MIMUW, RRZJ egzamin, 31 stycznia 2014. (w nawiasach liczba punktów)

1. Dla układu równań różniczkowych na płaszczyźnie R^2

$$x' = V_1(x,y) = -x + y,\ y' = V_2(x,y) = -e^x + e^{-x} + 2x$$

a) znaleźć izokliny $x' = 0$ i $y' = 0$ oraz zera pola $V = (V_1, V_2)$. (1)

b) Policzyć rozmaitości centralną w otoczeniu $0 \in R^2$, w postaci rozwinięcia Taylora jej wykresu w zerze, z dokładnością do rzędu 3. (2)

c) Czy 0 jest stabilne w sensie Lapunowa? Czy jest stabilne asymptotycznie? Czy lokalne rozmaitości stabilna i centralna w 0 są jednoznaczne? Przypomnieć wszystkie definicje, użyte w tym zdaniu. (2)

d) Czy istnieją trajektorie okresowe? (1)

e) Czy dla wszystkich punktów $z = (x,y) \in R^2$ (różnych od $0 \in R^2$) trajektorie potoku $\phi^t(z)$ pola V, tzn takie, że $\phi^0(z) = z$, są określone dla wszystkich czasów $t : -\infty < t < \infty$? Czy ciągła funkcja $\alpha(\phi^t(z))$ jest ograniczona? ($\alpha \in R$ oznacza argument punktu, nie brany $\mathrm{mod} 2\pi$) Naszkicować obraz (portret) fazowy potoku pola V na R^2. (3)

f) Dodaj do prawej strony równania na y' wyrażenie ϵy. Gdzie są zera pola w zależności od parametru ϵ? Dla jakich $\epsilon \approx 0$ punkt $0 \in R^2$ jest stabilny w sensie Lapunowa?

Opisz tę bifurkację. Narysuj obraz fazowy. (2)

Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o istnieniu lokalnej rozmaitości centralnej i o tym, że potok jest w otoczeniu zera, topologicznie równoważny potokowi dla pola wektorowego, będącego iloczynem kartezjańskim pola na rozmaitości centralnej i pola w otoczeniu swojego zera hiperbolicznego.

2. Jaka jest liczba obrotu dla przekształceń okręgu R/Z w siebie, postaci

a) $x \mapsto x + (1/10)(\cos(2\pi x) - 1)$ (mod 1),

b) $x \mapsto x + (1/10)\cos(2\pi x)$ (mod 1) ?

Czy można ją zmienić dowolnie małym zaburzeniem? (2)

3. Jaki jest indeks pola w $0 \in R^2$ równania różniczkowego

a) $z' = z^5 + \bar{z}^6$ (1) b) $x' = -x, y' = y^2$? (1)

4. Co to jest postać normalna i rezonans w zerze pola wektorowego? Czy dla układu równań $x' = x, y' = 2y + x^2$ można zmienić współrzędne dyfeomorfizmem klasy C^2 na otoczeniu zera tak, żeby w nowych współrzędnych otrzymać układ liniowy $x' = x, y' = 2y$? Czy można zmienić współrzędne homeomorfizmem tak, żeby potok pola tego układu w nowych współrzędnych stał się potokiem ww. układu liniowego? (3)

5. Sformułuj twierdzenie Siegela o równoważności potoku pola na torusie T^2 bez zer i bez orbit okresowych i potoku będącego zawieszeniem obrotu okręgu. Naszkicuj dowód. (3)

6. Dla układu równań różniczkowych na R^2 postaci $x' = \cos y, y' = -\cos x$, znajdź całkę pierwszą i znajdź zera. Które z nich są siodłami, źródłami, ściekami, centrami? Narysuj obraz (portret) fazowy. (3)