujące liczby wymienione na początku tego artykułu znalazły ścisłe uzasadnienie.

Twierdzenia typu Riemanna-Rocha

Są to centralne twierdzenia współczesnej teorii przecięć. Może dla celów tego artykułu najbardziej zasadne będzie sformułowanie tego twierdzenia w wersji F.Hirzebrucha. Jeżeli E jest wiązką wektorową nad gładką rozmaitością rzutową X to liczba $\sum(-1)^i \dim H^i(X,E)$ daje się wyliczyć jako stopień 0-wymiarowej składowej iloczynu $ch(E)\cdot Td(T_X)$ gdzie $ch(E)$, $Td(E)$ są następującymi elementami w $A(X)\otimes\mathbb{Q}$:

$$ch(E)=\sum_{i=1}^{r} exp(a_i) \quad , \qquad Td(E)=\prod_{i=1}^{r} a_i/(1-exp(-a_i));$$

r jest rangą E, a_i są *pierwiastkami Cherna* E a T_X jest *wiązką styczną* do X. Twierdzenie R-R w wersji Hirzebrucha zainspirowane było (poza klasycznymi sytuacjami gdy X jest krzywą albo powierzchnią) rachunkami J.E. Todda. Grothendieck podał, noszące znamiona geniuszu, uogólnienie powyższej równości dla *morfizmu własciwego* między dwiema gładkimi rozmaitościami. Twierdzenie R-R w wersji Grothendiecka orzeka o przemienności pewnego diagramu złożonego z K-grup i grup Chow. P. Baum, Fulton i MacPherson uogólnili twierdzenie R-R w wersji Grothendiecka na przypadek rozmaitości osobliwych. Kluczem do tego uogólnienia jest pewien wariant deformacji do wiązki normalnej znany pod nazwą *konstrukcji wykresu Grassmannianowego MacPhersona*, a wzmiankowana nowa wersja twierdzenia R-R sformułowana jest jako istnienie pewnej *naturalnej transformacji* między funktorem K i funktorem grup Chow.

Różne wersje twierdzenia R-R występują w wielu zastosowaniach enumeratywnej geometrii algebraicznej. Odnotujmy, że dzięki pracom P. Robertsa z ostatnich lat, twierdzenie R-R dla rozmaitości osobliwych pozwoliło na udowodnienie kilku ważnych ,,hipotez przecięć" w algebrze przemiennej.

Arytmetyczna teoria przecięć

Ta teoria została stworzona na początku lat 90-tych głównie przez H. Gilleta i Ch. Soulé. Stanowi ona rozwinięcie teorii przecięć S.J. Arakelova dla *powierzchni arytmetycznych* - pionierskiej pracy z poczatku lat 70-tych. Niewatpliwą inspiracją dla stworzenia arytmetycznej teorii przecięć był dowód *hipotezy Mordella* uzyskany przez G. Faltingsa przy pomocy teorii przecięć na powierzchniach arytmetycznych (przypomnijmy, że Faltings uhonorowany został za tę pracę medalem Fieldsa). Obiektami arytmetycznej teorii przecięć są *rozmaitości arytmetyczne: schematy*

Grothendiecka nad $\mathbb{Z}$. Odpowiednikiem grup Chow są *arytmetyczne grupy Chow*, które interpolują między ,,zwykłymi" grupami Chow oraz homologiami typu De Rhama z formami różniczkowymi zastąpionymi przez *strumienie* (ang. "currents") *Greena*. W tej teorii istnieją *arytmetyczne klasy Cherna* zdefiniowane dla *wiązek hermitowskich*, udowodnione jest *arytmetyczne twierdzenie Riemanna-Rocha-Hirzebrucha* (i prawdopodobnie wkrótce dowiedzione zostaną arytmetyczne twierdzenia R-R w wersji Grothendiecka i dla schematów osobliwych). Z arytmetycznego twierdzenia Riemanna-Rocha-Hirzebrucha można - jak to pokazali niedawno P. Vojta i Faltings - uzyskać nowe rezultaty oraz nowe, proste dowody starych twierdzeń w *teorii aproksymacji liczb algebraicznych*. Dokładniej, rezultaty uzyskane przez tych autorów obejmują: uogólnienie klasycznego twierdzenia Thue-Siegel-Dyson-Gel'fonda na przypadek krzywych genusu większego niż 1, nowy dowód hipotezy Mordella oraz rezultaty o skończoności liczby punktów wymiernych pewnych podrozmaitości *rozmaitości abelowych*. Wydaje się, że arytmetyczna teoria przecięć, bez wątpienia jeden z wiodących kierunków współczesnej geometrii algebraicznej, dostarczy jeszcze nie jednego zastosowania w teorii liczb.

