Deformacje splotu wolnego i warunkowo wolnego

Anna Krystek
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
pl.Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
Anna.Krystek@math.uni.wroc.pl

12 listopada 2005

1 Plan

Głównym obiektem zainteresowania klasycznego rachunku prawdopodobieństwa jest trójka $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$, gdzie Ω jest przestrzenią miarową, Σ jest σ–ciałem zbiorów mierzalnych a $\mathbf{P}$ jest miarą probabilistyczną. Zmienne losowe tworzą przemienna algebrę $\mathcal{A}$ na której można zdefiniować wartość oczekiwaną $\mathbb{E}$, odpowiadającą mierze probabilistycznej.

W niekomutatywnej probabilistyce głownym obiektem studiów jest algebra zmiennych losowych – niekoniecznie przemienna wraz ze stanem. Przez niekomutatywną przestrzeń probabilistyczną rozumie się parę $(\mathcal{A}, \varphi)$ gdzie $\mathcal{A}$ jest zespoloną $\star$–algebrą z jedynką a φ dodatnim funkcjonałem liniowym takim, że $\varphi(1) = 1$. Niekomutatywna zmienna losowa to po prostu element $X \in \mathcal{A}$. Przez rozkład takiej zmiennej będziemy rozumieć momenty $\varphi(X^n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Ponieważ ciąg mommentów jest dodatnio określony, istnieje miara probabilistyczna μ na prostej taka, że $\varphi(X^n) = \int x^n d\mu(x)$.

Przy pomocy niezależności można zdefiniować splot miar – jest to miara odpowiadająca dodawaniu niezależnych zmiennych losowych. Ale oprócz klasycznej niezależności istnieją również inne rodzaje niezależności:

- wolna niezależność oraz splot wolny $\boxplus$, wprowadzony przez Voiculescu,
- boolowska niezależność wraz z odpowiadającym splotem $\uplus$,
- warunkowo wolna niezależność i splot $\boxdot$ par miar.

Dla par miar o zwartym nośniku takich jak wyżej (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) splot warunkowo wolny jest parą miar

$$(\xi, \eta) = (\mu_1, \nu_1) \boxdot (\mu_2, \nu_2), \tag{1}$$

gdzie $\eta = \nu_1 \boxplus \nu_2$ jest wolnym splotem Voiculescu miar ν_1 i ν_2.

Interesują mnie odwzorowania T miar probabilistycznych μ, ν takie, że jeśli napiszemy

$$(\xi, \eta) = (\mu, T\mu) \boxdot (\nu, T\nu),$$

to

$$\eta = T\xi. \tag{2}$$

Dla takich odwzorowań możemy za pomocą splotu warunkowo wolnego zdefiniować nowy, łączny splot $\boxplus_T$:

$$\mu \boxplus_T \nu = (\mu, T\mu) \boxdot (\nu, T\nu).$$

Bożejko postawił problem, aby znaleźć wszystkie takie odwzorowania – długo znanym przykładem była t–deformacja oraz jej uogólnienie, (a, b)–deformacja. Ostatnio Oravecz podał parę nowych przykładów.

Jeśli odwzorowanie T jest odwracalne, to możemy zdefiniować nowy, łączny splot w inny sposób, jako deformację splotu wolnego

$$\mu \boxplus^T \nu = T^{-1}(T\mu \boxplus T\nu).$$

Gdy T jest zarówno odwracalna i spełnia własność (2), to obie definicje sa równoważne.

W tym referacie zajmuję sie kilkoma przykładami odwzorowań, które dają nowe, łączne sploty.

2 Transformata Cauchy'ego ($z \in \mathbb{C}^+$)

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,\mu(x)}{z - x}$$

$$G_\mu(z) = \cfrac{1}{z - \alpha_1 - \cfrac{\lambda_1}{z - \alpha_2 - \cfrac{\lambda_2}{z - \alpha_3 - \cfrac{\lambda_3}{\ddots}}}}$$

Wzór Stieltjesa na odwrócenie:

$$f_\mu(x) = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \Im G_\mu(x + i\,\varepsilon)$$

$f_\mu(x)$–część absolutnie ciągła (gęstość) miary μ.

3 Odwrotność transformaty Cauchy'ego

Jednoznaczna reprezentacja Maassena dla miar μ ze skończoną wariancją

$$F_\mu(z) = \frac{1}{G_\mu(z)} = z - \alpha_1 + \int_{\mathbb{R}} \frac{d\,\tau(x)}{x - z},$$

$\alpha_1 = m_\mu(1), \tau$–dodatnia, skończona miara.

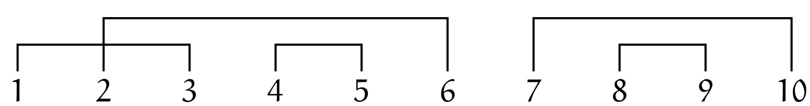
Jednoznaczna reprezentacja całkowa Nevanlinny

$$F_\mu(z) = \frac{1}{G_\mu(z)} = a + z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + x z}{x - z} d\rho(x)$$

