mgr Marek Śmieja
Instytut Informatyki i Matematyki Komputerowej
Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Wymiar entropijny kombinacji miar

Ilość pamięci potrzebnej do opisu danych jest związana z wymiarem przestrzeni, jaką reprezentują. Entropia determinuje statystyczny koszt kodowania. Wymiar entropijny opisuje natomiast asymptotyczne własności entropii w przestrzeni metrycznej. Dokładniej, określa on jak zachowuje się entropia pokrycia rodziną kul $\mathcal{Q}_\delta$ o ustalonym promieniu $\delta > 0$ względem logarytmu tego promienia w przypadku granicznym (gdy promień zmierza do zera):

$$\dim(\mu) = \lim_{\delta \to 0} \frac{H(\mu; \mathcal{Q}_\delta)}{-\log(\delta)}.$$

Powyższa formuła jest dobrze zdefiniowana, jeśli badana granica istnieje. W przeciwnym przypadku mówimy jedynie o wymiarze dolnym i górnym.

Wymiar entropijny może zostać zdefiniowany dla dowolnych funkcji entropii, w tym dla najważniejszych funkcji entropii Shannona oraz Rényiego — mówimy wówczas o wymiarze entropijnym Shannona bądź Rényiego. W niniejszej pracy wykażemy oszacowania na wymiar entropijny Shannona oraz Rényiego kombinacji miar.

Zakładając, że miary probabilistyczne μ_1, μ_2 mają wymiary entropijne Shannona (Rényiego), wówczas kombinacja $a_1\mu_1 + a_2\mu_2$, gdzie $a_1, a_2 \in (0, 1)$ oraz $a_1 + a_2 = 1$, też ma wymiar entropijny Shannona (Rényiego) oraz zachodzi:

$$\dim_\alpha(a_1\mu_1 + a_2\mu_2) = \begin{cases} \max\{\dim_\alpha(\mu_1), \dim_\alpha(\mu_2)\}, \text{dla entropii Rényiego, } 0 < \alpha < 1, \\ a_1\dim(\mu_1) + a_2\dim(\mu_2), \text{dla entropii Shannona,} \\ \min\{\dim_\alpha(\mu_1), \dim_\alpha(\mu_2)\}, \text{dla entropii Rényiego, } 1 < \alpha < \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Powyższy fakt jest możliwy do wykazania dzięki zastosowaniu ważonej definicji entropii.

Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2013–2015, nr projektu: IP2012 055972.