Instytut Matematyczny PAN

Konwersatorium dla doktorantów

Twierdzenie Banacha-Tarskiego z punktu widzenia algebraika

Joanna Jaszuńska

IM PAN

Warszawa, 10 listopada 2006

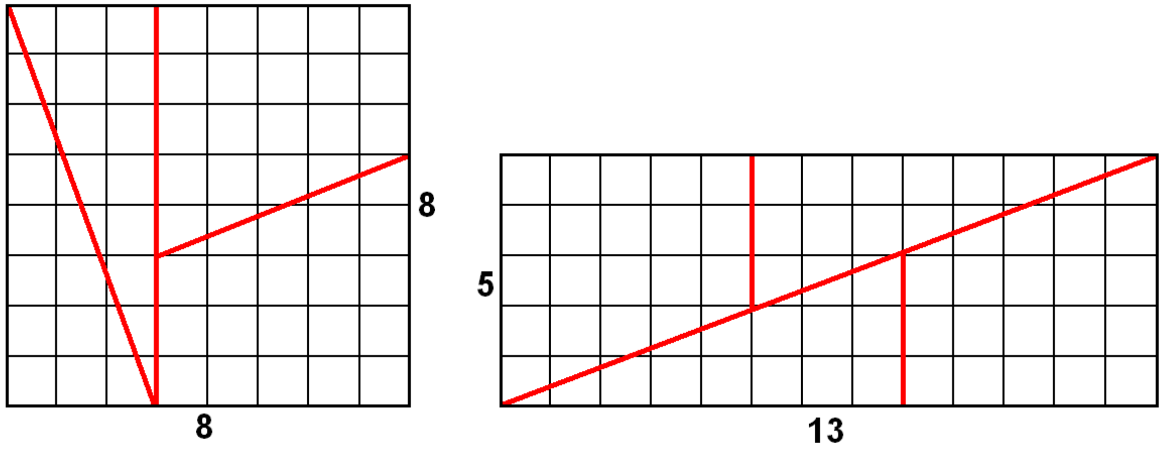
Rozkłady I — cięcie nożyczkami

- brzeg nieistotny, części „przyzwoite”, ograniczone krzywymi Jordana
- $\mathbb{R}^2$: zachowane pole — równoważność wielokątów przez rozkład skończony (Wallace-Bolyai-Gerwien)
- $\mathbb{R}^3$: III problem Hilberta

Rozkłady I — cięcie nożyczkami

- brzeg nieistotny, części „przyzwoite”, ograniczone krzywymi Jordana
- $\mathbb{R}^2$: zachowane pole — równoważność wielokątów przez rozkład skończony (Wallace-Bolyai-Gerwien)
- $\mathbb{R}^3$: III problem Hilberta

- paradoksy-oszustwa



Rozkłady II — równoważność przez rozkład $A \sim_G B$

- części dowolne, mogą być dziwne (jednopunktowe, niemierzalne etc)
- nie musi się być zachowana miara $\rightarrow$ paradoksy
- relacja równoważności (w szczególności przechodnia), rozkłady skończone

Rozkłady II — równoważność przez rozkład $A \sim_G B$

- części dowolne, mogą być dziwne (jednopunktowe, niemierzalne etc)
- nie musi się być zachowana miara $\rightarrow$ paradoksy
- relacja równoważności (w szczególności przechodnia), rozkłady skończone

Kwadratura koła Tarskiego

Rozkłady II — równoważność przez rozkład $A \sim_G B$

- części dowolne, mogą być dziwne (jednopunktowe, niemierzalne etc)
- nie musi się być zachowana miara $\rightarrow$ paradoksy
- relacja równoważności (w szczególności przechodnia), rozkłady skończone

Kwadratura koła Tarskiego

- nożyczkami niemożliwa
- przez rozkład możliwa

Paradoksy — nieintuicyjne rozkłady

Zbiór E nazwiemy *G-paradoksalnym*, jeśli zawiera rozłączne podzbiory A, B takie, że $A \sim_G E$ oraz $B \sim_G E$.

Paradoksy — nieintuicyjne rozkłady

Zbiór E nazwiemy *G-paradoksalnym*, jeśli zawiera rozłączne podzbiory A, B takie, że $A \sim_G E$ oraz $B \sim_G E$.

