Tomasz Tkaliński
Uniwersytet Warszawski

Miara ryzyka optymalna ze względu na wymogi kapitałowe

Rozważmy pewien model rynku $\mathcal{M}$ na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Niech $\mathcal{L} = \{X_k : k = 1, \ldots, M\}$ będzie ustalonym skończonym podzbiorem zbioru pozycji ryzykownych osiągalnych w tym modelu. Przy pomocy dowolnego $X_k \in \mathcal{L}$ inwestor może zająć pozycję spekulacyjną w ten sposób, że wystawia instrument X_k, a zabezpiecza jedynie jego część $X_k \mathbb{I}_{A_k}$, gdzie zbiór $A_k \in \mathcal{F}$ charakteryzuje oczekiwania inwestora, co do rozwoju sytuacji rynkowej, tzw. *view*. To prowadzi do sumarycznej pozycji $Z_k = X_k(\mathbb{I}_{A_k} - 1)$. Niech $\tilde{\mathcal{L}} = \{Z_k : k = 1, \ldots, M\}$. Ustalmy miarę probabilistyczną μ t. że $\mu(\tilde{\mathcal{L}}) = 1$. Intuicyjnie: $\mu(\{Z_k\})$ oznacza prawdopodobieństwo, z jakim inwestor zajmie pozycję Z_k. Zgodnie z postanowieniami Umowy Kapitałowej Basel II dla każdej ryzykownej pozycji Z_k trzeba utrzymywać stosowne zabezpieczenie $R(\rho(Z_k))$, gdzie ρ jest pewną miarą ryzyka, a R operatorem wymogu kapitałowego. W myśl postanowień konwencji bazylejskiej metodologia pomiaru ryzyka utożsamiona w tej pracy z ρ może być zaprojektowana i zaimplementowana przez uczestnika rynku, pod warunkiem, że spełnia pewne standardy bezpieczeństwa. Natomiast wielkość wymogu kapitałowego R dla danej dopuszczalnej metodologii ρ i dowolnej pozycji Z_k jest określana przez regulatorów rynku. Niech $\mathcal{A}$ oznacza zbiór miar ryzyka spełniających standardy bezpieczeństwa. R przyporządkowuje mierze ryzyka ρ wielkość zabezpieczenia $R(\rho)$. Zauważmy, że zarówno ρ, jak i $R(\rho)$ są funkcjami zdefiniowanymi na zbiorach zmiennych losowych, więc jest naturalne, by określić operator $R : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Celem ustalonego inwestora jest minimalizacja wymogów kapitałowych, a przez to uwolnienie jak największych środków w celach spekulacyjnych. Korzystając z MPWL Kołmogorowa pokazujemy, że, aby osiągnąć ten cel, warto rozważać zagadnienie minimalizacji średniego wymogu kapitałowego:

$$\min_{\rho \in \mathcal{A}_{\bar{\alpha}}} ACR(R, \rho, \mu) = \sum_{k=1}^{M} R(\rho(Z_k))\mu(\{Z_k\}), \tag{1}$$

gdzie μ jest określoną powyżej miarą oczekiwań oraz dla ustalonego $\bar{\alpha}$ przyjmujemy

$$\mathcal{A}_{\bar{\alpha}} = \{VaR_\alpha,\ TCE_\alpha,\ WCE_\alpha,\ ES_\alpha,\ \mathcal{M}_{\phi,c},\ c \in [0,1],\ \phi \in \mathbb{H}\},$$

przy czym $\mathbb{H}$ jest klasą funkcji taką, by dla $\phi \in \mathbb{H}, c \in [0,1]$ funkcja $\mathcal{M}_{\phi,c}$ była spektralną miarą ryzyka. Ponadto *ES — Expected Shortfall*, *WCE — Worst Conditional Expectation*, *TCE — Tail Conditional Expectation*, *VaR — Value at Risk*. Następnie omawiamy kwestię przyjęcia naturalnych (szczególnie, jeżeli $\mathcal{M}$ jest modelem rynku obligacji) założeń odnośnie rozkładów zmiennych $Z_k \in \tilde{\mathcal{L}}$.

Ukoronowaniem pracy są dwa główne twierdzenia, w których pokazujemy, że przy pewnych dodatkowych, spełnionych zwykle w praktyce założeniach, w przypadku $R = Id$ (co ma sens ekonomiczny, gdy zbiór $\mathcal{A}$ jest tak dobrany, by $\rho(Z)$ można było traktować jako zabezpieczenie Z), zagadnienie (1) posiada rozwiązanie, które jest pewną spektralną miarą ryzyka.