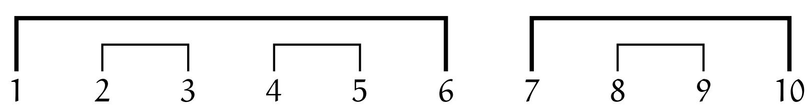
gdzie $a \in \mathbb{R}$, ρ miara dodatnia skończona. Ponadto

$$a = \Re\left(\frac{1}{G_\mu(i)}\right) = \int \frac{x}{x^2 + 1}\, d\,\tau(x)$$

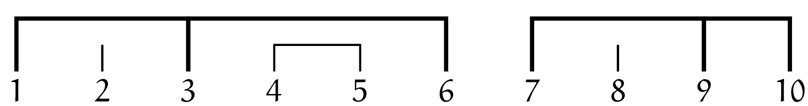
4 Partycje zbioru uporządkowanego



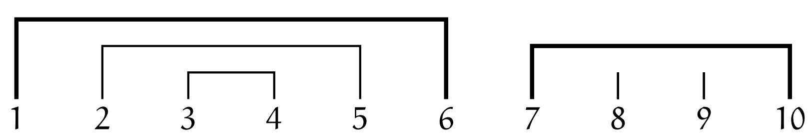
$\pi_1 \in P_2(10)$



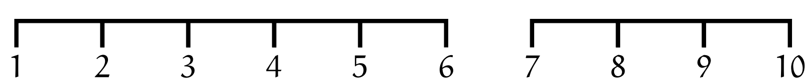
$\pi_2 \in P_2(10) \cap NC(10)$



$\pi_3 \in NC(10)$



$\pi_4 \in NC(10)$



$\pi_5 \in B(10) \subset NC(10)$

5 Klasyczna probabilistyka

$(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ przestrzeń z miarą probabilistyczną $\mathbf{P}$

$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ zmienne losowe (mierzalne).

Tworzą przemienną algebra ze stanem – wartością oczekiwaną.

Ze zmienną losową można związać miarę probabilistyczną

– rozkład μ_X

$$\mu_X((\infty, x]) = \mathbf{P}\{\omega \colon X(\omega) \leq x\}.$$

6 Nieprzemienna probabilistyka

$(\mathcal{A}, \varphi)$ $*$–algebra zmiennych losowych ze stanem φ

$\mathcal{A}$ – zespolona $*$–algebra z jedynką (np. C^*-algebra),

$X \in \mathcal{A}$ – zmienna losowa

φ – funkcjonał liniowy dodatni, $\varphi(1) = 1$

<u>Przykład</u>

Algebra macierzy $A = M_{n\times n}(\mathbb{C})$ jest C^*–algebrą z jedynką (inwolucja $a^* = \overline{a^T}$), ze stanem

$\varphi(a) = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(a)$ dla $a \in A$. Oczywiście A jest algebrą nieprzemienną.

Jeżeli $X = X^* \in \mathcal{A}$ to istnieje μ_X takie że $\varphi(X^k) = \int x^k d\mu_X(x)$.

Odwrotnie, każda miara o nośniku zwartym prowadzi do stanu na algebrze $\mathbb{C}\langle X\rangle$.

7 Niezależności

Klasyczna niezależność

Podalgebry $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ nieprzemiennej algebry $\mathcal{A}$ są niezależne gdy algebry $\mathcal{A}_i$ komutują (tzn $[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = 0$ dla $i \neq j$) oraz dla

$$a_j \in \mathcal{A}_{i_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{oraz} \quad i_k \neq i_l \quad \text{dla} \quad k \neq l$$

zachodzi

$$\varphi(a_1\, a_2 \cdots a_n) = \varphi(a_1)\, \varphi(a_2) \cdots \varphi(a_n).$$

Wolna niezależność

Podalgebry $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ są wolne gdy dla

$$\varphi(a_j) = 0, \quad a_j \in \mathcal{A}_{i_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{oraz} \quad i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n$$

zachodzi

$$\varphi(a_1\, a_2 \cdots a_n) = \varphi(a_1)\, \varphi(a_2) \cdots \varphi(a_n) = 0.$$

Boolowska niezależność

Podalgebry $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ są boolowsko niezależne gdy dla

$$a_j \in \mathcal{A}_{i_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{oraz} \quad i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n \quad \text{mamy}$$
$$\varphi(a_1\, a_2 \cdots a_n) = \varphi(a_1)\, \varphi(a_2) \cdots \varphi(a_n).$$

Warunkowa wolność

Niech $(\mathcal{A}, \varphi, \psi)$ przestrzeń z dwoma stanami. Podalgebry $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ są warunkowo wolne gdy dla

$$\psi(a_j) = 0, \quad a_j \in \mathcal{A}_{i_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{oraz} \quad i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$$

zachodzi

$$\varphi(a_1 \, a_2 \cdots a_n) = \varphi(a_1) \, \varphi(a_2) \cdots \varphi(a_n),$$

$$\psi(a_1 \, a_2 \cdots a_n) = \psi(a_1) \, \psi(a_2) \cdots \psi(a_n) = 0$$

czyli wolne ze względu na ψ i spełniające warunek podobny do boolowskiej niezależności ze względu na ϕ.

8 Przykłady obliczeń

Niezależność klasyczna

Gdy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ są klasycznie niezależne, to dla $X, X' \in \mathcal{A}_1, Y, Y' \in \mathcal{A}_2$

$$\begin{aligned} \varphi(XY) &= \varphi(X)\,\varphi(Y) \\ \varphi(XYX') &= \varphi(XX')\,\varphi(Y) \\ \varphi(XYX'Y') &= \varphi(XX')\,\varphi(YY'). \end{aligned}$$

Wolność

Gdy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ są wolne, to dla $X, X' \in \mathcal{A}_1, Y, Y' \in \mathcal{A}_2$

$$\begin{aligned} \varphi(XY) &= \varphi(X)\,\varphi(Y) \\ \varphi(XYX') &= \varphi(XX')\,\varphi(Y) \\ \varphi(XYX'Y') &= \varphi(XX')\,\varphi(Y)\,\varphi(Y') \\ &\quad + \varphi(X)\,\varphi(X')\,\varphi(YY') \\ &\quad - \varphi(X)\,\varphi(Y)\,\varphi(Y)\,\varphi(Y'). \end{aligned}$$

