

Wiosenna Szkoła
Układów Dynamicznych 2007
Będlewo, 19.04-22.04 2007

**Centralne twierdzenia graniczne
w układach dynamicznych**

Marta Tyran-Kamińska

Uniwersytet Śląski

Operator Frobeniusa-Perrona

(X, \mathcal{B}, T) - układ dynamiczny.

ν - miara niezmiennicza dla T , tj. $\nu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$, $A \in \mathcal{B}$.

μ -miara σ -skończona, T - niesingularne, tj. $\mu \circ T^{-1} \ll \mu$,

$P : L^1(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$:

$$\int_A Pf(x)\mu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} f(x)\mu(dx) \quad A \in \mathcal{B}, f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu).$$

Równoważnie, dla $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $g \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$

$$\int Pf(x)g(x)\mu(dx) = \int f(x)g(T(x))\mu(dx).$$

Gdy $\mu = \nu$ to $P = \mathcal{P}_T$.

Absolutnie ciągłe miary niezmiennicze

(X, \mathcal{B}, T, μ) , T - niesingularne,

P - operator Frobeniusa-Perrona

ν - miara ma gęstość f_* , gdy

$$\nu(A) = \int_A f_*(x) \mu(dx), \quad A \in \mathcal{B},$$

gdzie $f_* \geq 0$, $\|f_*\|_1 = \int f_*(x) \mu(dx) = 1$.

ν - niezmiennicza $\iff Pf_* = f_*$

f_* - gęstość niezmiennicza

Wtedy

$$P(ff_*) = f_* \mathcal{P}_T f, \quad f \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu).$$

Odwzorowania kawałkami monotoniczne

$$T : [a, b] \rightarrow [a, b]$$

istnieje podział $a = a_0 < a_1 < \dots < a_l = b$ przedziału $[a, b]$:

- (i) $T|_{(a_{i-1}, a_i)}$ ma rozszerzenie klasy C^1 na $[a_{i-1}, a_i]$,
- (ii) $|T'(x)| > 0$ dla $x \in (a_{i-1}, a_i)$, $i = 1, \dots, l$.

$X = [a, b]$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$, μ - miara Lebesgue'a

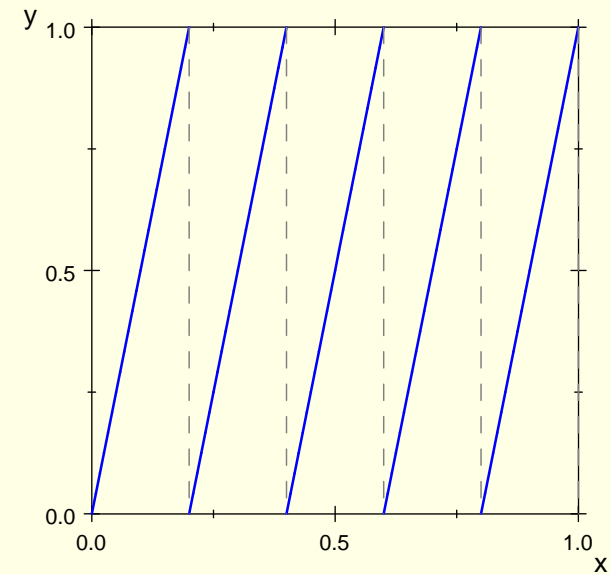
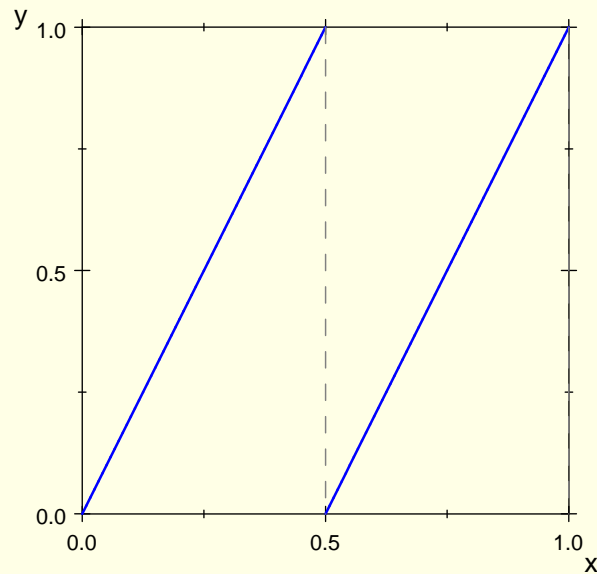
Wtedy

