

## UW, RRZJ 2005, kolokwium1

1. Proszę narysować obraz fazowy potoków dla podanych niżej równań różniczkowych na płaszczyźnie. Czy jest stabilność Lapunowa w 0 ? Jaki jest indeks w 0 ? Czy jest trajektoria okresowa ? (W zależności od  $\epsilon, c$  rzeczywistych w pkt b).)

a)  $x' = x^2, \quad y' = y;$

b)  $z' = z(i\omega + \epsilon + cz\bar{z}) \quad \omega, c, \epsilon \in R, \omega \neq 0.$

2. Niech  $\gamma$  będzie nieokresową trajekcją gładkiego potoku na płaszczyźnie, pola wektorowego nie mającego nieizolowanych zer. Pokazać, że  $\alpha(\gamma) \cap \omega(\gamma)$  jest albo zbiorem pustym, albo jednym punktem (zerem pola).

3. Pokazać, że jeśli  $X$  jest polem liniowym w  $R^n$ , dla którego 0 jest punktem stałym przyciągającym (ściekiem), to istnieje  $\delta > 0$  takie, że jeśli dla pola  $Y$  mamy  $\|DY\| < \delta$  na  $R^n$  lub  $\|Y\| < \delta$  na  $R^n$  i  $\|DY\| < \delta$  na kuli  $B(0, 1)$ , to potok pola  $X + Y$  nie ma orbit zamkniętych (trajektorii okresowych).

4. Pokazać, że jeśli trajektoria  $\gamma$  jest trajekcją homokliniczną siodła 0 dla gładkiego pola wektorowego  $X$  na płaszczyźnie (tzn  $\gamma$  jest jednocześnie w rozmaitości stabilnej i niestabilnej punktu 0), wartości własne  $DX$ ,  $\lambda < 0 < \mu$ , mają własność  $|\lambda| < |\mu|$  oraz w obszarze  $U$  ograniczonym powstałym z rozcięcia płaszczyzny krzywą  $\gamma$  i punktem 0 jest źródło, to w  $U$  jest trajektoria okresowa.

5. Dla jakich  $n$  trajektoria stała  $x = 0$  jest stabilna w sensie Lapunowa dla równania  $x'' = -x^n$  ? Narysować obraz fazowy.

6. Udowodnić, że jeśli przekształcenie monotoniczne, stopnia 1, okręgu w siebie, ma liczbę obrotu równą zero to ma punkt stały.