Boolowska niezależność

Gdy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ są boolowsko niezależne, to dla $X, X' \in \mathcal{A}_1, Y, Y' \in \mathcal{A}_2$

$$\begin{aligned} \varphi(XY) &= \varphi(X)\,\varphi(Y) \\ \varphi(XYX') &= \varphi(X)\,\varphi(X')\,\varphi(Y) \\ \varphi(XYX'Y') &= \varphi(X)\,\varphi(X')\,\varphi(Y)\,\varphi(Y'). \end{aligned}$$

Warunkowa wolność

Gdy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ są warunkowo wolne, to dla $X, X' \in \mathcal{A}_1, Y, Y' \in \mathcal{A}_2$

$$\begin{aligned} \varphi(XY) &= \varphi(X)\,\varphi(Y) \\ \varphi(XYX') &= \varphi(XX')\,\psi(Y) - \varphi(X)\,\varphi(X')\,\psi(Y) + \varphi(X)\,\varphi(X')\,\varphi(Y) \\ \varphi(XYX'Y') &= \varphi(XX')\,\varphi(Y')\,\psi(Y) + \varphi(X)\,\varphi(YY')\,\psi(X') \\ &\quad - \varphi(X)\,\varphi(Y)\,\varphi(Y')\,\psi(X') - \varphi(X)\,\varphi(X')\,\varphi(Y')\,\psi(Y) \\ &\quad + \varphi(X)\,\varphi(Y)\,\varphi(Y)\,\varphi(Y'). \end{aligned}$$

9 Splot klasyczny

Niech X, Y niezależne, o rozkładach μ, ν.
Do obliczania splotu służą funkcje charakterystyczne

$$\phi_X(t) = \int e^{itx} d\mu(x)$$

Wtedy dla zmiennych niezależnych

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(z) &= \phi_X(z) \cdot \phi_Y(z) \\ \phi_{\mu*\nu}(z) &= \phi_\mu(z) \cdot \phi_\nu(z) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_\mu(k+1)\, z^k &= \log \phi_\mu(z). \end{aligned}$$

Formuła wiążąca momenty i kumulanty (półniezmienniki)

$$m_\mu(n) = \sum_{\substack{\pi \in P(n) \\ \pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)}} \prod_{i=1}^{k} \varphi_\mu(|\pi_i|).$$

10 Splot wolny

Niech X, Y wolne, o rozkładach μ, ν.
Wolny splot $\mu \boxplus \nu$ to miara o momentach

$$m_{\mu\boxplus\nu}(k) = \varphi\left((X+Y)^k\right).$$

Do obliczania służy $R^{\boxplus}$–transformata $\qquad G_\mu\left(G_\mu^{-1}(z)\right) = z$

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_\mu^{\boxplus}(k+1)\, z^k = R_\mu^{\boxplus}(z) = G_\mu^{-1}(z) - \frac{1}{z}, \qquad G_\mu(z) = \frac{1}{z - R_\mu^{\boxplus}(G_\mu(z))}.$$

$R^{\boxplus}$-transformata linearyzuje wolny splot

$$R_{\mu\boxplus\nu}^{\boxplus}(z) = R_\mu^{\boxplus}(z) + R_\nu^{\boxplus}(z).$$

Formuła wiążąca momenty i kumulanty

$$m_\mu(n) = \sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \pi=(\pi_1,\dots,\pi_k)}} \prod_{i=1}^{k} R_\mu^{\boxplus}(|\pi_i|).$$

11 Centralne twierdzenie graniczne dla wolnego splotu

μ o zwartym nośniku, średniej zero i wariancji 1. Wtedy

$$D_{\frac{1}{\sqrt{n}}}\mu \boxplus \cdots \boxplus D_{\frac{1}{\sqrt{n}}}\mu \xrightarrow{n\to\infty} \omega$$

gdzie ω jest miarą Wignera

$$\mathrm{d}\,\omega\,(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\chi_{[-2,2]}(x)\,\mathrm{d}\,x, \quad G_\omega(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

<u>Idea dowodu</u> dla μ jak wyżej.
Szacujemy kumulanty

$$\begin{aligned} R_{D_\lambda\mu}^{\boxplus}(1) &= m_\mu(1) = 0 \\ R_{D_\lambda\mu}^{\boxplus}(2) &= m_\mu(2) = \lambda^2, \\ R_{D_\lambda\mu}^{\boxplus}(k) &= o\left(\lambda^2\right) \qquad \text{dla } k \geq 3. \end{aligned}$$

Dla $k = 3$ ze wzoru momentowo–kumulantowego

$$\begin{aligned} R^{\boxplus}_{D_\lambda \mu}(3) &= m_{D_\lambda \mu}(3) - 3\, R^{\boxplus}_{D_\lambda \mu}(2)\, R^{\boxplus}_{D_\lambda \mu}(1) - R^{\boxplus}_{D_\lambda \mu}(1)^3 \\ &= \lambda^3\, m_\mu(3) = o\left(\lambda^2\right), \end{aligned}$$

i przez indukcję: jeśli w π mamy blok $|B| \geq 3$, to $R^{\boxplus}_{D_\lambda \mu}(\pi) = o(\lambda^2)$. Jak nie to suma dwóch bloków $|B_1| + |B_2| \geq 2$, czyli

$$\prod_{B_i \in \pi} R^{\boxplus}_{D_\lambda \mu}(B_i) = o\left(\lambda^3\right).$$

