

dr inż. Ewa Pawelec
 prof. nzw. dr hab. Alicja Smoktunowicz
 dr inż. Iwona Wróbel
 Politechnika Warszawska
 Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Metody iteracyjne wyznaczania odwrotności Moore'a–Penrose'a

Zajmiemy się oceną własności numerycznych wybranych metod iteracyjnych obliczania uogólnionych odwrotności macierzy w sensie Moore'a–Penrose'a. Uogólnione odwrotności macierzy znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach, między innymi w sieciach elektrycznych, sieciach neuronowych, w statystyce matematycznej, przy wyznaczaniu rozkładu biegunowego macierzy, przy rozwiązywaniu liniowego zadania najmniejszych kwadratów. Dla dowolnej macierzy prostokątnej $A(m \times n)$ o elementach rzeczywistych istnieje dokładnie jedna macierz $X(n \times m)$ o elementach rzeczywistych, która spełnia następujące cztery warunki (tzw. warunki Moore'a–Penrose'a):

$$(1) AXA = A, \quad (2) XAX = X, \quad (3) (AX)^T = AX, \quad (4) (XA)^T = XA.$$

Macierz X o tych własnościach nazywamy *pseudoodwrotnością* lub *odwrotnością Moore'a–Penrose'a* macierzy A i oznaczamy jako $X = A^+$.

W ostatnich latach pojawiło się wiele publikacji dotyczących metod iteracyjnych wyznaczania uogólnionych odwrotności macierzy. Autorzy tych prac skupiają się jednak głównie na badaniu zbieżności rozpatrywanych metod iteracyjnych i nie badają przydatności tych algorytmów w praktyce obliczeniowej. Wiadomo, że algorytm SVD (Singular Value Decomposition), oparty na rozkładzie macierzy względem wartości szczególnych, wchodzi w skład wielu pakietów numerycznych. Pozwala on na stabilne numerycznie wyznaczenie uogólnionych odwrotności macierzy dowolnego rzędu. Niewiele wiadomo jednak o własnościach numerycznych metod iteracyjnych, poza analizą numeryczną metody Ben-Israela i Cohena, przedstawioną w pracy [4].

Chcemy odpowiedzieć na pytanie, czy metody iteracyjne takie jak, na przykład, metoda Newtona i jej modyfikacje, metoda Jacobiego i Gaussa–Seidla oraz metody gradientowe pozwalają na uzyskanie wyników akceptowalnych w sensie arytmetyki zmiennopozycyjnej. Mamy zamiar ocenić również te metody iteracyjne pod kątem uzyskiwanej dokładności i złożoności obliczeniowej. Wyniki teoretyczne zostaną zilustrowane testami numerycznymi wykonanymi w pakiecie MATLAB. Najbardziej interesujące, naszym zdaniem, będą wyniki obliczeń dla macierzy źle uwarunkowanych (tj. o dużym wskaźniku uwarunkowania $\text{cond}(A) = \|A^+\| \|A\|$).

Literatura

- [1] A. Ben-Israel, T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, 2nd edn., Springer, New York, 2003.
- [2] M. D. Petkovic, P. S. Stanimirovic, *Iterative method for computing Moore–Penrose inverse based on Penrose equations*, J. Comput. Appl. Math. 235 (2011), 1604–1613.
- [3] A. Smoktunowicz, I. Wróbel, *Numerical aspects of computing the Moore–Penrose Inverse of full column rank matrices*, BIT Numerical Mathematics 52 (2012), 503–524.
- [4] T. Soderstrom, G. W. Stewart, *On the numerical properties of an iterative method for computing the Moore–Penrose generalized inverse*, SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974), 61–74.