- $\mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \ldots$

Paradoksy — nieintuicyjne rozkłady

Zbiór E nazwiemy *G-paradoksalnym*, jeśli zawiera rozłączne podzbiory A, B takie, że $A \sim_G E$ oraz $B \sim_G E$.

- $\mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \dots$

Paradoksalny rozkład okręgu

Paradoksy — nieintuicyjne rozkłady

Zbiór E nazwiemy *G-paradoksalnym*, jeśli zawiera rozłączne podzbiory A, B takie, że $A \sim_G E$ oraz $B \sim_G E$.

- $\mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \dots$

Paradoksalny rozkład okręgu

- zbiór niemierzalny Vitaliego na S^1
- każda klasa równoważności przeliczalna

Paradoksy — nieintuicyjne rozkłady

Zbiór E nazwiemy *G-paradoksalnym*, jeśli zawiera rozłączne podzbiory A, B takie, że $A \sim_G E$ oraz $B \sim_G E$.

- $\mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \dots$

Paradoksalny rozkład okręgu

- zbiór niemierzalny Vitaliego na S^1
- każda klasa równoważności przeliczalna
- z aksjomatu wyboru zbiór reprezentantów M
- przeliczalnie wiele jego obrotów daje cały S^1

Paradoksy — nieintuicyjne rozkłady

Zbiór E nazwiemy *G-paradoksalnym*, jeśli zawiera rozłączne podzbiory A, B takie, że $A \sim_G E$ oraz $B \sim_G E$.

- $\mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \ldots$

Paradoksalny rozkład okręgu

- zbiór niemierzalny Vitaliego na S^1
- każda klasa równoważności przeliczalna
- z aksjomatu wyboru zbiór reprezentantów M
- przeliczalnie wiele jego obrotów daje cały S^1
- $S^1 \sim_\infty S^1 \cup S^1$, $S^1 \sim_\infty S^1 \cup S^1 \cup S^1$, $S^1 \sim_\infty S^1 \cup S^1 \cup \ldots$

Paradoksy — nieintuicyjne rozkłady

Zbiór E nazwiemy *G-paradoksalnym*, jeśli zawiera rozłączne podzbiory A, B takie, że $A \sim_G E$ oraz $B \sim_G E$.

- $\mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \sim_\infty \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \dots$

Paradoksalny rozkład okręgu

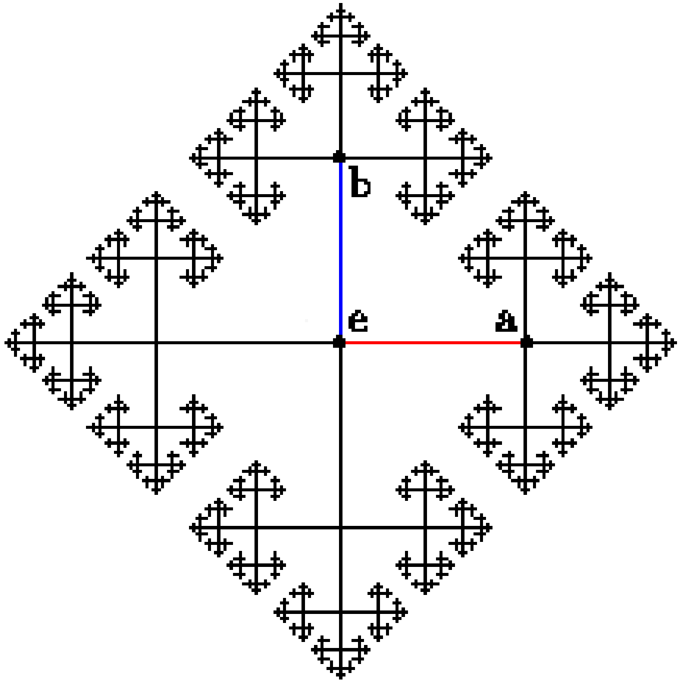
- zbiór niemierzalny Vitaliego na S^1
- każda klasa równoważności przeliczalna
- z aksjomatu wyboru zbiór reprezentantów M
- przeliczalnie wiele jego obrotów daje cały S^1
- $S^1 \sim_\infty S^1 \cup S^1, \quad S^1 \sim_\infty S^1 \cup S^1 \cup S^1, \quad S^1 \sim_\infty S^1 \cup S^1 \cup \dots$

„Wkręcanie”