Dla $\lambda = \frac{1}{\sqrt{N}}$ niech $\nu_N = \underbrace{D_{1/\sqrt{N}}\mu \boxplus \cdots \boxplus D_{1/\sqrt{N}}\mu}_{N\,\text{razy}}$. Wtedy

$$R^{\boxplus}_{\nu_N}(k) = N \cdot R^{\boxplus}_{D_{1/\sqrt{N}}\mu}(k).$$

Zatem

$$\begin{aligned} R^{\boxplus}_{\nu_N}(1) &= 0 \\ R^{\boxplus}_{\nu_N}(2) &= N \cdot \frac{1}{N} = 1 \\ R^{\boxplus}_{\nu_N}(k) &= N \cdot o\left(\frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \end{aligned}$$

czyli

$$R^{\boxplus}_{\nu_N}(z) \to R^{\boxplus}_{\omega}(z) = z.$$

Zatem

$$G_\omega(z) = \frac{1}{z - R^{\boxplus}_{\omega}(G_\omega(z))} = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

i ze wzoru Stieltjesa gęstość miary μ.

12 Twierdzenie graniczne Poissona dla wolnego splotu

$$\begin{aligned} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{N}\delta_1\right]^{\boxplus N} &\xrightarrow{N\to\infty} \pi_\lambda \\ d\,\tilde{\pi}_\lambda(x) = \frac{\sqrt{4\lambda - (x - \lambda - 1)^2}}{2\pi x} &\chi_{[1+\lambda-2\sqrt{\lambda}, 1+\lambda+2\sqrt{\lambda}]}(x)\, dx \\ \hat{\pi}_\lambda = \max(0, 1 - \lambda)\,\delta_0 & \end{aligned}$$

Idea dowodu

Dla μ_N liczymy $R^{\boxplus}$–transformatę

$$R^{\boxplus}_{\mu_N}(z) = \frac{-1 + z - \sqrt{-4\,z\,\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right) + (1+z)^2}}{2\,z}$$
$$= \frac{\lambda}{(1-z)N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Ponieważ

$$R^{\boxplus}_{\mu_N^{\boxplus N}}(z) = N \cdot R^{\boxplus}_{\mu_N}(z),$$

przy $N \to \infty$

$$R^{\boxplus}_{\pi_\lambda}(z) = \frac{\lambda}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\, z^n$$
$$R^{\boxplus}_{\pi_\lambda}(n) = \lambda.$$

Zatem

$$G_{\pi_\lambda}(z) = \frac{1}{z - R^{\boxplus}_{\pi_\lambda}(G_{\pi_\lambda}(z))}$$
$$G_{\pi_\lambda}(z) = \frac{z + 1 - \lambda - \sqrt{(z+1-\lambda)^2 - 4\,z}}{2\,z}$$

i ze wzoru Stieltjesa gęstość miary μ.

13 Splot boolowski

Niech X, Y boolowsko niezależne, o rozkładach μ, ν.

Splot boolowski $\mu \uplus \nu$ to miara o momentach

$$m_{\mu \uplus \nu}(k) = \varphi\left((X+Y)^k\right)$$

Do obliczania służy $R^{\uplus}$–transformata

$$R^{\uplus}_{\mu}(z) = z - \frac{1}{G_\mu(z)}.$$

$R^{\uplus}$-transformata linearyzuje splot boolowski

$$R^{\uplus}_{\mu \uplus \nu}(z) = R^{\uplus}_{\mu}(z) + R^{\uplus}_{\nu}(z)$$

Formuła wiążąca momenty i kumulanty

$$m_\mu(n) = \sum_{\substack{\pi \in B(n) \\ \pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)}} \prod_{i=1}^{k} R^{\uplus}_{\mu}(|\pi_i|).$$

14 Nieskończona podzielność

Definicja Miara $\mu \in \mathcal{M}_0$ jest $*$–nieskończenie podzielna, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $\mu_n \in \mathcal{M}_0$ taka, że $\mu = \underbrace{\mu_n * \cdots * \mu_n}_{n}$.

Przypadek klasyczny
Istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ i miara ν skończona poza 0 i całkująca x^2

$$\log \phi(z) = i\,z\,\alpha - \frac{1}{2} z^2 \sigma^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\,z\,\alpha} - 1 - \frac{i\,z\,\alpha}{1+x^2} \right) \mathrm{d}\,\nu\,(x)$$

Przypadek wolny
Istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ i miara $\nu \in \mathcal{M}_0$

$$R^{\boxplus}_{\mu}(z) = \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{1 - x\,z} \,\mathrm{d}\,\nu\,(x)$$

Przypadek boolowski
Wszystkie miary nieskończenie podzielne.

15 Splot warunkowo wolny

Niech $X \sim (\mu_1, \nu_1)$, $\quad Y \sim (\mu_2, \nu_2)$ warunkowo wolne. Wtedy

$$\begin{aligned} X + Y \sim (\mu, \nu) &= (\mu_1, \nu_1) \boxed{c} (\mu_2, \nu_2), \\ \text{gdzie} \qquad \nu &= \nu_1 \boxplus \nu_2 \\ \mu &= (\mu_1, \nu_1) \boxed{c} (\mu_2, \nu_2) \end{aligned}$$

Gdy $\mu_i = \nu_i$ splot wolny, gdy $\nu_1 = \nu_2 = \delta_0$ splot boolowski.

Splot N–krotny

Niech $X_i \in (\mathcal{A}_i, \varphi_i, \psi_i)$, $\quad X_i \sim (\mu_i, \nu_i)$, $\quad i = 1, \cdots, N$ będą warunkowo wolne.

