MIMUW, egzamin RRZJ, sesja poprawkowa, marzec 2014
(w nawiasach liczba punktów).
Zadania i rozwiązania lub wskazówki do rozwiązań.

1. Dla układu równań różniczkowych na płaszczyźnie R^2, dla dowolnej stałej $A \in R$,

$$x' = V_1(x, y) = Ay + x^2, \; y' = V_2(x, y) = -y - x^2$$

a) znaleźć izokliny $x' = 0$ i $y' = 0$ oraz zera pola $V = (V_1, V_2)$ (w zależności od A) (1)

b) Policzyć rozmaitości centralną w otoczeniu $0 \in R^2$, w postaci rozwinięcia Taylora jej wykresu w zerze, z dokładnością rzędu 2. (2)

c) Czy dla $A \neq 1$ punkt 0 jest stabilny w sensie Lapunowa? Czy lokalne rozmaitości stabilna i centralna w 0 są jednoznaczne? Przypomnieć wszystkie definicje, użyte w tym zdaniu. (2)

d) Dla stałej $A = 1$ znaleźć lokalną rozmaitość centralną w otoczeniu $0 \in R^2$ dokładnie. Czy jest jednoznaczna? Czy 0 jest stabilne w sensie Lapunowa? Czy jest stabilne asymptotycznie? Narysować obraz fazowy potoku pola V na R^2. Czy istnieją trajektorie okresowe? Czy któreś trajektorie uciekają do nieskończoności w skończonym czasie? (3)

2. Jaka jest liczba obrotu dla przekształcenia f okręgu R/Z w siebie, postaci $[0, 1] \ni x \mapsto 4(x - \frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2}$ (mod 1). Dla jakich a przekształcenie $[0, 1] \ni x \mapsto 4(x - \frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2} + a$ (mod 1), ma liczbę obrotu równą 0 ? (2)

3. Jaki jest indeks pola w $0 \in R^2$ równania różniczkowego:
a) $z' = z^5 \bar{z}^6$ (1) b) $x' = x^3, \; y' = -y$? (1)

4. Dla układu równań różniczkowych na R^2 postaci $x' = \cos y, y' = -2x$, znajdź całkę pierwszą i znajdź zera. Które z nich są siodłami, które centrami? Czy w tych zerach jest jakiś rezonans? Narysuj obraz (portret) fazowy. (3)

5. Co to jest bifurkacja Hopfa? Co to miękka i ostra utrata stabilności? Co to znaczy, że jest uniwersalna? (3)

Rozwiązania i wskazówki

Ad. 1. a) Dla $A = 1$ zera pola V to zbiór $\{y = -x^2\}$, dla innych A to tylko punkt $(0, 0)$.

b) Rozwinięcie Taylora rzędu 2 lokalnej rozmaitości centralnej W^c to $y = -x^2$ niezależnie od A.

c) We współrzędnej x na W^c otrzymujemy $x' = (1 - A)x^2 + O(|x|^3)$, co dla $A \neq 1$ ma obraz fazowy taki jak $x' = (1 - A)x^2$. Brak stabilności Lapunowa (po stronie słabego odpychania). Brak jednoznaczności W^c (od strony słabego przyciągania).

d) Dla $A = 1$ mamy $W^c = \{y = -x^2\}$ w otoczeniu $(0, 0)$, bo z definicji ma to być rozmaitość niezmiennicza, styczna do podprzestrzeni własnej odpowiadającej części widma różniczki pola w zerze, z częścią rzeczywistą 0, tu dokładnie 0. Jest jednoznaczność W^c. Jest stabilność Lapunowa, nie ma asymptotycznej.

Ad.2. W wersji podanej na egzaminie zabrakło $[0,1] \ni x$. Bez tego, sformułowanie nie ma sensu bo podany wzór zależy od n dla $x+n$ nawet mod 1, nie przedstawia więc przekształcenia okręgu.

Dla $f_a(x) := 4(x-\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2} + a$ liczba obrotu jest 0 dla $a \in [-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}]$, bo warunkiem jest istnienie rozwiązania równania $f_0(x)+a = x$, a $\inf_{x\in[0,1]} f_0(x)-x = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ (analogicznie: $\sup ... = +...$). Najłatwiej to policzyć zmieniając zmienne $w = x - \frac{1}{2}$ i wtedy mamy dla $w \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ funkcję $w \mapsto 4w^3 + a$.

Ad.3. a) -1, b) -1.

Dla a) warto zauważyć, że $z^5\bar{z}^6 = |z|^{10}\bar{z}$. Dla obliczenia indeksu, czynnik $|\cdot|$ nie ma znaczenia bo i tak dzieli się przez niego.

Dla b) obrazek jest jak dla siodła.

Ad. 4. Całka pierwsza to $H(x,y) := \sin y + x^2$. Mamy układ hamiltonowski z hamiltonianem H. Mamy siodła w punktach $(0, \pi/2 + 2\pi n)$ i centra w $(0, -\pi/2 + 2\pi n)$. Kolejne siodła są połaczone separatrysami, poziomicami $\{H = 1\}$. Zbiór $\{H < 1\}$ rozpada się na wyspy wokół centrów, wypełnione trajektoriami okresowymi. We wszystkich punktach równowagi (zerach pola) są rezonanse, np. $2\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1$.