- $S^1 \sim_2 S^1 \setminus \{punkt\}$

Grupa wolna F_2

- dwa generatory: a i b
- bez relacji
- element neutralny e
- alfabet a, b, a^{-1}, b^{-1}
- elementami grupy są słowa zredukowane
- działanie — konkatenacja, czyli dopisanie

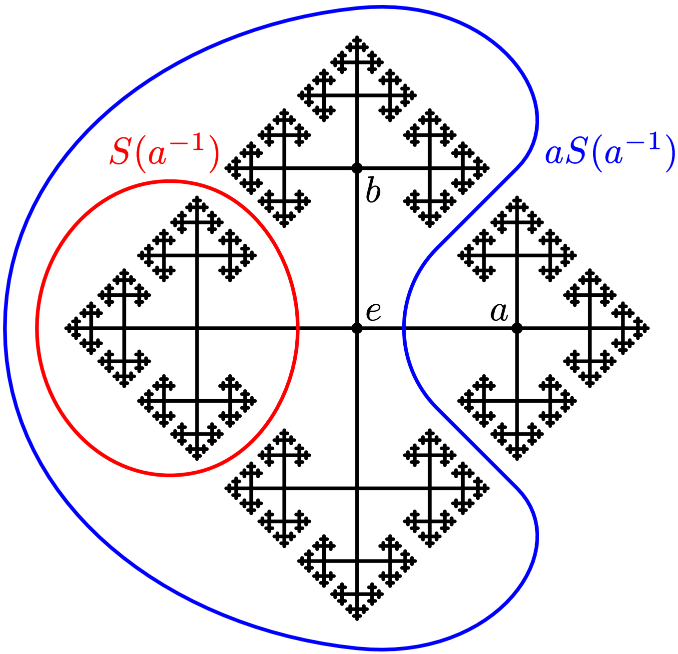


Paradoksalny rozkład F_2

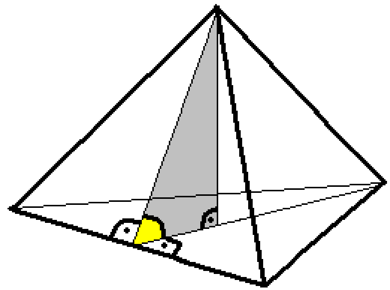
$$F_2 = \{e\} \cup S(a) \cup S(b) \cup S(a^{-1}) \cup S(b^{-1})$$

$$F_2 = S(a) \cup aS(a^{-1})$$

$$F_2 = S(b) \cup bS(b^{-1})$$



Grupa F_2 jako podgrupa grupy izometrii R^3



Niech $\varphi = arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

a, b — antyzegarowe obroty o kąt φ odpowiednio wokół osi x oraz z

$$a^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad b^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Można sprawdzić, że a i b generują grupę wolną F_2.

Wąż Sierpińskiego

Czy istnieje w $\mathbb{R}^3$ zamknięty pierścień przystających czworościanów?

Wąż Sierpińskiego

Czy istnieje w $\mathbb{R}^3$ zamknięty pierścień przystających czworościanów?

Nie istnieje $\Longrightarrow$ nie istnieje parkietaż przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takimi czworościanami.

Działanie grupy G na zbiorze X

- dla dowolnych $g \in G, x \in X$ mamy zdefiniowane $g(x) \in X$
- $g_2(g_1(x)) = (g_2 g_1)(x)$
- $id(x) = x$

Działanie grupy G na zbiorze X

- dla dowolnych $g \in G, x \in X$ mamy zdefiniowane $g(x) \in X$
- $g_2(g_1(x)) = (g_2 g_1)(x)$
- $id(x) = x$

Na przykład grupa G_3 izometrii przestrzeni R^3 działa na zbiorze $X = R^3$

Działanie grupy G na zbiorze X

- dla dowolnych $g \in G, x \in X$ mamy zdefiniowane $g(x) \in X$
- $g_2(g_1(x)) = (g_2 g_1)(x)$
- $id(x) = x$

Na przykład grupa G_3 izometrii przestrzeni R^3 działa na zbiorze $X = R^3$

- dla dowolnej izometrii $g \in G_3$ oraz punktu $x \in R^3$ możemy zdefiniować $g(x)$ jako obraz punktu x przy izometrii g

