mgr Adam Bohonos
Politechnika Szczecińska
Instytut Matematyki
E-mail: abohonos@ps.pl

Punkty zębate i moduł zębatości w przestrzeniach Orlicza

Niech $S(X)$ (odpowiednio $B(X)$, $B(X)^0$) oznacza sferę jednostkową (odpowiednio domkniętą kulę jednostkową, otwartą kulę jednostkową) w przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|_X)$.

Punkt $x \in S(X)$ nazywamy *punktem zębatym* ($x \in \delta_d B(X)$) jeżeli $x \notin \overline{co}\{B(X) \setminus [x + \varepsilon B(X)^0]\}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Pojawia się pytanie: Jaka jest odległość między x a $\overline{co}\{B(X) \setminus [x + \varepsilon B(X)^0]\}$? Dlatego dla dowolnego $x \in S(X)$ w naturalny sposób zdefiniujemy funkcję $\delta : [0,2] \times S(X) \to [0,2]$ jako

$$\delta_{X,d}(\varepsilon, x) = \inf\left\{\|x-y\|_X : y \in \overline{co}\{B(X) \setminus [x + \varepsilon B(X)^0]\}\right\}$$

oraz nazwiemy tę funkcję *modułem zębatości* punktu x.

Niech X będzie funkcyjną przestrzenią Banacha na przestrzeni miarowej (Ω, Σ, μ). Mówimy, że przestrzeń X ma własność Radona-Nikodýma ($X \in RNP$), jeżeli dla dowolnej miary wektorowej $m : \Sigma \to X$ absolutnie ciągłej względem μ i o skończonej wariacji, istnieje $f \in L^1_X(\Omega, \Sigma, \mu)$ taka, że dla dowolnego $A \subset \Sigma$ mamy $m(A) = \int_A f\, d\mu$.

Odwzorowanie $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ nazywamy *funkcją Orlicza*, jeżeli jest parzyste, wypukłe, lewostronnie ciągłe na całym $\mathbb{R}_+$, $\Phi(0) = 0$ oraz Φ nie jest tożsamościowo równe zeru.

Dla dowolnej funkcji Orlicza Φ możemy zdefiniować na $L^0(T)$ wypukły funkcjonał

$$I_\Phi(x) = \int_T \Phi(x(t))\, d\mu.$$

Zdefiniujmy *przestrzeń Orlicza* L_Φ generowaną przez funkcję Orlicza Φ jako

$$L_\Phi = \left\{x \in L^0(T) : I_\Phi(cx) < \infty \text{ dla pewnego } c > 0 \text{ zależnego od } x\right\}.$$

Przestrzeń Orlicza wyposażamy zazwyczaj w *normę Luxemburga*

$$\|x\|_\Phi = \inf\left\{\varepsilon > 0 : I_\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \le 1\right\}$$

lub w normę równoważną

$$\|x\|_\Phi^0 = \inf_{k>0} \frac{1}{k}(1 + I_\Phi(kx))$$

nazywaną *normą Orlicza* w postaci *Amemiya*.

Rozpatrzymy przestrzeń $L^1 + L^\infty$ z normą

$$\|x\|_{1+\infty} = \inf\left\{\|y\|_1 + \|z\|_\infty : y + z = x,\ y \in L^1,\ z \in L^\infty\right\}.$$

Jest to przestrzeń Orlicza z normą Orlicza generowana przez funkcję

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |u| \le 1 \\ |u| - 1 & \text{dla } |u| > 1 \end{cases}$$

Pokażemy związek między punktami zębatymi a własnością Radona-Nikodýma.

Pokażemy związek między punktami zębatymi oraz modułem zębatości.

Podamy charakteryzację punktów zębatych w przestrzeni $L^1 + L^\infty$ oraz podamy moduł zębatości dla wszystkich punktów zębatych w tej przestrzeni.