$$Pf(x) = \sum_{i=1}^l \frac{f(T_{(i)}^{-1}(x))}{|T'(T_{(i)}^{-1}(x))|} \mathbf{1}_{T((a_{i-1}, a_i))}(x),$$

gdzie $T_{(i)}^{-1} = (T|_{(a_{i-1}, a_i)})^{-1}$.

Odwzorowanie r -adyczne

$T(x) = rx \pmod{1}$, $x \in [0, 1)$, $r > 1$ - liczba naturalna,

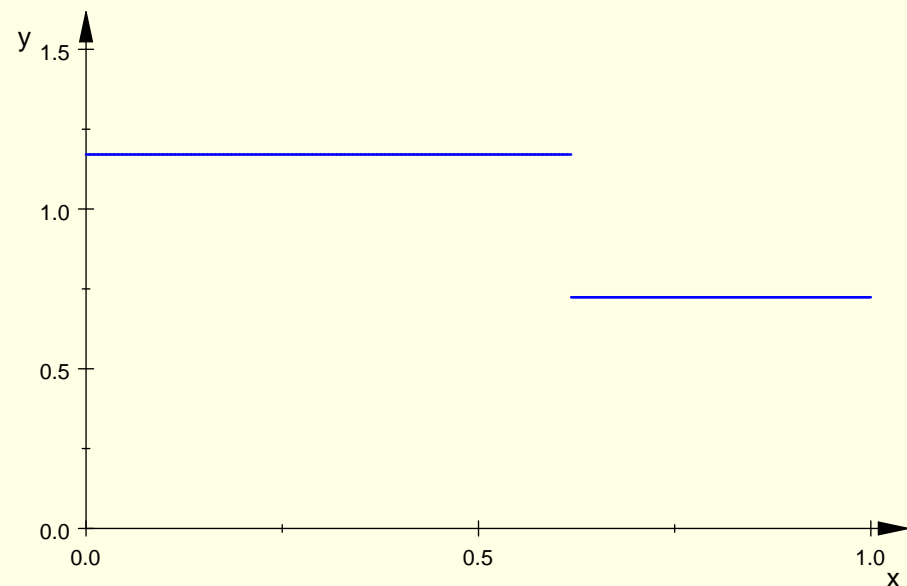
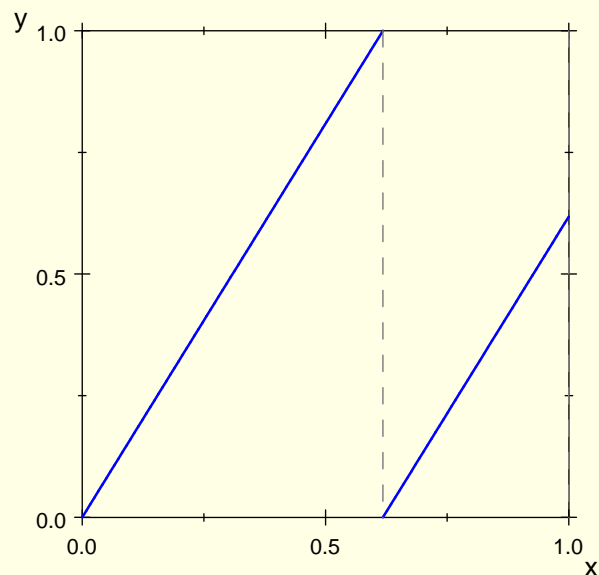


$$Pf(x) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f\left(\frac{i}{r} + \frac{x}{r}\right)$$