Działanie grupy G na zbiorze X

- dla dowolnych $g \in G, x \in X$ mamy zdefiniowane $g(x) \in X$
- $g_2(g_1(x)) = (g_2 g_1)(x)$
- $id(x) = x$

Na przykład grupa G_3 izometrii przestrzeni R^3 działa na zbiorze $X = R^3$

- dla dowolnej izometrii $g \in G_3$ oraz punktu $x \in R^3$ możemy zdefiniować $g(x)$ jako obraz punktu x przy izometrii g
- składanie izometrii

Działanie grupy G na zbiorze X

• dla dowolnych $g \in G, x \in X$ mamy zdefiniowane $g(x) \in X$

• $g_2(g_1(x)) = (g_2 g_1)(x)$

• $id(x) = x$

Na przykład grupa G_3 izometrii przestrzeni R^3 działa na zbiorze $X = R^3$

• dla dowolnej izometrii $g \in G_3$ oraz punktu $x \in R^3$ możemy zdefiniować $g(x)$ jako obraz punktu x przy izometrii g

• składanie izometrii

• $id(x) = x$

Działanie grupy G na zbiorze X

- dla dowolnych $g \in G, x \in X$ mamy zdefiniowane $g(x) \in X$
- $g_2(g_1(x)) = (g_2 g_1)(x)$
- $id(x) = x$

Na przykład grupa G_3 izometrii przestrzeni R^3 działa na zbiorze $X = R^3$

- dla dowolnej izometrii $g \in G_3$ oraz punktu $x \in R^3$ możemy zdefiniować $g(x)$ jako obraz punktu x przy izometrii g
- składanie izometrii
- $id(x) = x$

Orbita elementu x to zbiór $\{g(x) \colon g \in G\}$.

Grupa paradoksalna $\longrightarrow$ zbiór paradoksalny

Stwierdzenie: Jeśli grupa paradoksalna G działa, bez nietrywialnych punktów stałych, na pewnym zbiorze, to ten zbiór jest G-paradoksalny.

- zbiór X rozpada się na orbity przy działaniu elementów grupy
- aksjomat wyboru — M to zbiór reprezentantów orbit
- $\{g(M)\colon g \in G\}$ — podział zbioru X
- paradoksalny rozkład G „przenosi się” na paradoksalny rozkład X

Grupa paradoksalna $\longrightarrow$ zbiór paradoksalny

Stwierdzenie: Jeśli grupa paradoksalna G działa, bez nietrywialnych punktów stałych, na pewnym zbiorze, to ten zbiór jest G-paradoksalny.

- zbiór X rozpada się na orbity przy działaniu elementów grupy
- aksjomat wyboru — M to zbiór reprezentantów orbit
- $\{g(M)\colon g \in G\}$ — podział zbioru X
- paradoksalny rozkład G „przenosi się” na paradoksalny rozkład X

Wniosek 1: To samo dla F_2 (wiemy, że jest paradoksalna).

Wniosek 2: To samo dla naszej $F_2 \subseteq G_3$.

Problem (mały): Ma nie być punktów stałych.

Paradoks Hausdorffa

Niech $D \subseteq S^2$ oznacza zbiór końców osi obrotów z F_2.

Można sprawdzić, że F_2 działa na $S^2 \setminus D$ bez punktów stałych.

Paradoks Hausdorffa

Niech $D \subseteq S^2$ oznacza zbiór końców osi obrotów z F_2.

Można sprawdzić, że F_2 działa na $S^2 \setminus D$ bez punktów stałych.

Stąd **Paradoks Hausdorffa:**

Istnieje taki przeliczalny podzbiór D sfery S^2, że zbiór

$$S^2 \setminus D \;\; \text{jest paradoksalny.}$$

Paradoks Hausdorffa

Niech $D \subseteq S^2$ oznacza zbiór końców osi obrotów z F_2.

Można sprawdzić, że F_2 działa na $S^2 \setminus D$ bez punktów stałych.

Stąd **Paradoks Hausdorffa:**

Istnieje taki przeliczalny podzbiór D sfery S^2, że zbiór

$S^2 \setminus D$ jest paradoksalny.

Zbiór D przeliczalny — można się go pozbyć („wkręcając”):

$$S^2 \setminus D \sim S^2$$

Paradoks Banacha-Tarskiego (1924 r.)

