Mieczysław Gruda, Włodzimierz Rembisz
IERiGŻ – PIB, Warszawa
E-mail: grudam@ierigz.waw.pl

Proces dochodzenia do równowag i ich stabilność na konkurencyjnym rynku. Zależności między dynamiką cen, popytem na produkty i ich podażą

Wstęp. Równowaga od lat pozostaje niezmiennie w centrum zainteresowania ekonomistów zajmujących matematyczną teorią rynku Model, który przedstawimy tutaj jest pewnym rozszerzeniem modelu przedstawionego przez K. J. Arrowa i L. Hurwicza [1]. Opisuje on sytuację, gdy na rynek przybywają ludzie z towarami, który mają sprzedać, by za uzyskany dochód nabyć inne potrzebne im towary. Dynamika cen w modelu uwzględnia wpływ popytu oraz podaży na dobra substytucyjne oraz komplementarne na rynku. Celem pracy jest proces dochodzenia do równowag (poziom cen i poziom równowag podażowo-popytowych) oraz warunki stabilności modelu oraz stabilności asymptotycznej.

Sformułowanie problemu. Niech $y^k = (y_1^k, y_2^k, \ldots, y_n^k)$ będzie koszykiem dóbr dostarczonych na rynek przez k-tego producenta, a $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ koszykiem dóbr, które chce nabyć. Przez $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ oznaczmy wektor cen towarów. Każdy z handlowców przy wyborze koszyka x^k kieruje się swymi preferencjami, rozwiązując zadanie optymalizacyjne:

Znaleźć max funkcji użyteczności $u^k(x)$ przy zadanych warunkach brzegowych

$$(p, x) \leq (p, y^k) = I^k(p) \quad \text{dla } x \geq 0. \tag{1}$$

Zredukowaną funkcję popytu definiujemy jako

$$\varphi^k(p, I^k(p)) = \varphi^k\Big(p, \sum_i p_i y_i^k\Big) = f^k(p). \tag{2}$$

Z kolei funkcję nadwyżkowego popytu jako

$$z(p) = \sum_{k=1}^m x^k - \sum_{k=1}^m y^k = \sum_{k=1}^m f^k(p) - \sum_{k=1}^m y^k. \tag{3}$$

Reguła dynamiki cen obowiązująca na rynku opisana jest układem równań różniczkowych

$$\frac{dp(t)}{dt} = \sum z(p(t)). \tag{4}$$

Równowaga. Przy ww. sformułowaniu rynku towarów powstanie pytanie, czy ceny równowag i odpowiadające im podaże będą istniały. Wprowadźmy trzy założenia, które pozwolą na udowodnienie twierdzenia o istnieniu równowagi.

I. Funkcje f^k są ciągłe i różniczkowalne na $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Praktycznie wystarczy słabsze założenie, na przykład, że $f^k \in C^1(\operatorname{int} \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n)$ oraz $f_i^k(p) \to +\infty$

przy $p_i \to 0$. Przy tak postawionym warunku znacznie komplikuje się dowód twierdzenia o istnieniu równowagi.

II. Popyt na towar oferowany za darmo lub po niskich cenach zawsze przekracza jego podaż.

III. Macierz funkcyjna $J(p) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial p_j}\right)_{(n,n)}$ spełnia warunek dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n_+ \cup \mathbb{R}^n_-)$ oraz dla każdego $p \in \operatorname{int} P^n_+(1)(\lambda J(p)\lambda^T < 0)$, gdzie
$$\operatorname{int} P^n_+(1) = \{p \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+ : \|p\| = 1\}. \tag{5}$$
Warunek ten jest słabszy od ujemnej określoności macierzy $J(p)$.

Twierdzenie o istnieniu równowagi. Przy założeniach (I), (II) i (III) istnieje dokładnie jeden wektor równowagi rynkowej $p > 0$ określony z dokładnością do struktury (dowód: E. Panek, 2000).

Równowaga konkurencyjna (definicja). Dany jest prywatny układ gospodarczy, w którym X_i jest zbiorem konsumentów, $\succ_i$ — relacje preferencji, Y_j — zbiór producentów, ω_i — wektor czynników produkcji oraz macierz udziałów własnościowych $\theta_{i1}, \ldots, \theta_{ij}$.

Alokacja (x^*, y^*) oraz wektor cen $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ jest *równowagą konkurencyjną* (Walrasowską), jeżeli:

1. Dla każdego j, y^*_j maksymalizuje zyski producenta j na zbiorze produkcyjnym Y_j przy danych cenach p.
2. Dla każdego i, x^*_i jest najlepszym dostępnym koszykiem dóbr $p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \cdot y^*_j$.
3. $\sum_i x^*_i = \bar{\omega} + \sum_j y_j*$ — alokacja jest możliwa do wyprodukowania przy danych zasobach (czynnikach).

Stabilność stanu równowagi konkurencyjnej. Rynek nazywamy globalnie asymptotycznie stabilnym, jeżeli każda (p^0, ∞)-dopuszczalna trajektoria cen z wektorem $p^0 > 0$ jest zbieżna do pewnego wektora cen $p \in P = \{\lambda\bar{p} : \lambda > 0\}$, tzn. dla każdego $p^0 > 0$ istnieje takie $p \in P$, że $\lim_{t\to\infty} p(t) = p$.

Zakończenie. W opracowaniu zaproponowano modyfikację standardowego modelu Arrowa-Hurwicza ze zróżnicowaną dynamiką cen poszczególnych towarów oraz wprowadzono do modelu towary komplementarne oraz substytucyjne. Na dynamikę ceny towaru w omawianym modelu ma wpływ nie tylko popyt nadwyżkowy na konkretny towar, ale również popyt i podaż towarów do niego substytucyjnych oraz komplementarnych. Praca zawiera ocenę uwarunkowań stabilność, dowód stabilności (przytoczony) w sensie Lapunowa oraz stabilność asymptotyczną modelu. Zaprezentowane zostały aplikacje numeryczne.

Literatura

[1] K. J. Arrow, L. Hurwicz (1958), *On the stability of the competitive equilibrium I*, Econometrica, Nr 26.

[2] M. Gruda (2011), *Nowe równowagi produkcyjne w polskim sektorze rolniczym na tle tendencji unijnych i światowych (ujęcie modelowe)*, IERiGŻ-PIB, Nr 23.

[3] L. W. McKenzie (2002), *Classical General Equilibrium Theory*, The MIT Press, Cambridge.

[4] E. Panek (1997), *Elementy ekonomii matematycznej. Równowaga i wzrost*, PWN, Warszawa.

[5] J. B. Shoven, J. Whalley (2003), *Applying General Equilibrium*, Cambridge University Press.