Uwagi/rozwiązania niektórych zadań z egzaminu pisemnego na MIMUW z RRZJ 31.01.2014

1.e) Oznaczmy $l_1 := \{x = 0, y \geq 0\}$, $l_2 := \{x = y \geq 0\}$, $l_3 := -l_1$, $l_4 := -l_2$. Oznaczmy sektory między półprostymi l_1 i l_2, między l_2 i l_3, między l_3 i l_4, między l_4 i l_1, odpowiednio przez I, II, III, IV. Wtedy trajektorie w I są skierowane w prawo w dół, w II w lewo w dół, i w III i IV odpowiednio symetrycznie. Z symetrii pola względem 0, możemy utożsamić każdy punkt (x, y) z $(-x, -y)$. Rozpatrujemy przekształcenie powrotu z l_1 do l_1. Wystarczy dzięki utożsamieniu rozpatrywać P przekształcenie przejścia z l_1 do l_3. Jeśli y jest odpowiednio duże to $P(y) \neq 0$. Dla y małego $P(y) = 0$, bo trajektoria nie może pokonać bariery W^s_{loc}.

Mamy wtedy $P(y) < y$, w przeciwnym przypadku byłaby trajektoria okresowa (Tw. Poincaré'go-Bendixsona). W konkluzji, dla każdego $z \neq 0$, dla $t \to \infty$ malenie argumentu $\alpha(\phi^t(z))$ jest ograniczone, a trajektoria dąży do 0. Dla $t \to -\infty$ przyrost argumentu jest nieograniczony bo trajektoria pokonuje kolejno sektory ... IV,III,II,I,IV,III,... .

Dla $t \to -\infty$ czasy przejścia kolejnych sektorów dążą do 0, jednak czas ucieczki do nieskończoności jest ∞ (dla $-V$). Wskazówka: wykorzystaj ograniczoność dywergencji V i obszary U_j: każdy ograniczony kawałkiem trajektorii wybranego punktu między punktami kolejnych dojść p_j i p_{j+1} do l_1 i odcinkiem $[p_j, p_{j+1}]$.

2. Oznaczmy przekształcenie w części a) przez f_1 a w części b) przez f_2.

W a) mamy punkt stały $x = 0$, więc liczbę obrotu 0. Dla innych x mamy $f_1(x) < x$. Dla $g(x) = f_1(x) - \epsilon$, dla $\epsilon > 0$, mamy więc $g(x) < x$ zatem liczbę obrotu ujemną. (wykres przestaje przecinać przekątną).

W b) mamy punkty stałe 1/4 i 3/4, więc liczbę obrotu 0, ale wykres przecina przekątną tak, że nie można tego przecięcia zniszczyć małym zaburzaniem. Zatem liczba obrotu jest 0 dla wszystkich małych zaburzeń f_2.

Zamiast 1/10 można wziąć $1/2\pi$, ale mniej nie, bo stracimy monotoniczność.

3. Dla a) indeks=5, dla b) indeks=0. Dla a) sytuacja jest podobna jak w Tw. Rouché w funkcjach analitycznych. Dodanie do z^5 małej w stosunku do niej blisko 0 funkcji $\bar{z}^6$ nie zmienia przyrostu argumentu.