Splot N–krotny $\mu = \boxed{c_N}_{i=1}^{N}(\mu_i, \nu_i)$ definiujemy jako

$$m_{\boxed{c_N}_{i=1}^{N}(\mu_i,\nu_i)}(n) = m_\mu(n) = \varphi\left((X_1 + X_2 + \ldots + X_N)^n\right).$$

16 Kumulanty warunkowo wolne

$$G_\mu(z) = \frac{1}{z - R^{\boxed{c}}_{\mu,\nu}(G_\nu(z))}, \qquad G_\nu(z) = \frac{1}{z - R^{\boxplus}_{\nu}(G_\nu(z))}$$

Jeżeli $(\mu, \nu) = (\mu_1, \nu_1) \boxed{c} (\mu_2, \nu_2)$ to

$$R^{\boxed{c}}_{\mu,\nu}(z) = R^{\boxed{c}}_{\mu_1,\nu_1}(z) + R^{\boxed{c}}_{\mu_2,\nu_2}(z), \qquad R^{\boxplus}_{\nu}(z) = R^{\boxplus}_{\nu_1}(z) + R^{\boxplus}_{\nu_2}(z).$$

Formuła wiążąca momenty i kumulanty

$$m_\nu(n) = \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi=(\pi_1,\ldots,\pi_k)}} \prod_{i=1}^{k} R^{\boxplus}_{\nu}(|\pi_i|),$$

$$m_\mu(n) = \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi=(\pi_1,\ldots,\pi_k)}} \prod_{\pi_i \text{ outer}} R^{\boxed{c}}_{\mu,\nu}(|\pi_i|) \prod_{\pi_j \text{ inner}} R^{\boxplus}_{\nu}(|\pi_j|),$$

17 Deformacje splotu wolnego (i klasycznego)

Deformacja splotu wolnego

dla dowolnego odwracalnego odwzorowania $T : \mu_i \mapsto T\mu_i$, splot $\boxed{T}$ zdefiniowany jako

$$\mu \boxed{T} \nu = T^{-1}\left(T\,\mu \boxplus T\,\nu\right)$$

jest łączny.
Deformacja kumulant i transformat

$$R^{T}_{\mu}(n) = R^{\boxplus}_{T\mu}(n), \qquad R^{T}_{\mu}(z) = R^{\boxplus}_{T\mu}(z).$$

Deformacja splotu klasycznego

W taki sam sposób można zdefiniować nowy splot jako deformację splotu klasycznego.

18 Deformacje splotu warunkowo wolnego

Dla $T : \mu_i \mapsto T\mu_i$ niech

$$\mu = \mathop{\boxed{T_N}}_{i=1}^{N} \mu_i = \mathop{\boxed{c_N}}_{i=1}^{N} (\mu_i, T\mu_i)$$

wtedy można rozpatrywać jako splot miar, a nie par miar.
Możliwość redukcji splotu N–krotnego $\boxed{T_N}$ do iterowania splotu par $\boxed{T_2}$ – dość delikatne pytanie

$$(\eta, \xi) = (\mu_1 \boxed{T_2}\, \mu_2, T\mu_1 \boxplus T\mu_2).$$

Aby wyliczyć $\eta \boxed{T_2}\, \mu_3$ – liczymy splot warunkowy par

$$(\eta, T\eta) \boxed{c} (\mu_3, T\mu_3).$$

$T\eta$ może być różna od $\xi = T\mu_1 \boxplus T\mu_2$.

Łączność splotu i możliwość zredukowania splot N–krotnego do splotu dwukrotnego, gdy $T\eta = T\mu_1 \boxplus T\mu_2$.

Pytanie Bożejki – znaleźć wszystkie takie T.

19 t–deformacja miar U_t

$$F_{U_t \mu}(z) = t\, F_\mu(z) + (1 - t)z$$

$$G_\mu(z) = \cfrac{1}{z - \alpha_1 - \cfrac{\lambda_1}{z - \alpha_2 - \cfrac{\lambda_2}{\ddots}}} \qquad G_{U_t \mu}(z) = \cfrac{1}{z - t\,\alpha_1 - \cfrac{t\,\lambda_1}{z - \alpha_2 - \cfrac{\lambda_2}{\ddots}}}$$

Własności

- $U_s(U_t(\mu)) = U_{s\,t}(\mu), \qquad (U_s)^{-1} = U_{1/s}$
- $D_\lambda(U_t(\mu)) = U_t(D_\lambda(\mu))$ gdzie $D_\lambda\mu(A) = \mu(\lambda^{-1}A)$
- $U_t(\mu) \xrightarrow{t\to 1} \mu$ w $*$-słabej topologii
- $U_t(\mu_n) \xrightarrow{\mu_n \to \mu} U_t(\mu)$ w $*$-słabej topologii

20 t–zdeformowany splot wolny

$$\mu \boxed{t} \nu = U_{1/t}(U_t\mu \boxplus U_t\nu) \qquad U_t(\mu \boxed{t} \nu) = U_t\mu \boxplus U_t\nu$$

Twierdzenie

$$(\mu, U_t\mu) \boxed{c} (\nu, U_t\nu) = (\mu \boxed{t} \nu, U_t\mu \boxplus U_t\nu) = (\mu \boxed{t} \nu, U_t(\mu \boxed{t} \nu))$$

$R^{\boxed{t}}$–transformaty

$$R^{\boxed{t}}_\mu(z) = \frac{1}{t} R^{\boxplus}_{U_t\mu}(z) = R^{\boxed{c}}_{\mu, U_t\mu}(z)$$

