Margareta Wiciak
Politechnika Krakowska
Instytut Matematyki

Modelowanie aktuatorów piezoelektrycznych o dowolnym kształcie

Jedną z nowoczesnych metod tłumienia drgań płyty jest zastosowanie elementów piezoelektrycznych. Gdy przykładamy odpowiednio napięcie do przeciwległych powierzchni elementu piezoelektrycznego, doznaje on odkształcenia. Przy wystarczająco dużej energii element taki, naklejony na drgającą powierzchnię, może zmieniać charakterystkę całego układu.

Rozważmy równanie drgań giętnych płyty postaci

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} w(t) + D\Delta^2 w(t) = f(t),$$

gdzie $w(t,x,y)$ oznacza przemieszczenie punktu (x,y) płyty w chwili t, f – wymuszenie, stała D jest walcową sztywnością płyty na zginanie, μ – gęstością płyty na jednostkę powierzchni. Załóżmy, że po obu stronach płyty przyklejono aktuatory piezoelektryczne, zasilane zmiennym napięciem V. W przypadku aktuatorów prostokątnych $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le x \le x_2, y_1 \le y \le y_2\}$ momenty wewnętrzne indukowane przez aktuator można zapisać wzorem

$$m_x = m_y = C_0 \epsilon_{pe} \left([H_{x_1} - H_{x_2}] \otimes [H_{y_1} - H_{y_2}] \right),$$

gdzie $C_0 = E_p IK$, $E_p I$ oznacza sztywność płyty na zginanie, K jest stałą geometryczną zależną od grubości płyty i elementu piezoelektrycznego. H_{x_i} jest funkcją Heaviside'a, $[H_{x_i}]$ oznacza dystrybucję regularną generowaną przez funkcję H_{x_i}, tzn.

$$[H_{x_i}](\varphi) = \int_{\mathbb{R}} H_{x_i}(x)\varphi(x)dx = \int_{x_i}^{\infty} \varphi(x)dx \quad \text{dla } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

zaś $\otimes$ iloczyn tensorowy dytrybucji. W tej sytuacji wymuszenie pochodzące od rozważanego aktuatora wyraża się

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2},$$

przy czym pochodne rozumiane są jako pochodne dystrybucji.

W przypadku aktuatora o bardziej dowolnym kształcie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \le x \le x_2, f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$, gdzie f_1, f_2 są diffeomorfizmami klasy $\mathcal{C}^\infty$, momenty wewnętrzne wygodnie jest również opisać w podobnej postaci, tj. jako iloczyn dystrybucji

$$[H_{x_1} - H_{x_2}] \circ [H_{f_1(x)} - H_{f_2(x)}],$$

przy czym iloczyn $\circ$ musi być rozumiany w pewnym uogólnionym sensie. W referacie przedstawimy definicję takiego iloczynu oraz problemy, jakie się pojawiają przy rozważaniu szerszej klasy dystrybucji.