dr inż. Zenon Zbąszyniak
Politechnika Poznańska
Instytut Matematyki

Wypukłość i gładkość funkcyjnych przestrzeni Musielaka–Orlicza

W pracy zostały zestawione kryteria ścisłej wypukłości i gładkości dla przestrzeni funkcyjnych Musielaka–Orlicza z normą Luxemburga. Podstawowe pojęcia występujące w pracy scharakteryzowano poniżej.

Niech X^* oznacza przestrzeń sprzężoną do przestrzeni Banacha X, $B(X)$ kulę jednostkową i $S(X)$ sferę jednostkową w X.

Niech A będzie wypukłym podzbiorem przestrzeni X. Punkt $x \in A$ nazywamy *punktem ekstremalnym* zbioru A, gdy dla dowolnych $y, z \in A$ równość $x = (y+z)/2$ implikuje $y = z$.

Przestrzeń X nazywamy *ściśle wypukłą*, gdy zbiór wszystkich punktów ekstremalnych kuli $B(X)$ jest równy sferze $S(X)$.

Funkcjonał $f \in S(X^*)$ nazywamy *funkcjonałem podparcia* w punkcie $x \in S(X)$, gdy $f(x) = \|x\| = 1$.

Punkt $x \in S(X)$ nazywamy *punktem gładkości* przestrzeni X, gdy istnieje dokładnie jeden funkcjonał podparcia w tym punkcie.

Przestrzeń X nazywamy *gładką*, gdy wszystkie jej punkty różne od zera są punktami gładkości.

Dla dowolnej funkcji Musielaka–Orlicza Φ definiujemy na L^0 funkcjonał I_Φ wzorem $I_\Phi(x) = \int_T \Phi(t, x(t))\, d\mu$.

Przestrzeń *Musielaka–Orlicza* określamy jako zbiór elementów $x \in L^0$, dla których $I_\Phi(\lambda x) < +\infty$ przy pewnym $\lambda > 0$ zależnym od x.

W przestrzeni tej wprowadzamy tzw. *normę Luxemburga* postaci

$$\|x\|_\Phi = \inf\{\lambda > 0 : I_\Phi(x/\lambda) \le 1\},$$

przy której przestrzeń Musielaka–Orlicza jest przestrzenią Banacha.