Formuła wiążąca momenty i kumulanty

$$m_\mu(n) = \sum_{\substack{\pi \in NC(n) \\ \pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)}} t^{\#\mathrm{inner}(\pi)} \prod_{i=1}^{k} R^{\boxed{t}}_\mu(|\pi_i|)$$

21 Centralne twierdzenie graniczne dla t–wolnego splotu

$$D_{\frac{1}{\sqrt{n}}}\mu \boxed{t} \cdots \boxed{t} D_{\frac{1}{\sqrt{n}}}\mu \xrightarrow{n\to\infty} \kappa_t$$

gdzie κ_t jest miarą Kestena

$$\begin{aligned} d\,\tilde{\kappa}_t(x) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{4\,t - x^2}}{1-(1-t)\,x^2}\,\chi_{[-2\sqrt{t},2\sqrt{t}]}(x)\,d\,x \\ \hat{\kappa}_t &= \frac{1-2t}{2-2t}\left(\delta_{-\frac{1}{\sqrt{1-t}}} + \delta_{\frac{1}{\sqrt{1-t}}}\right) \qquad \text{dla } t < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$G_{\kappa_t}(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z - \cfrac{t}{z - \cfrac{t}{\ddots}}}}$$

κ_t dla $t = 1 - \frac{1}{2N}$ to miara spektralna spaceru losowego na $\mathbb{F}_N$.

22 Twierdzenie graniczne Poissona dla t–wolnego splotu

$$\left[\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{N}\,\delta_1\right]^{\boxed{t}N} \xrightarrow{N\to\infty} \pi_\lambda^{(t)}$$

$$\begin{aligned} d\,\tilde{\pi}_\lambda(x) &= \frac{\sqrt{4t\,\lambda - (x - t\,\lambda - 1)^2}}{2\pi x\,\left((t-1)x + (\lambda + 1 - t\,\lambda)\right)}\,d\,x \\ \text{dla} \quad x &\in \left[\,1 + t\,\lambda - 2\sqrt{t\,\lambda},\; 1 + t\,\lambda + 2\sqrt{t\,\lambda}\,\right] \\ \hat{\pi}_\lambda &= \begin{cases} \max(0, 1-\lambda)\,\delta_0 & \text{dla } t = 1 \\ w_1\,\delta_0 + w_2\,\delta_{\frac{\lambda\,t-\lambda-1}{t-1}} & \text{dla } t \neq 1 \end{cases} \\ w_1 &= \frac{1}{|\,(-1+\lambda\,(-1+t))\,|}\max\left(0, 1 - t\,\lambda\right) \\ w_2 &= \frac{1}{|\,(-1+\lambda\,(-1+t))\,|}\max\left(0, \lambda\,|1-t| - \frac{t}{|1-t|}\right) \end{aligned}$$

23 Możliwe uogólnienia t–deformacji

Definicja (a, b)–deformacji

Dla $\mathbf{t} = (a, b)$, $b \geq 0, a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{G_{\mu^{(a,b)}}(z)} &= -a\, m_\mu(1) + z + b\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,\tau(x)}{x-z} \\ &= \frac{b}{G_\mu(z)} + (1-b)z + (b-a)m_\mu(1).\end{aligned}$$

Ponadto

$$G_{\mu^{(a,b)}}(z) = \cfrac{1}{z - a\,\alpha_1 - \cfrac{b\lambda_1}{z - \alpha_2 - \cfrac{\lambda_2}{z - \alpha_3 - \cfrac{\lambda_3}{\ddots}}}}.$$

Dobra z punktu widzenia splotu warunkowo wolnego – zachodzi własność Bożejki.

24 Twierdzenia graniczne

Centralne twierdzenie graniczne

miara Kestena

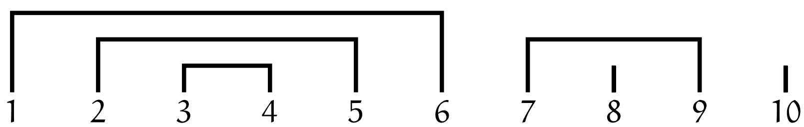
Miara Poissona

$$\begin{aligned}d\,\tilde{p_\lambda}(x) &= \frac{\sqrt{4b\,\lambda - (x - a\,\lambda - 1)^2}}{2\pi\,\left((b-1)x^2 + (\lambda + a\,\lambda + 1 - 2b\,\lambda)x - (a-b)\lambda^2\right)}\,d\,x \\ \text{dla} \quad & x \in \left[1 + a\,\lambda - 2\sqrt{b\,\lambda},\, 1 + a\,\lambda + 2\sqrt{b\,\lambda}\right].\end{aligned}$$

Część dyskretna składa się z co najwyżej dwóch atomów.

25 Wzór momentowo–kumulantowy

Dla nieprzecinającej partycji niech $\mathrm{ins}(\pi)$ oznacza ilość wewnętrznych singletonów, zaś $\mathrm{nsi}(\pi)$ ilość bloków wewnętrznych nie będących singletonami.



