Piotr Achinger (pta@students.mimuw.edu.pl) 28 IV - 4 V 2007

# NIEWYMIERNOŚĆ $\zeta(3)$. DOWÓD APÉRY'EGO

Wśród liczb rzeczywistych liczby wymierne charakteryzują się tym, że nie można przybliżać ich „zbyt dobrze" innymi liczbami wymiernymi. Mówiąc ściśle, prawdziwy jest następujący

Lemat. *Jeśli $\alpha \in \mathbb{Q}$, to istnieje stała $C_\alpha$ taka, że dla $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ zachodzi nierówność*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C_\alpha}{q},$$

*o ile tylko $p/q \neq \alpha$.*

Jest on oczywisty; jest też również konsekwencją następującego błyskotliwego twierdzenia pochodzącego od Liouville'a

Twierdzenie. *Jeśli $\alpha$ jest rzeczywistym pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ o współczynnikach całkowitych, to istnieje stała $C_\alpha$ taka, że dla $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ zachodzi nierówność*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C_\alpha}{q^n},$$

*o ile tylko $p/q \neq \alpha$.*

*Dowód.* Wystarczy oczywiście dowieść prawdziwości twierdzenia dla $\frac{p}{q}$ dostatecznie bliskich $\alpha$. Przyjmijmy więc, że $|\frac{p}{q} - \alpha| < d$, gdzie $d$ jest tak dobrane, aby w przedziale $(\alpha - d, \alpha + d)$ nie było innych niż $\alpha$ pierwiastków wielomianu $w$. Zauważmy, że na mocy tw. Lagrange'a o wartości średniej mamy

$$\left|\frac{w\left(\frac{p}{q}\right) - w(\alpha)}{\frac{p}{q} - \alpha}\right| = |w'(\xi)| \leqslant \sup_{x \in (\alpha-3, \alpha+3)} |w'(x)| =: D_\alpha,$$

Stąd już widać, że skoro $w(\alpha) = 0$, wystarczy wziąć $C_\alpha = D_\alpha^{-1}$, gdyż $|w(\frac{p}{q}) - w(\alpha)| = |w(\frac{p}{q})| = \frac{c}{q^n}$, gdzie $c$ jest całkowite dodatnie. $\square$

Wniosek. *Jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz istnieją ciągi $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n > 0$, $p_n/q_n \neq \alpha$ oraz $\delta > 1$ takie, że*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = O(q_n^{-\delta}),$$

*to $\alpha$ nie jest liczbą algrebaiczną stopnia mniejszego niż $\delta$.*

**Dowód Apéry'ego** niewymierności $\zeta(3)$ polegał na znalezieniu takiej właśnie pary ciągów. Udało mu się uzyskać $\delta \approx 1.08$, co niestety nie pozwala na wnioskowanie o ewentualnym stopniu algebraiczności.

Jak łatwo zauważyć, sumy częściowe szeregu $\sum \frac{1}{n^3}$, wzięte jako wartości $p_n/q_n$, nie pozwalają na skorzystanie z powyższego wniosku. Istota dowodu tkwi w przyspieszeniu owej zbieżności przez stosowanie rozmaitych sztuczek. Pierwszym krokiem są następujące tożsamości:

Dla $1 \leqslant k < n$ zdefiniujmy

$$F(n, k) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n-k)\ldots(n+k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{k^2(n-k)\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}}.$$

Zauważmy teraz, że

**(1)** $F(n,k) = A(n,k) - A(n,k-1)$, gdzie

$$A(n,k) = \frac{(-1)^{k-1}k!^2}{n^2\cdot(n-k)\dots(n+k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{n^2(n-k)\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}},$$

**(2)** $F(n,k) = B(n,k) - B(n-1,k)$, gdzie

$$B(n,k) = \frac{(-1)^k k!^2}{2k^3\cdot(n-k+1)\dots(n+k)} = \frac{(-1)^k}{2k^3\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}}.$$

Korzystając z tych własności, na dwa sposoby obliczymy sumę $\sum_{1\leqslant k<n\leqslant N} F(n,k)$. Z jednej strony jest ona równa

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}F(n,k) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}(A(n,k)-A(n,k-1)) = \sum_{n=1}^{N}(A(n,n-1)-A(n,0)) = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^3\binom{2n}{n}} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3},$$

z drugiej zaś

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k+1}^{N}F(n,k) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k+1}^{N}(B(n,k)-B(n-1,k)) = \sum_{k=1}^{N}(B(N,k)-B(k,k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N}{k}\binom{N+k}{k}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^3\binom{2k}{k}}.$$

Stąd dostajemy tożsamość

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}.$$

# 1 Znalezienie ciągów $a_n$, $b_n$

Apéry wprowadził pomocniczą funkcję

$$C(n,k) = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}.$$

Zauważmy, że z powyższych rozważań wynika, że przy $n\to\infty$, $C(n,k)\to\zeta(3)$ jednostajnie względem $k$. Następujący lemat mówi o rzędzie wielkości mianowników liczb $C(n,k)$:

Lemat. $2\binom{n+k}{k}[1,\dots,n]^3C(n,k)$ *jest liczbą całkowitą.*

(Powyżej $[1,\dots,n]$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność liczb $1,2,\dots,n$)