$P1 = 1 \implies$ miara Lebesgue'a jest niezmiennicza

$$P = \mathcal{P}_T$$

Odwzorowanie beta: $T(x) = \beta x \pmod{1}$, $x \in [0, 1)$,

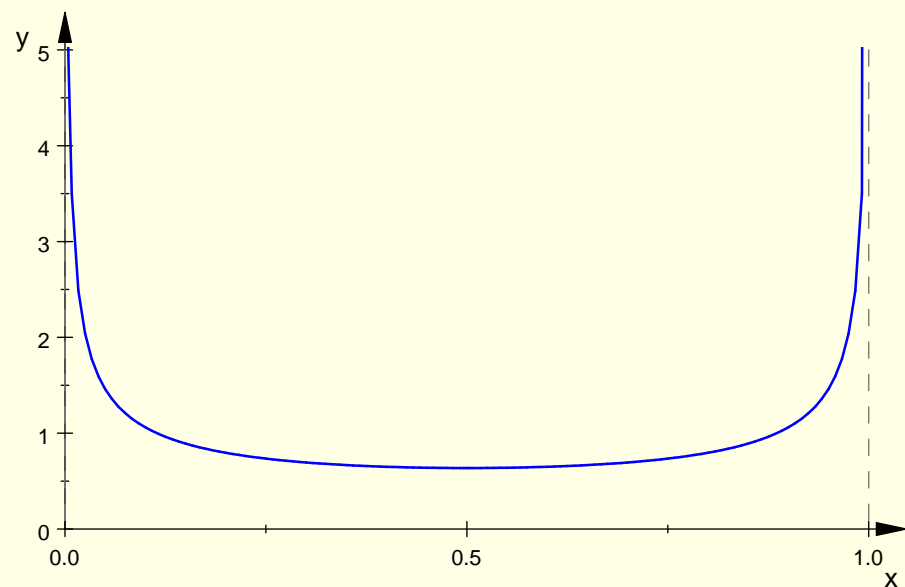
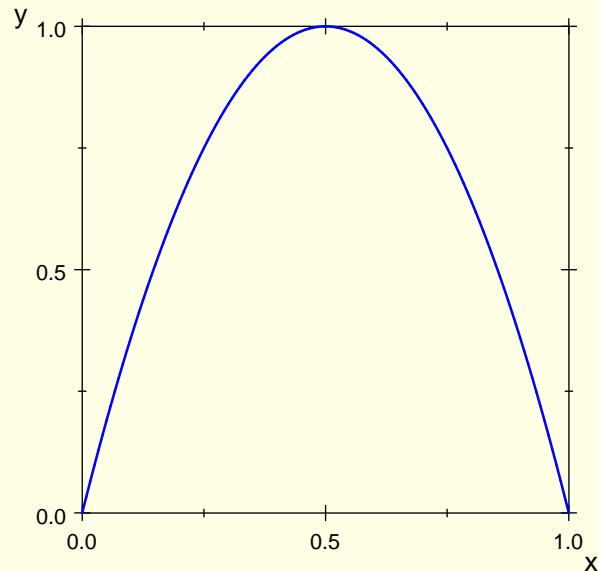


$$f_*(x) = \frac{\beta^3}{1 + \beta^2} 1_{[0, \frac{1}{\beta})}(x) + \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} 1_{[\frac{1}{\beta}, 1)}(x) \quad \text{gdym} \quad \beta = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$Pf(x) = \frac{1}{\beta} f\left(\frac{x}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta} f\left(\frac{x+1}{\beta}\right) 1_{[0, \beta-1]}(x)$$

$$\mathcal{P}_T f(x) = \frac{1}{\beta} \left(f\left(\frac{x}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta} f\left(\frac{x+1}{\beta}\right) \right) 1_{[0, \frac{1}{\beta})}(x) + f\left(\frac{x}{\beta}\right) 1_{[\frac{1}{\beta}, 1)}(x)$$

Odwzorowanie logistyczne: $T(x) = 4x(1 - x)$, $x \in [0, 1]$,



$$f_*(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$

$$Pf(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \left(f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) \right)$$