Krzywe wymierne na hiperpowierzchni stopnia 5 w $\mathbb{P}^4$

Na zakończenie tego artykułu opiszemy pewne nowe wyzwanie przed jakim stanęła enumeratywna geometria algebraiczna końca 20. wieku. Wydaje się, że z wielu względów fenomen ten zasługuje na nazwę ,,nowego wcielenia 15. problemu Hilberta". H. Clemens w roku 1984 postawił hipotezę:

Na hiperpowierzchni stopnia 5 w położeniu ogólnym w $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ *istnieje tylko skończenie wiele krzywych wymiernych ustalonego stopnia.*

Ta atrakcyjna hipoteza stała się przedmiotem zainteresowania współczesnych geometrów algebraicznych ale uzyskane wyniki nie są rewelacyjne. Dowiedziono, że hipoteza jest prawdziwa dla stopni $\leqslant 7$, S. Katz obliczył, że dla stopnia 2 ta liczba wynosi **609 250** ; G. Ellingsrud i S.A. Strømme, używając techniki schematów Hilberta, wyznaczyli analogiczną liczbę dla stopnia 3: **317 206 375** (dla stopnia 1 ta liczba wynosi **2875** i może być obliczona przy pomocy klasycznego rachunku Schuberta).

Niespodziewany impuls w pracy nad tym problemem nadszedł z ... fizyki matematycznej na początku lat 90-tych. P. Candelas, X.C. de la Ossa, P.S. Green i L. Parkes - fizycy zajmujący się *teorią struny* wypisali tajemniczy szereg, którego współczynniki (po pewnym prostym przekształceniu) powinny dać liczby krzywych wymiernych kolejnych stopni leżących na hiperpowierzchni stopnia 5 w położeniu ogólnym w $\mathbb{P}^4$! Ich metoda wykorzystująca argumenty z teorii struny (zasada ,,symmetrii zwierciadlanej") oraz geometrii algebraicznej (przestrzenie moduli *rozmaitości Calabi-Yau*) nie jest do tej pory zrozumiała dla matematyków. Jak powiedział sir M. Atiyah (wykład w Max-Planck-Institut w Bonn, 1990) ,,ścisłe matematyczne uzasadnienie w/w rachunków Candelasa i spółki stanowi jedno z najważniejszych wyzwań dla geometrii algebraicznej końca 20. wieku". Dla przykładu postulowana liczba dla stopnia 10 wynosi:

704 288 164 978 454 686 113 488 249 750.

BIBLIOGRAFIA

Wcześniejsze opracowania poświęcone specjalnie 15. problemowi Hilberta:

Yu. Manin, O 15. problemie Hilberta, w *Problemy Hilberta* - zbiór artykułów pod redakcją P.S. Aleksandrova, Nauka, Moskwa 1969 (w j. rosyjskim).

S.L. Kleiman, Problem 15. Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 28, 1976.

Przestrzenie parametrów - dobrym wstępem jest wykład 21. w :

J. Harris, *Algebraic Geometry; a first course*, Springer 1992.

- tamże znajdują się bardziej szczegółowe referencje.

Algebraiczna teoria przecięć - dobrym wstępem są:

R. Hartshorne, Appendix A w *Algebraic Geometry*, Springer 1977.

W. Fulton, *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics No. 54 A.M.S., 1984.

Bardziej szczegółowe informacje można znaleźć w :

C. Chevalley, Anneaux de Chow et applications, Séminaire C. Chevalley, École Normale Superieure, Paris (1958).

W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer 1984

(oraz zawarta tamże bibliografia).

Reprezentatywną pozycją poświęconą współczesnej geometrii enumeratywnej jest:

S. Kleiman, A. Thorup (editors), *Enumerative Algebraic Geometry; Proceedings of the 1989 Zeuthen Symposium*, Contemporary Mathematics 123 A.M.S., 1991.

Twierdzenia typu Riemanna-Rocha:

F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer, 1966.

A. Borel, J.P. Serre, La théoreme de Riemann-Roch (d'après Grothendieck), Bull. Soc. Math. France, 86 (1958), 97-136.

P. Baum, W. Fulton, R. MacPherson, Riemann-Roch for singular varieties, Publ. Math. I.H.E.S. 45 (1975), 101-145.

Arytmetyczna teoria przecięć:

Ch. Soulé, *Lectures on Arakelov Geometry*, Cambridge University Press, 1992.

(oraz zawarta tamże bibliografia).

Ostatni rozdział:

P. Candelas, X.C. de la Ossa, P.S. Green, L. Parkes, A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory, Nuclear Phys.B, 359, (1991), 21-74.

G. Ellingsrud, S.A. Strømme, The number of twisted cubics curves on the general quintic threefold, Preprint of the Mathematics Department in Bergen, No. 63 (1992).