Wiemy już, że dla odpowiedniego D

- zbiór $S^2 \setminus D$ jest paradoksalny oraz
- $S^2 \setminus D \sim S^2$.
- Zbiór równoważny ze zbiorem paradoksalnym też jest paradoksalny.

Paradoks Banacha-Tarskiego (1924 r.)

Wiemy już, że dla odpowiedniego D

- zbiór $S^2 \setminus D$ jest paradoksalny oraz
- $S^2 \setminus D \sim S^2$.
- Zbiór równoważny ze zbiorem paradoksalnym też jest paradoksalny.

Stąd **paradoks B-T dla sfer:** Sfera S^2 jest paradoksalna.

Paradoks Banacha-Tarskiego (1924 r.)

Wiemy już, że dla odpowiedniego D

- zbiór $S^2 \setminus D$ jest paradoksalny oraz
- $S^2 \setminus D \sim S^2$.
- Zbiór równoważny ze zbiorem paradoksalnym też jest paradoksalny.

Stąd **paradoks B-T dla sfer:** Sfera S^2 jest paradoksalna.

- Kula bez środka jest paradoksalna.

Paradoks Banacha-Tarskiego (1924 r.)

Wiemy już, że dla odpowiedniego D

- zbiór $S^2 \setminus D$ jest paradoksalny oraz
- $S^2 \setminus D \sim S^2$.
- Zbiór równoważny ze zbiorem paradoksalnym też jest paradoksalny.

Stąd **paradoks B-T dla sfer:** Sfera S^2 jest paradoksalna.

- Kula bez środka jest paradoksalna.
- Wiemy, że $S^1 \sim S^1 \setminus \{punkt\}$, zatem $\mathbb{B} \setminus \{0\} \sim \mathbb{B}$.

Stąd **paradoks B-T:** **Kula jest paradoksalna.**

- Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ jest paradoksalna.

Uwagi i komentarze

- G_3, nie tylko SO_3.

Uwagi i komentarze

- G_3, nie tylko SO_3.
- Tu były podzbiory, można zrobić rzeczywisty rozkład.

Uwagi i komentarze

- G_3, nie tylko SO_3.
- Tu były podzbiory, można zrobić rzeczywisty rozkład.
- Można ograniczyć liczbę części do 5.

Uwagi i komentarze

- G_3, nie tylko SO_3.
- Tu były podzbiory, można zrobić rzeczywisty rozkład.
- Można ograniczyć liczbę części do 5.
- Części można przenosić „bezkolizyjnie”.

Uwagi i komentarze

- G_3, nie tylko SO_3.
- Tu były podzbiory, można zrobić rzeczywisty rozkład.
- Można ograniczyć liczbę części do 5.
- Części można przenosić „bezkolizyjnie”.
- Aksjomat wyboru nie jest konieczny do konstrukcji paradoksów.

Uwagi i komentarze

- G_3, nie tylko SO_3.
- Tu były podzbiory, można zrobić rzeczywisty rozkład.
- Można ograniczyć liczbę części do 5.
- Części można przenosić „bezkolizyjnie”.
- Aksjomat wyboru nie jest konieczny do konstrukcji paradoksów.
- Tak samo dla $\mathbb{R}^n$, $n > 3$.

Uwagi i komentarze

- G_3, nie tylko SO_3.
- Tu były podzbiory, można zrobić rzeczywisty rozkład.
- Można ograniczyć liczbę części do 5.
- Części można przenosić „bezkolizyjnie”.
- Aksjomat wyboru nie jest konieczny do konstrukcji paradoksów.
- Tak samo dla $\mathbb{R}^n$, $n > 3$.

Uogólnienie P.B-T: Dla dowolnych ograniczonych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^3$ o niepustym wnętrzu zachodzi $A \sim B$.

Uwagi i komentarze

- G_3, nie tylko SO_3.
- Tu były podzbiory, można zrobić rzeczywisty rozkład.
- Można ograniczyć liczbę części do 5.
- Części można przenosić „bezkolizyjnie”.
- Aksjomat wyboru nie jest konieczny do konstrukcji paradoksów.
- Tak samo dla $\mathbb{R}^n$, $n > 3$.

Uogólnienie P.B-T: Dla dowolnych ograniczonych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^3$ o niepustym wnętrzu zachodzi $A \sim B$.

