mgr Artur Bator, dr hab. Wiesław Zięba
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

O wypukłości przestrzeni elementów losowych

Przedmiotem badań były elementy losowe przyjmujące wartości w ośrodkowej, zupełnej przestrzeni metrycznej (bez struktury liniowej).

Przez (S, ρ) oznaczmy przestrzeń metryczną polską. Odwzorowanie $X : \Omega \to S$ takie, że $X^{-1}(\zeta) \subset \mathcal{A}$, nazywamy elementem losowym. Rozpatrujemy zbiór wszystkich elementów losowych o wartościach w przestrzeni S ($\mathcal{X}_S$). Na tym zbiorze możemy również wprowadzić metrykę Ky Fana:

$$r(X, Y) = \inf\{\varepsilon > 0 : P(\rho(X, Y) > \varepsilon) < \varepsilon\}$$

Zbieżność według tej metryki jest równoważna zbieżności według prawdopodobieństwa.

Dążymy do zdefiniowania wartości oczekiwanej dla elementu losowego, tzn. poszukujemy warunków zapewniających istnienie funkcjonału $E : \mathcal{X}_S \to S$ ($E : \mathcal{X}_S \to \hat{S}$, gdzie $\hat{S}$ oznacza przestrzeń podzbiorów zbioru S), który posiadałby pewne własności wartości oczekiwanej.

Badamy własność wypukłości w sensie Dossa zadaną warunkiem

$$\forall\,(x_1, x_2 \in S)\,\exists\,(t \in S)\,\forall\,(z \in S) : \quad \rho(z, t) \leq \frac{1}{2}\left(\rho(x_1, z) + \rho(x_2, z)\right).$$

Warunek ten jest warunkiem koniecznym istnienia wartości oczekiwanej w sensie Dossa elementu losowego o wartościach w przestrzeniach metrycznych.

W. Zięba pokazał, że jeśli zupełna i ośrodkowa przestrzeń metryczna (S, ρ) jest wypukła, to $(\mathcal{X}_S, r)$ jest również wypukła, podobnie jak zbiór miar probabilistycznych $\mathcal{P}(S)$ z metryką Levy-Prochorowa jest wypukłą przestrzenią metryczną.

Zaprezentujemy przykłady pokazujące, że własność wypukłości w sensie Dossa nie zachodzi w przestrzeni elementów losowych z metryką Ky Fana. Pokażemy ponadto metrykę, która zachowuje własność wypukłości w sensie Dossa w przestrzeni elementów losowych (pod dodatkowymi warunkami).

Literatura

[1] W. Zięba, *On some properties of a set of probability measures*, Acta Math. Hung. 49 (1987), 349–352.

[2] W. Herer, *Mathematical expectation and martingales of random subsets of a metric space*, Prob. and Math. Stat. 11 (1991), 291–304.

[3] W. Herer, *Mathematical expectation and strong law of large numbers for random variables with values in a metric space of negative curvature*, Prob. and Math. Stat. 13 (1992), 59–70.

[4] A. V. Skorokhod, *Limit theorems for stochastic processes*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 1 (1956), 289–319.

[5] P. Teran, I. Molchanov, *The law of large numbers in a metric space with a convex combination operation*, J. Theoret. Probab. 19 (2006), 875–897.