

dr Maciej Wiśniewolski  
 Uniwersytet Warszawski, Instytut Matematyki

## O rozkładzie hiperbolicznego procesu Bessela

Funkcjonały ruchu Browna odgrywają kluczową rolę w wielu zastosowaniach matematyki (m.in. w finansach, biologii). Przykładem takich funkcyjonałów jest klasa ruchów Browna ze stochastycznym dryfem. Dobrze znane i scharakteryzowane procesy z tej klasy to na przykład proces Ornsteina–Uhlenbecka oraz Bessela. W niniejszym referacie przedstawimy nową, probabilistyczną metodę charakteryzacji innego procesu należącego do wspomnianej klasy: hiperbolicznego procesu Bessela (HB). Jest to proces, który jest rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego

$$dR_t = dB_t + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \coth(R_t) dt,$$

gdzie  $B$  jest standardowym ruchem Browna, a  $\alpha \geq -1$ . W charakteryzacji procesu HB wykorzystamy ciekawy związek między transformatą Laplace procesu  $\cosh(R)$  oraz transformatą Laplacea wektora  $(V_t, \int_0^t V_u^2 du)$ , gdzie  $V$  jest geometrycznym ruchem Browna. Wykażemy, że dla ustalonego  $t$ , rozkład  $\cosh(R_t)$  jest równy rozkładowi funkcyjonału  $1 + 2X_1 \int_0^{t/4} V_u^2 du$ , gdzie  $X$  jest niezależnym od  $V$ , startującym z losowego punktu, kwadratem procesu Bessela. Wskażemy ciekawe przykłady zastosowania powyższej równości w sensie rozkładów. Scharakteryzujemy rozkład procesu  $(\sinh(R), t \geq 0)$  dzięki ciekawemu związkowi między procesem HB a pewnym szczególnym przypadkiem modelu stochastycznej zmienności. Wystąpienie zostało przygotowane na podstawie wspólnej pracy z Jackiem Jakubowskim.

### Literatura

- [1] A. Borodin, *Hypergeometric diffusion*, Journal of Mathematical Sciences 159 (2009), no. 3, 295–304.
- [2] J. Gruet, *Windings of hyperbolic Brownian motion*, in: Exponential functionals and Principal Values related to Brownian Motion, A Collection of Research Papers (Ed. M. Yor), Biblioteca de la Revista Matematica Iberoamericana, Madrid, 1997, 35–72.
- [3] J. Jakubowski, M. Wiśniewolski, *On hyperbolic Bessel processes and beyond*, arXiv:1106.5485 (2011).