Inna wersja P.B-T: Ziarnko grochu można rozłożyć na kawałki i na nowo złożyć tak, aby otrzymać kulę wielkości Słońca.

Miara

Nie istnieje miara

- skończenie addytywna,
- określona na **wszystkich** podzbiorach R^3,
- G_3-niezmiennicza,
- przyjmująca wartość 1 na kostce jednostkowej.

Miara

Nie istnieje miara

- skończenie addytywna,
- określona na **wszystkich** podzbiorach R^3,
- G_3-niezmiennicza,
- przyjmująca wartość 1 na kostce jednostkowej.

Tw. Banacha

Na R^2 istnieje analogiczna miara (rozszerzająca miarę Jordana).

Prosta i płaszczyzna

Analogiczne paradoksalne rozkłady nie istnieją, bo w G_1 i G_2 nie ma podgrup F_2.

Prosta i płaszczyzna

Analogiczne paradoksalne rozkłady nie istnieją, bo w G_1 i G_2 nie ma podgrup F_2.

Dla dowolnych dwóch izometrii x, y

- na prostej zachodzi relacja

$$x^2 y^2 x^{-2} y^{-2} = 1,$$

Prosta i płaszczyzna

Analogiczne paradoksalne rozkłady nie istnieją, bo w G_1 i G_2 nie ma podgrup F_2.

Dla dowolnych dwóch izometrii x, y

- na prostej zachodzi relacja

$$x^2y^2x^{-2}y^{-2} = 1,$$

- na płaszczyźnie zachodzi relacja

$$x^2y^2x^{-2}y^{-2}x^2y^{-2}x^{-2}y^4x^2y^{-2}x^{-2}y^{-2}x^2y^2x^{-2} = 1.$$

Prosta i płaszczyzna

Analogiczne paradoksalne rozkłady nie istnieją, bo w G_1 i G_2 nie ma podgrup F_2.

Dla dowolnych dwóch izometrii x, y

- na prostej zachodzi relacja

$$x^2y^2x^{-2}y^{-2} = 1,$$

- na płaszczyźnie zachodzi relacja

$$x^2y^2x^{-2}y^{-2}x^2y^{-2}x^{-2}y^4x^2y^{-2}x^{-2}y^{-2}x^2y^2x^{-2} = 1.$$

Komutatory, rozwiązalność grup izometrii G_1 i G_2.

Prosta $\mathbb{R}^1$

- Izometrie prostej $\mathbb{R}^1$ to przesunięcia i symetrie względem punktu.
- Kwadrat każdej izometrii jest przesunięciem.
- Przesunięcia są przemienne.

Prosta $\mathbb{R}^1$

- Izometrie prostej $\mathbb{R}^1$ to przesunięcia i symetrie względem punktu.
- Kwadrat każdej izometrii jest przesunięciem.
- Przesunięcia są przemienne.
- Stąd dla dowolnych dwóch izometrii x, y zachodzi relacja

$$x^2y^2x^{-2}y^{-2} = 1,$$

czyli nie ma podgrupy wolnej rzędu 2.

Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$

- Izometrie $\mathbb{R}^2$ to przesunięcia, obroty i symetrie z poślizgiem.
- Kwadrat każdej izometrii jest przesunięciem lub obrotem.
- Dla dowolnych dwóch izometrii x, y wyrażenia $x^2y^2x^{-2}y^{-2}$ oraz $x^2y^{-2}x^{-2}y^2$ są przesunięciami.

Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$

- Izometrie $\mathbb{R}^2$ to przesunięcia, obroty i symetrie z poślizgiem.
- Kwadrat każdej izometrii jest przesunięciem lub obrotem.
- Dla dowolnych dwóch izometrii x, y wyrażenia $x^2y^2x^{-2}y^{-2}$ oraz $x^2y^{-2}x^{-2}y^2$ są przesunięciami.
- Przesunięcia są przemienne, zatem