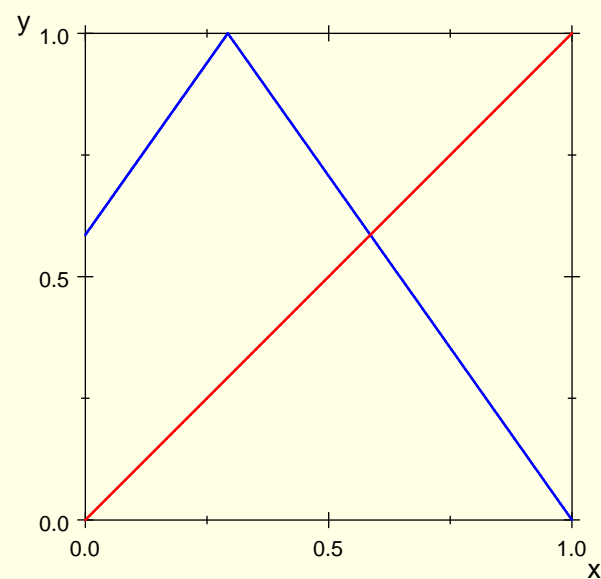
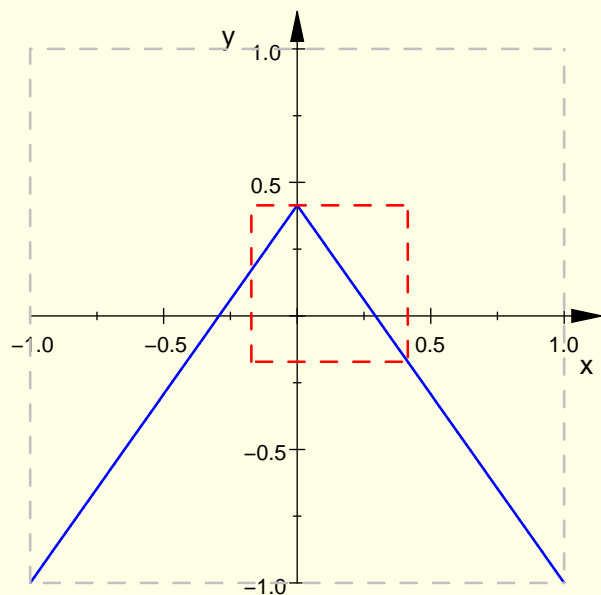
$$\mathcal{P}_T f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) \right)$$

Skośne odwzorowania trójkątne: $T_a(x) = a - 1 - a|x|$,
 $x \in [-1, 1]$, $a \in (1, 2]$

Dla $1 < a \leq 2$ mamy $T_a(A) = A$, gdzie $A = [T_a^2(0), T_a(0)]$.

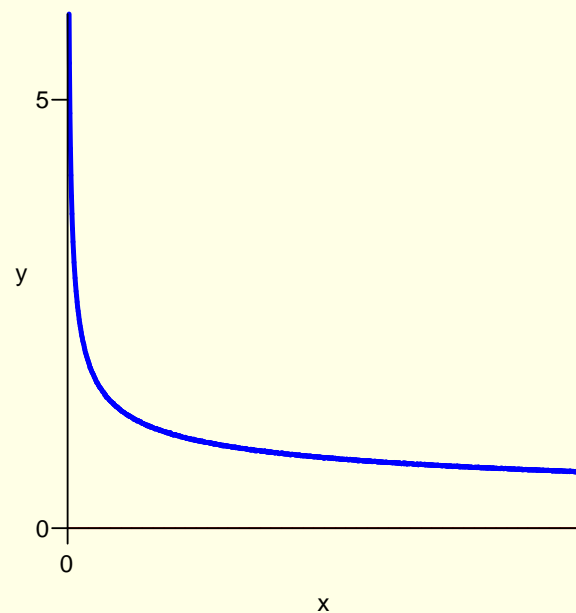
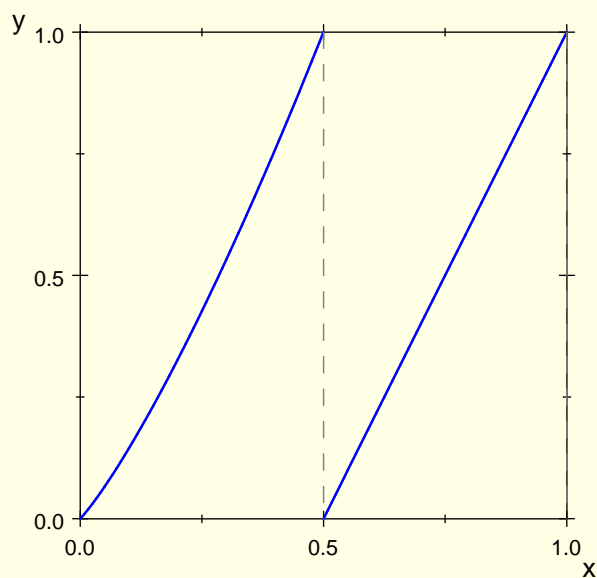
Gęstość niezmiennicza f_a ma nośnik zawarty w A .

