mgr Przemysław Rola
Uniwersytet Jagielloński

Arbitraż na rynkach z bid-ask spreads

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie zupełną przestrzenią probabilistyczną wyposażoną w filtrację $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$, gdzie $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Załóżmy, że na rynku występują dwa procesy $\underline{S} = (\underline{S}_t)_{t=0}^T = (\underline{S}_t^1, \dots, \underline{S}_t^d)_{t=0}^T$ oraz $\overline{S} = (\overline{S}_t)_{t=0}^T = (\overline{S}_t^1, \dots, \overline{S}_t^d)_{t=0}^T$, które są d-wymiarowe, adaptowane do $\mathbb{F}$ i ściśle dodatnie. Ponadto niech $\underline{S}_t^i \leqslant \overline{S}_t^i$. W każdej chwili t inwestor może kupić dowolną ilość i-tych akcji po cenie $\overline{S}_t^i$ lub sprzedać po cenie $\underline{S}_t^i$. Proces $\underline{S}$ będziemy nazywać procesem bid (procesem kupna) odpowiednio proces $\overline{S}$ procesem ask (procesem sprzedaży). Analogicznie parę $(\underline{S}, \overline{S})$ będziemy nazywać procesem bid-ask. Zakładamy, że na rynku istnieje rachunek bankowy, tj. proces $B = (B_t)_{t=0}^T$ ściśle dodatni i prognozowalny oraz wszystkie transakcje na rynku są rozliczane w jednostkach tego procesu. Dla prostoty i bez straty ogólności przyjmijmy, że $B_t \equiv 1$.

Strategią finansową na rynku nazywamy d-wymiarowy proces $H = (H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, \dots, H_t^d)_{t=1}^T$ prognozowalny względem filtracji $\mathbb{F}$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich strategii przez $\mathcal{P}_T$. Zysk lub stratę inwestora dla strategii H (startującej z 0 jednostek akcji i pieniędzy w portfelu) będzie modelować proces wartości $x = (x_t)_{t=1}^T$ postaci

$$x_t = x_t(H) := -\sum_{j=1}^{t} (\Delta H_j)^+ \cdot \overline{S}_{j-1} + \sum_{j=1}^{t} (\Delta H_j)^- \cdot \underline{S}_{j-1} + (H_t)^+ \cdot \underline{S}_t - (H_t)^- \cdot \overline{S}_t, \quad (1)$$

gdzie $\cdot$ oznacza iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^d$, $\Delta H_j^i := H_j^i - H_{j-1}^i$ oraz w szczególności $\Delta H_1^i := H_1^i$.

Niech $\mathcal{R}_T := \{x_T(H) \mid H \in \mathcal{P}_T\}$ oraz $\mathcal{A}_T := \mathcal{R}_T - L_+^0$ będzie zbiorem wszystkich instrumentów finansowych superreplikowalnych dla kapitału początkowego 0. Niech $\overline{\mathcal{A}}_T$ oznacza domknięcie zbioru $\mathcal{A}_T$ w topologii generowanej przez zbieżność według prawdopodobieństwa. Mówimy, że na rynku mamy brak arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}_T \cap L_+^0 = \{0\}$ (lub równoważnie $\mathcal{A}_T \cap L_+^0 = \{0\}$). Dla dowolnych $0 \leqslant j < t \leqslant T$ zdefiniujemy następujące zbiory:

$$\mathcal{R}_{j,t}^+ := \{H \cdot (\underline{S}_t - \overline{S}_j) \mid H \in L_+^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_j)\}, \quad (2)$$

$$\mathcal{R}_{j,t}^- := \{H \cdot (\overline{S}_t - \underline{S}_j) \mid -H \in L_+^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{F}_j)\}. \quad (3)$$

Ponadto dla $1 \leqslant t \leqslant t + k \leqslant T$ wprowadźmy:

$$\mathbb{F}_{t-1,t+k} := \mathcal{R}_{t-1,t+k}^+ + \mathcal{R}_{t-1,t+k}^-, \qquad F_{t-1,t+k} := \mathbb{F}_{t-1,t+k} - L_+^0(\mathcal{F}_{t+k}). \quad (4)$$

Definicja. Mówimy, że miara probabilistyczna $\mathbb{Q}$ jest *równoważną miarą martyngałową* (EBAMM) dla procesu bid-ask $(\underline{S}, \overline{S})$ jeśli $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, wszystkie $\overline{S}_t$ są całkowalne oraz następujące nierówności są prawdziwe:

$$\underline{S}_{t-1}^i \leqslant E_{\mathbb{Q}}(\overline{S}_t^i | \mathcal{F}_{t-1}) \quad \text{oraz} \quad E_{\mathbb{Q}}(\underline{S}_t^i | \mathcal{F}_{t-1}) \leqslant \overline{S}_{t-1}^i, \quad \mathbb{P}\text{-p.w.} \quad (5)$$

dla dowolnego $t = 1, \dots, T$ oraz $i = 1, \dots, d$.

Wprowadzona nazwa, choć może być dla niektórych myląca, dobrze odzwierciedla istotę miary $\mathbb{Q}$. Jeślibyśmy bowiem mogli rozważyć proces $(\underline{S}, \overline{S})$ jako całość, wtedy będzie się on zachowywał tak jak $\mathbb{Q}$-martyngał z dokładnością do spreadu. Inaczej można patrzeć na ten warunek jak na pewną próbę osłabienia warunku istnienia tzw. consistent price system. Zauważmy, że w przypadku, gdy $\underline{S} = \overline{S}$ nasz model sprowadza się do standardowego rynku bez kosztów transakcji, a miara (EBAMM) jest wtedy po prostu równoważną miarą martyngałową.

Głównym wynikiem, który będę chciał przedstawić jest

Twierdzenie. *Następujące warunki są równoważne:*

(a) $\mathcal{A}_T \cap L^0_+ = \{0\}$;

(b) $F_{t-1,t+k} \cap L^0_+(\mathcal{F}_{t+k}) = \{0\}$ *dla dowolnych* $1 \leqslant t \leqslant t+k \leqslant T$;

(c) $F_{t-1,t+k} \cap L^0_+(\mathcal{F}_{t+k}) = \{0\}$ *oraz* $F_{t-1,t+k} = \overline{F}_{t-1,t+k}$ *dla dowolnych* $1 \leqslant t \leqslant t+k \leqslant T$;

(d) $\overline{F}_{t-1,t+k} \cap L^0_+(\mathcal{F}_{t+k}) = \{0\}$ *dla dowolnych* $1 \leqslant t \leqslant t+k \leqslant T$;

(e) *istnieje równoważna miara martyngałowa* $\mathbb{Q}$ *dla procesu bid-ask* $(\underline{S}, \overline{S})$ *oraz dodatkowo* $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^\infty$;

(f) *istnieją supCPS* $(\hat{S}, \mathbb{Q})$ *i subCPS* $(\check{S}, \mathbb{Q})$ *oraz dodatkowo* $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^\infty$.

Podczas referatu omówione zostaną też związku pomiędzy uzyskanym rezultatem a tym, co już jest w literaturze. Przedstawię też, jak powyższa teoria działa w modelu CRR z bid-ask spreads.

Literatura

[1] P. Rola, *Arbitrage in markets with bid-ask spreads*, http://arxiv.org/abs/1407.3372