Wtedy dla (a, b)–splotu mamy

$$m_\mu(n) = \sum_{\pi \in NC(n)} a^{\mathrm{ins}(\pi)}\, b^{\mathrm{nsi}(\pi)} \prod_{B \in \pi} R_\mu^{(a,b)}(|B|).$$

26 V_a–deformacja

Definicja

Dla miar probabilistycznych μ takich, że $m_\mu(2) < \infty$ niech

$$\frac{1}{G_{V_a\mu}(z)} = \frac{1}{G_\mu(z)} + a\, R_\mu^{\boxplus}(2).$$

$$G_{V_a\mu}(z) = \cfrac{1}{z - \alpha_1 + a\,\lambda_1 - \cfrac{\lambda_1}{z - \alpha_2 - \cfrac{\lambda_2}{z - \alpha_3 - \cfrac{\lambda_3}{\ddots}}}}.$$

Fakt

$$R_{V_a\mu}^{\boxplus}(2) = R_\mu^{\boxplus}(2).$$

27 Własności V_a

- $V_a(V_b(\mu)) = V_{a+b}(\mu), \qquad (V_a)^{-1} = V_{-a}$

- $V_a(\mu) \xrightarrow{a\to 0} \mu$ w $*$–słabej topologii

- $V_a(\mu_n) \xrightarrow{\mu_n\to\mu} V_a(\mu)$ w $*$–słabej topologii

- $D_\lambda(V_a(\mu)) \neq V_a(D_\lambda(\mu))$ gdzie $D_\lambda\mu(A) = \mu(\lambda^{-1}A)$:

$$\frac{1}{G_{V_a(D_\lambda\mu)}(z)} = \frac{1}{G_{D_\lambda(V_a\mu)}(z)} + a(\lambda^2 - \lambda)R_\mu^{\boxplus}(2).$$

- rekurencja dla momentów:

$$m_{V_a\mu}(n) = m_\mu(n) - a\,R_\mu^{\boxplus}(2)\sum_{k=0}^{n-1} m_\mu(k)\,m_{V_a\mu}(n-k-1).$$

28 V_a–deformacja splotu wolnego

Definicja 1 Dla $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0$

$$(\mu \boxed{\scriptstyle a} \nu, V_a\mu \boxplus V_a\nu) = (\mu, V_a\mu) \boxed{\scriptstyle c} (\nu, V_a\nu).$$

Definicja 2 Dla μ i ν takich, że $m_\mu(2), m_\nu(2) < \infty$

$$\mu \boxed{\scriptstyle a} \nu = V_{-a}\left(V_a\mu \boxplus V_a\nu\right).$$

Twierdzenie
Definicje 1 i 2 są równoważne dla miar o zwartym nośniku:

$$\begin{aligned}(\mu \boxed{\scriptstyle a} \nu, V_a\mu \boxplus V_a\nu) &= (\mu \boxed{\scriptstyle a} \nu, V_a(\mu \boxed{\scriptstyle a} \nu)) = \\ &= (V_{-a}(V_a\mu \boxplus V_a\nu), V_a(\mu \boxed{\scriptstyle a} \nu)).\end{aligned}$$

29 Kumulanty dla V_a-zdeformowanego splotu

Ponieważ

$$V_a(\mu \boxed{a} \nu) = V_a\mu \boxplus V_a\nu$$

można zdefiniować

$$R^{\boxed{a}}_{\mu}(n) := R^{\boxplus}_{V_a\mu}(n).$$

Wtedy

$$R^{\boxed{a}}_{\mu \boxed{a} \nu}(n) = R^{\boxed{a}}_{\mu}(n) + R^{\boxed{a}}_{\nu}(n).$$

Twierdzenie
Wzór momentowo–kumulantowy dla $\boxed{a}$–splotu:

$$m_\mu(n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \left(R^{\boxed{a}}_{\mu}(1) + a\, R^{\boxed{a}}_{\mu}(2)\right)^{\sharp \mathrm{outs}(\pi)} \prod_{\substack{B \in \pi \\ B \notin \mathrm{outs}(\pi)}} R^{\boxed{a}}_{\mu}(|B|).$$

30 Centralne twierdzenie graniczne

Twierdzenie
Niech $\mu \in \mathcal{M}_0$ taka, że $m_\mu(1) = 0$, and $m_\mu(2) = 1$. Wtedy

$$D_{1/\sqrt{N}}\mu \boxed{a} \cdots \boxed{a} D_{1/\sqrt{N}}\mu \longrightarrow \omega$$

w $*$–słabej topologii, gdzie ω jest miarą Wignera

$$d\,\omega\,(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\, d\,x.$$

Uwaga
Ponieważ V_a nie komutuje z dylatacją, nie można skorzystać z ogólnego centralnego twierdzenia granicznego dla splotu warunkowo wolnego .

31 Twierdzenie Poissona

Niech $\lambda > 0$ oraz

$$\mu_N = \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{N}\delta_1, \quad N \geq 1.$$

Wtedy

$$\mu_N \boxed{a} \cdots \boxed{a}\, \mu_N \longrightarrow p_\lambda$$

w $*$–słabej topologii, gdzie p_λ ma część absolutnie ciągłą

$$d\,\tilde{p}_\lambda(x) = \frac{\sqrt{4\lambda - (x + a\lambda - \lambda - 1)^2}}{2\pi\left((1 - a\lambda)x + a\lambda^2\right)}\, d\,x \chi_{[\lambda+1-a\lambda-2\sqrt{\lambda},\lambda+1-a\lambda+2\sqrt{\lambda}]}(x)$$

oraz atom

$$\hat{p}_\lambda(x) = \max\left(0, 1 - \frac{\lambda}{(a\lambda - 1)^2}\right)\delta_{\frac{a\lambda^2}{a\lambda-1}}.$$

32 Miary nieskończenie podzielne w wolnej probabilistyce

<u>Fakt</u>

Niech φ o zwartym nośniku i nieskończenie podzielna dla wolnego splotu ($\varphi \in \mathcal{I}_0$).
Istnieje $*$–słabo ciągła $\boxplus$-półgrupa (φ_t) taka, że $\varphi_1 = \varphi$. Wtedy

$$R^{\boxplus}_{\varphi_t}(z) = t \cdot R^{\boxplus}_{\varphi}(z)$$

oraz

$$R^{\boxplus}_{\varphi_t}(n) = t \cdot R^{\boxplus}_{\varphi}(n).$$

33 Deformacja Φ^φ_t

<u>Definicja</u>

Niech $\varphi \in \mathcal{I}_0$ ustalona oraz $\mu \in \mathcal{M}_0$. Rozważmy odwzorowanie:

$$\Phi^\varphi_t(\mu) = \varphi_{t \cdot R^{\boxplus}_{\mu}(2)},$$

zależące od $R^{\boxplus}_{\mu}(2)$ i nieujemnego parametru t.