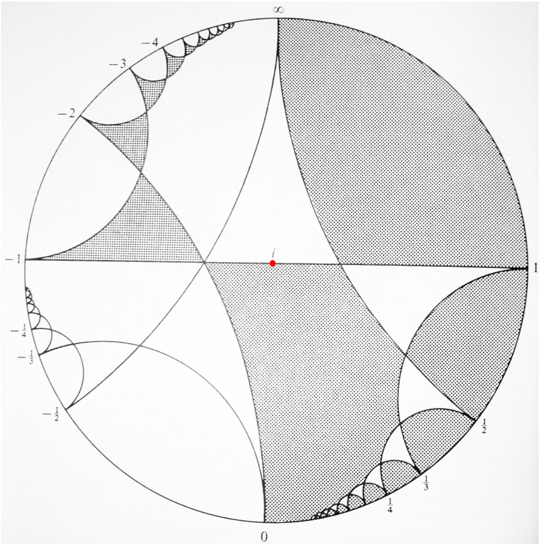
$$x^2y^2x^{-2}y^{-2}x^2y^{-2}x^{-2}y^2(x^2y^2x^{-2}y^{-2})^{-1}(x^2y^{-2}x^{-2}y^2)^{-1} = 1.$$

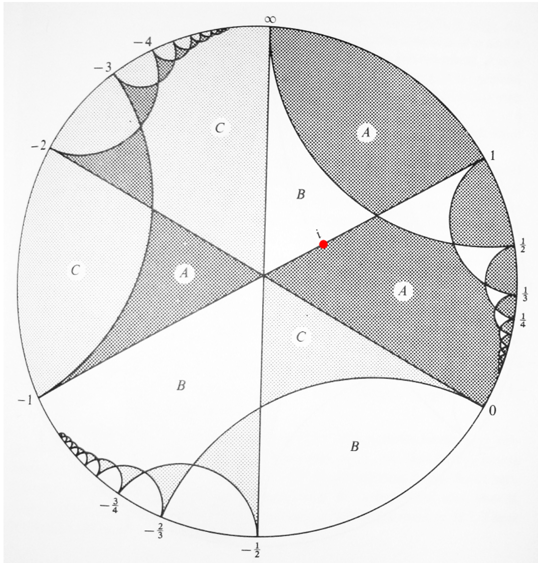
To po uproszczeniu daje relację

$$x^2y^2x^{-2}y^{-2}x^2y^{-2}x^{-2}y^4x^2y^{-2}x^{-2}y^{-2}x^2y^2x^{-2} = 1,$$

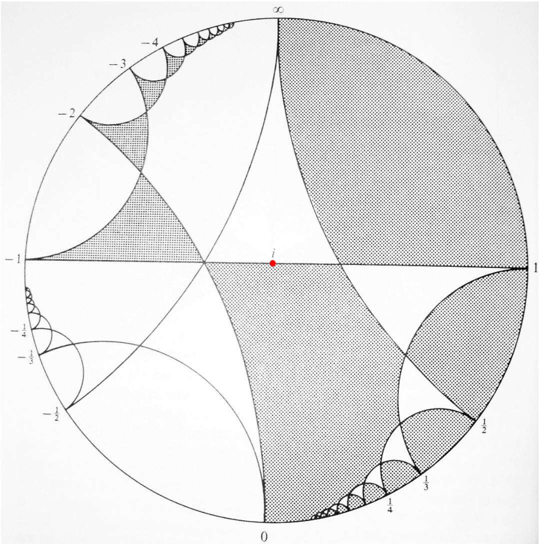
czyli też nie ma podgrupy wolnej rzędu 2.

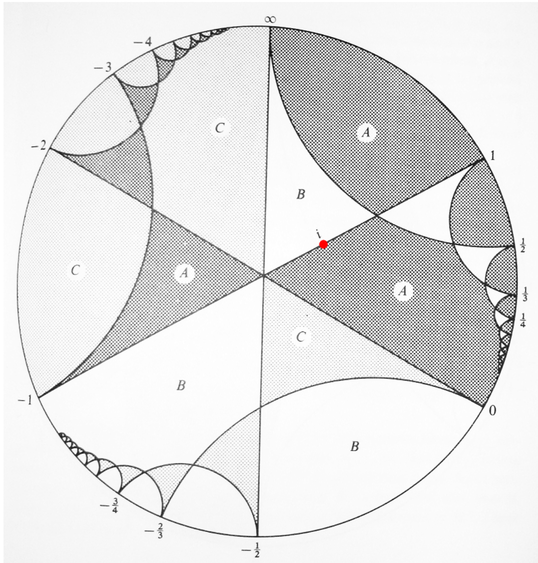
Płaszczyzna hiperboliczna





Płaszczyzna hiperboliczna





Stan Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*

Leonard M. Wapner, *The Pea and the Sun*