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{4}, & x \in [-(\sqrt{2} - 1)^2, (\sqrt{2} - 1)^2], \\ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)^2}{4}, & x \in [(\sqrt{2} - 1)^2, \sqrt{2} - 1], \end{cases} \quad \text{gdy } a = \sqrt{2}.$$



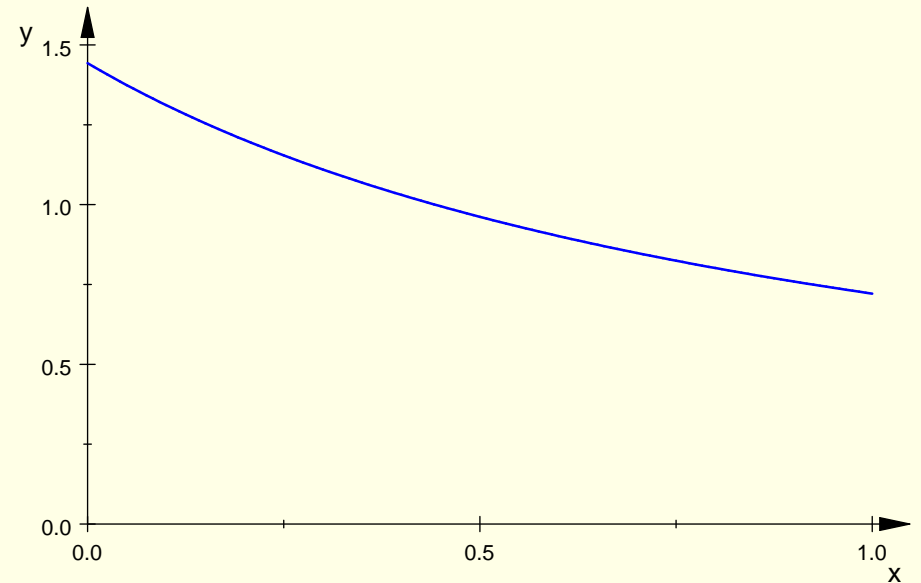
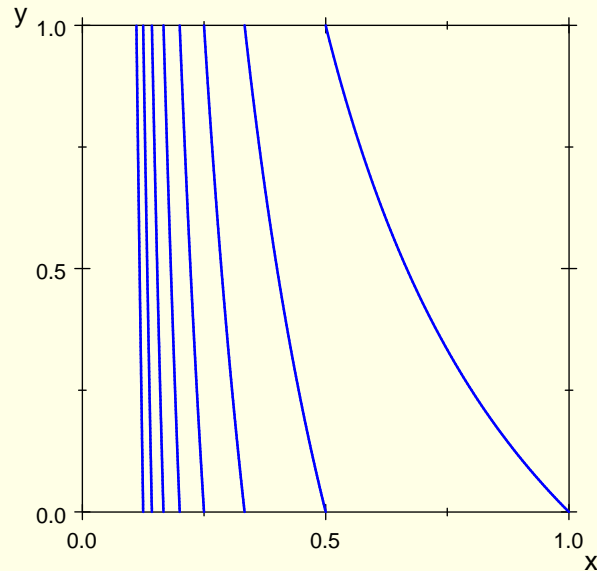
Transformacja Pomeau-Manneville'a

$$T_\gamma(x) = \begin{cases} x(1 + 2^\gamma x^\gamma) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$



$$f_*(x) = \frac{v_\gamma(x)}{x^\gamma}, \quad c_1 \leq v_\gamma(x) \leq c_2, \quad \text{gdzie } c_1, c_2 > 0$$