Fakt
Mamy następującą relację dla odpowiednich transformat

$$R^{\boxplus}_{\Phi^{\varphi}_t \mu}(z) = R^{\boxplus}_{\varphi_{t\, R^{\boxplus}_{\mu}(2)}}(z) = t\, R^{\boxplus}_{\mu}(2)\, R^{\boxplus}_{\varphi}(z).$$

34 Własności Φ^{φ}_t

- Φ^{φ}_t nie jest odwracalna
- $\Phi^{\varphi}_t(\Phi^{\varphi}_s(\mu)) = \Phi^{\varphi}_{ts}(\mu)$ gdy $R^{\boxplus}_{\varphi}(2) = 1$
- $\Phi^{\varphi}_t(\mu) \xrightarrow{t\to 0} \delta_0$ w $*$–słabej topologii
- $\Phi^{\varphi}_t(\mu_n) \xrightarrow{\mu_n\to\mu} \Phi^{\varphi}_t(\mu)$ w $*$–słabej topologii
- $D_\lambda(\Phi^{\varphi}_t(\mu)) \neq \Phi^{\varphi}_t(D_\lambda(\mu))$.

35 Φ^{φ}_t–zdeformowany splot

Definicja Dla $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0$

$$(\mu \boxed{\varphi} \nu, \Phi^{\varphi}_t\mu \boxplus \Phi^{\varphi}_t\nu) = (\mu, \Phi^{\varphi}_t\mu) \boxed{c} (\nu, \Phi^{\varphi}_t\nu).$$

Twierdzenie
Mamy

$$(\mu \boxed{\varphi} \nu, \Phi^{\varphi}_t\mu \boxplus \Phi^{\varphi}_t\nu) = (\mu \boxed{\varphi} \nu, \Phi^{\varphi}_t(\mu \boxed{\varphi} \nu)),$$

czyli splot $\boxed{\varphi}$ jest łączny.

Uwaga
Ponieważ Φ^{φ}_t nie jest odwracalna, nie ma alternatywnej deficji.

36 Centralne twierdzenie graniczne

Twierdzenie

Niech $\mu \in \mathcal{M}_0$ taka, że $m_\mu(1) = 0$ i $m_\mu(2) = 1$. Niech $\varphi \in \mathcal{I}_0$. Wtedy

$$\begin{aligned} &D_{1/\sqrt{N}}\mu \boxed{\varphi} \dots \boxed{\varphi} D_{1/\sqrt{N}}\mu = \\ &= (D_{1/\sqrt{N}}\mu, \Phi_t^\varphi D_{1/\sqrt{N}}\mu) \boxed{c} \cdots \boxed{c} (D_{1/\sqrt{N}}\mu, \Phi_t^\varphi D_{1/\sqrt{N}}\mu) \longrightarrow (\xi, \varphi_t) \end{aligned}$$

w $*$–słabej topologii, ponadto $\varphi_t = \Phi_t^\varphi \xi$.

Para (ξ, φ_t) jest wyznaczona jednoznacznie dzięki

$$R^{\boxed{c}}_{\xi,\varphi_t}(z) = z, \qquad R^{\boxplus}_{\varphi_t}(z) = t \cdot R^{\boxplus}_{\varphi}(z).$$

Uwaga

Ponieważ ogólnie Φ_t^φ nie komutuje z dylatacją, nie można użyć centralnego twierdzenia granicznego dla warunkowego splotu.

37 Twierdzenie Poissona

Twierdzenie

Niech $\lambda > 0$ oraz

$$\mu_N = \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{N}\delta_1, \quad N \geq 1.$$

Wtedy

$$\mu_N \boxed{\varphi} \dots \boxed{\varphi} \mu_N = (\mu_N, \Phi_t^\varphi \mu_N) \boxed{c} \cdots \boxed{c} (\mu_N, \Phi_t^\varphi \mu_N) \longrightarrow (p_\lambda, \varphi_{\lambda t})$$

w $*$–słabej topologii, oraz $\varphi_{\lambda t} = \Phi_t^\varphi p_\lambda$.

Para $(p_\lambda, \varphi_{\lambda t})$ jest wyznaczona przez

$$R^{\boxed{c}}_{p_\lambda,\varphi_{\lambda t}}(z) = \frac{\lambda}{1-z}, \qquad R^{\boxplus}_{\varphi_{\lambda t}}(z) = \lambda\, t\, R^{\boxplus}_{\varphi}(z).$$

Literatura

[CO] I. Cuculescu, A. G. Oprea, Noncommutative Probability, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994

[HiP] F. Hiai, D. Petz, The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy, American Mathematical Society, 2000

[V1] D. Voiculescu, Addition of Certain Non-commuting Random Variables, Journal of Functional Analysis, **66**(3), (1986), 323–346

[V2] D. Voiculescu, Symmetries of some reduced free product C*-algebras, in Operator algebras and Their Connections with Topology and Ergodic Theory, Lecture Notes in Math.,**Vol. 1132**, Springer, (1986), 556–588

[VDN] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica, Free Random Variables, CRM Monograph Series,**Vol. 1**, AMS, 1992