*Dowód.* Wystarczy naturalnie wykazać, że liczby

$$\frac{\binom{n+k}{k}[1,\dots,n]^3}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}$$

są całkowite (dla $m\leqslant k\leqslant n$). Jednakże skoro

$$\frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{n+m}{m}} = \frac{\binom{n+k}{k-m}}{\binom{k}{m}},$$

wystarczy pokazać, że liczby

$$\frac{[1,\dots,n]^3}{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}$$

są całkowite. W tym celu zbadamy, z jakim wykładnikiem dana liczba pierwsza $p$ dzieli odpowiednio licznik i mianownik. Mamy

$$\mathrm{ord}_p[1,\ldots,n]^3 = 3\log_p n,$$

$$\mathrm{ord}_p\binom{x}{y} \leqslant \log_p x - \mathrm{ord}_p y,$$

$$\mathrm{ord}_p\left(m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}\right) \leqslant 3\mathrm{ord}_p m + \log_p n - \mathrm{ord}_p m + \log_p k - \mathrm{ord}_p m = \mathrm{ord}_p m + \log_p n - \log_p k \leqslant 3\log_p n,$$

co dowodzi całkowitości wszystkich składników. □

Następnie definiujemy

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 C(n,k), \quad b_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$$

i zauważamy, że z naszej uwagi o jednostajnej zbieżności liczb $C(n,k)$ wynika, że $a_n/b_n \to \zeta(3)$, a z lematu – że $2[1,\ldots,n]^3 a_n \in \mathbb{Z}$.

# 2 Równanie rekurencyjne

Naszym zadaniem będzie teraz wykazanie, że oba ciągi $a_n$ i $b_n$ spełniają liniową rekurencję

$$(n+1)^3 x_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)x_n + n^3 x_{n-1} = 0. \qquad (*)$$

Zacznijmy od $b_n$. Niech $\beta(n,k) = \binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$, tak aby $b_n = \sum_k \beta(n,k)$. Zauważamy, że

$$(n+1)^3\beta(n+1,k) - P(n)\beta(n,k) + n^3\beta(n-1,k) = B(n,k) - B(n,k-1),$$

gdzie tym razem

$$B(n,k) = 4(2n+1)(k(2k+1) - (2n+1)^2)\beta(n,k)$$

oraz $P(n) = 34n^3 + 51n^2 + 27n + 5$. To pozwala nam napisać

$$(n+1)^3 b_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)b_n + n^3 b_{n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\Big((n+1)^3\beta(k,n+1) - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)\beta(k,n) + n^3\beta(k,n-1)\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}(B(n,k) - B(n,k-1)) = B(n,n+1) - B(n,-1) = 0.$$

Jeśli chodzi o $a_n$, to jeszcze bardziej sztuczkowo pokazujemy, że

$$(n+1)^3\beta(n+1,k)C(n+1,k) - P(n)\beta(n,k)C(n,k) + n^3\beta(n-1,k)C(n-1,k) = A(n,k) - A(n,k-1),$$

gdzie tym razem

$$A(n,k) = B(n,k)C(n,k) + \frac{5(2n+1)(-1)^{k-1}k}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}.$$

Rekurencja (*) ma dwie poważne konsekwencje:

**Konsekwencja 1.** $|\frac{a_n}{b_n} - \zeta(3)| = O(b_n^{-2})$.

*Dowód.* Zauważmy, że z naszej rekurencji wynika, że $x_n := n^3(a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n)$ spełnia $x_n = x_{n+1}$, a zatem $x_n = a_1 b_0 - a_0 b_1 = 6$. Wobec tego

$$\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} \right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3 b_k b_{k-1}} = O(b_n^{-2}),$$

gdyż ciąg $b_n$ jest rosnący. □

**Konsekwencja 2.** $b_n = \Omega(\alpha^n)$, *gdzie* $\alpha = (1 + \sqrt{2})^4$.

*Dowód.* Można to łatwo wywnioskować, patrząc na

$$b_{n+1} = \frac{34n^3 + 51n^2 + 27n + 5}{(n+1)^3} b_n - \frac{n^3}{(n+1)^3} b_{n-1} = 0,$$

gdyż wielomian charakterystyczny równania $x_{n+1} = 34x_n + x_{n-1}$, czyli $W(x) = x^2 - 34x + 1$ ma pierwiastki $(1 + \sqrt{2})^4 = \alpha$ oraz $0 < (1 - \sqrt{2})^4 < \alpha$. □

# 3 Końcowe wnioski

Jesteśmy już przy końcu dowodu. Przypominamy sobie, że $a_n$ nie są całkowite, kładziemy więc

$$p_n = 2[1, \ldots, n]^3 a_n \qquad q_n = 2[1, \ldots, n]^3 b_n$$

i aby zakończyć dowód, wystarczy nam następująca informacja o asymptotyce $[1, \ldots, n]$:

Lemat. $[1, \ldots, n] \approx e^n$.

*Szkic dowodu.*

$$[1, \ldots, n] = \prod_p (\max\{p^k : p^k \leqslant n\}) = \prod_p p^{\lfloor \log_p n \rfloor} \approx \prod_{p \leqslant n} p^{\log_p n} = \exp \sum_{p \leqslant n} \log n = \exp \pi(n) \log n.$$

Jednakże wiadomo, że $\pi(n) \log n \approx n$ (twierdzenie o liczbach pierwszych), co kończy nasz dowód. □

Finalnie mamy

$$\left| \zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} \right| = O(\alpha^{-2n}), \qquad q_n = \Omega(\alpha^n e^{3n}),$$

i wystarczy nam sprawdzić, że $\alpha > e^3$. Wówczas zgodnie z zapowiedzią,

$$\delta = 1 + \frac{\log \alpha - 3}{\log \alpha + 3} = 1.080529 \ldots > 1.$$