dr hab. Aleksander Wojna

Politechnika Koszalińska

E-mail: `avoina@hotmail.com`

Metody asymptotyczne w analizie markowskich modeli ubezpieczeniowych

Niniejszy referat poświęcony jest zastosowaniu granicznych twierdzeń teorii procesów stochastycznych do rozwiązywania praktycznych problemów matematyki finansowej. Przedmiotem analizy w referacie jest firma ubezpieczeniowa, której funkcjonowanie można opisać w sposób następujący: firma oferuje m różnych typów ubezpieczeń i dla każdego z nich tworzy odrębny fundusz ubezpieczeniowy. Czas trwania umów ubezpieczeniowych dla wszystkich typów ubezpieczeń jest ten sam, natomiast procesy stochastyczne związane ze strumieniami finansowymi (tzn. strumieniami pozwów od indywidualnych klientów oraz strumieniami odpowiednich odszkodowań ubezpieczeniowych) charakteryzują się tym, że aktualny ich stan pozwala opisać ewentualną przyszłość bez względu na ich trajektorie z przeszłości. W praktyce podobne markowskie modele są dość rozpowszechnione [1], dlatego aktualny jest problem rozpracowania metod dla ich analizy.

Rozpatrywany w referacie model matematyczny opisujący funkcjonowanie firmy ma następującą strukturę: jest to punktowy proces stochastyczny $\boldsymbol{w}(k) = (x(k), \tau(k), s(k))$, $k = 1, 2, \ldots$, którego współrzędna $x(k) \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$ określa typ ubezpieczenia kolejnego pozwu, współrzędna $\tau(k) \in [0, +\infty)$ wyznacza moment jego wpłynięcia, natomiast współrzędna $\xi(k) \in [0, +\infty)$ informuje o wysokości odszkodowania. Przy tym $x(k)$, $k = 0, 1, \ldots$ jest jednorodnym skończonym łańcuchem Markowa z dyskretnym czasem,

$$\tau(k) = \sum_{t=1}^{k} \eta_{x(t)}^{(t)}, \quad s(k) = \xi_{x(k)}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $\{(\eta_j^{(t)}, \xi_j^{(t)}) : j \in J,\, t = 1, 2, \ldots\}$ oznacza rodzinę niezależnych dla różnych t, niezależnych od łańcucha Markowa $x(k)$ zmiennych losowych, których rozkład nie zależy od t. Zakłada się, że znany jest czas T trwania umów ubezpieczeniowych, rozkład wektorów losowych $\{(\eta_j^{(k)}, \xi_j^{(k)}) : j \in J\}$, dana jest macierz prawdopodobieństw przejścia łańcucha $x(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, w jednym kroku oraz jego początkowy rozkład. Funkcja ryzyka $\varphi(T, \boldsymbol{M})$ modelu, gdzie $\boldsymbol{M} = (M_1, M_2, \ldots, M_m)$, jest wektorem poziomów funduszy ubezpieczeniowych, definiuje się jako prawdopodobieństwo niewykonania przez firmę swoich zobowiązań wobec klientów [2]. Sterowanie ryzykiem polega na określeniu wektora M w taki sposób, aby $\varphi(T, \boldsymbol{M}) \le \alpha$, gdzie α jest ustalonym przez firmę dopuszczalnym poziomem ryzyka.

W referacie zaproponowana została przybliżona metoda rozwiązania tego problemu, polegająca na wyodrębnieniu w strukturze M_j dwóch składników:

$$M_j = M_j^{(0)} + \Delta M_j, \quad j \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

gdzie składnik $M_j^{(0)}$ oznacza minimalną netto-premię, określoną na podstawie zasady równości finansowej odpowiedzialności ubezpieczonego oraz ubezpieczyciela, natomiast premia za ryzyko ΔM_j gwarantuje właściwy poziom ryzyka α. Zakładając, że liczba klientów firmy jest dość duża, oraz wielkość pojedynczych odszkodowań jest nieistotna w porównaniu z wielkością funduszu, dokonuje się asymptotycznej analizy modelu [3], natomiast wartości $M_j^{(0)}$ i ΔM_j przybliżonego rozwiązania określane są na podstawie modelu granicznego.

Literatura

[1] H. Wolthuis, *Life Insurance Mathematics. The Markovian Model* CAIRE, Brussels 1994.

[2] О. А. Война, *Функцiя ризику для багатовимiрної моделi страхування* (PDMU-2008), Kyiv-Rivne, Ukraine, Abstracts, 2008, 78–80.

[3] В. В. Анисимов, А. А. Война, *О случайной остановке многомерных процессов*, Доклады АН УССР, Сер. А, 1977, №9, 771–775.