dr Marian Liskowski
Politechnika Poznańska, Instytut Matematyki
E-mail: `marian.liskowski@put.poznan.pl`

Przestrzenie Sobolewa „z mieszanymi funkcjami”

Niech $T = (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$ oraz niech $L(T)$ będzie przestrzenią funkcji rzeczywistych określonych na T, całkowalnych w sensie Lebesgue'a z równością prawie wszędzie. Niech funkcje $\varphi : (a,b) \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ i $\psi : (c,d) \times \mathbb{R}^2[0,+\infty)$ spełniają następujące warunki:

1. φ oraz ψ są mierzalne względem pierwszej zmiennej przy ustalonej wartości drugiej zmiennej;
2. $\varphi(t,u)$ oraz $\psi(t,u)$ są parzyste, wypukłe i ciągłe w zerze ze względu na drugą zmienną, $\varphi(t,0) = \psi(t,0) = 0$, $\varphi(t,u) > 0$ i $\psi(t,u) > 0$, jeśli $u \neq 0$ dla prawie każdego t;
3. $\int_a^b \varphi(t,u)\,dt < \infty, \quad \int_c^d \psi(t,u)\,dt < \infty$ dla każdego u.

Dla dowolnej funkcji $f \in L(T)$ definiujemy funkcjonał

$$I_{\varphi,\psi}(f) = \int_a^b \varphi\left(x, \int_c^d \psi(y, f(x,y))\,dy\right)dx.$$

Funkcjonał $I_{\varphi,\psi}$ jest wypukłym modularem na $L(T)$. Symbolem $L_{\varphi,\psi}(T)$ oznaczamy przestrzeń wektorową wszystkich funkcji f należących do $L(T)$, dla których $I_{\varphi,\psi}(\lambda f) < \infty$ dla pewnego $\lambda > 0$.

Niech k będzie dowolną, nieujemną liczbą całkowitą i niech φ oraz ψ spełniają 1.–3. Niech X oznacza przestrzeń funkcji rzeczywistych i mierzalnych na T, posiadających dystrybucyjne pochodne $D^\alpha f$ do rzędu k należące do $L_{\varphi,\psi}(T)$. Definiujemy funkcjonał $I^{(k)}_{\varphi,\psi}$ na X

$$I^{(k)}_{\varphi,\psi}(f) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_a^b \varphi\left(x, \int_c^d \psi(y, D^\alpha f(x,y))\,dy\right)dx.$$

Przestrzeń modularną generowaną przez modular $I^{(k)}_{\varphi,\psi}$ oznaczamy $W^k_{\varphi,\psi}(T)$. Przestrzeń $W^k_{\varphi,\psi}(T)$ nazywamy przestrzenią Sobolewa „z mieszanymi funkcjami”. Funkcjonał $I^{(k)}_{\varphi,\psi}$ jest wypukłym modularem, więc

$$\|f\|^{(k)}_{\varphi,\psi} = \inf\{\varepsilon > 0 : I^{(k)}_{\varphi,\psi}(\varepsilon^{-1} f) \le 1\}$$

jest normą w $W^k_{\varphi,\psi}(T)$.

Przedstawione zostaną wybrane własności przestrzeni Sobolewa $W^k_{\varphi,\psi}(T)$.