Transformacja Gaussa: $T(x) = 1/x \pmod{1}$, $x \in (0, 1)$,



$$f_*(x) = \frac{1}{(x+1) \ln 2}$$

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} f\left(\frac{1}{x+k}\right)$$

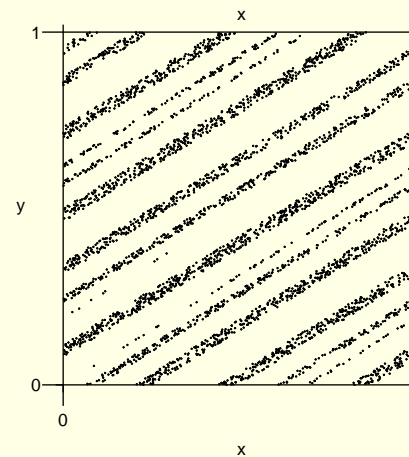
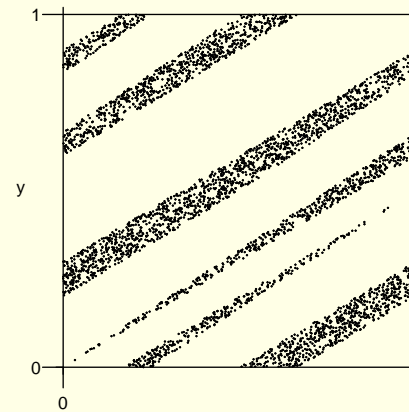
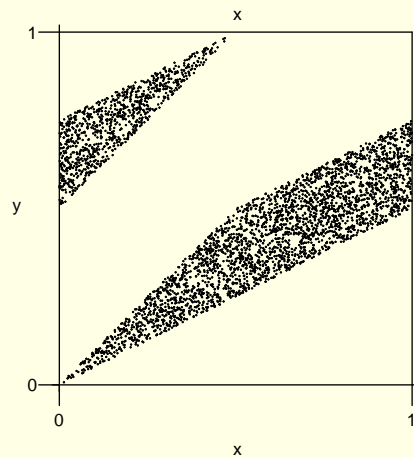
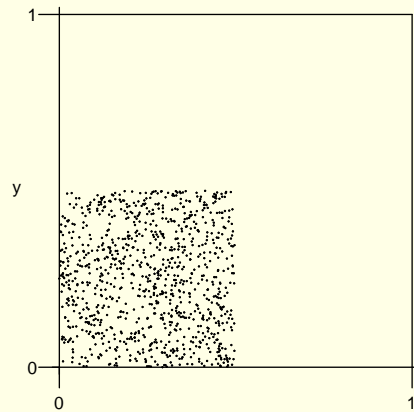
$$\mathcal{P}_T f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x+1}{(x+k)(x+k+1)} f\left(\frac{1}{x+k}\right).$$

Algebraiczne automorfizmy torusa

$$T(x, y) = (2x + y, x + y) \pmod{1},$$

T jest odwracalne, miara Lebesgue'a jest niezmiennicza

$$Pf(x, y) = f(T^{-1}(x, y))$$



Odwzorowania "piekarskie" [Alexander and Yorke, 1984]

$$S_\beta : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1], \beta \in (0, 1),$$

$$S_\beta(x, y) = (T(x), \beta y + (1 - \beta)h(x))$$

gdzie T jest diadyczna na $[-1, 1]$

$$T(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in [-1, 0], \\ 2x - 1, & x \in (0, 1], \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

S_β ma dokładnie jedną miarę niezmienniczą ν_β taką, że :

$$\nu_\beta([-1, x] \times [-1, 1]) = x + 1 \text{ dla } x \in [-1, 1];$$

ν_β nie jest absolutnie ciągła dla $\beta \in (0, \frac{1}{2})$;

$\nu_{\frac{1}{2}}$ jest unormowaną miarą Lebesgue'a na $[-1, 1]^2$;

ν_β jest absolutnie ciągła dla p.w. $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$, nie jest np. dla

$$\beta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa

(X, \mathcal{B}, T, ν) - układ dynamiczny z miarą niezmienniczą

Wówczas dla $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = E_\nu(f|\mathcal{I}), \quad \nu - \text{p.w.}$$

gdzie \mathcal{I} jest σ -ciałem zbiorów prawie niezmienniczych.

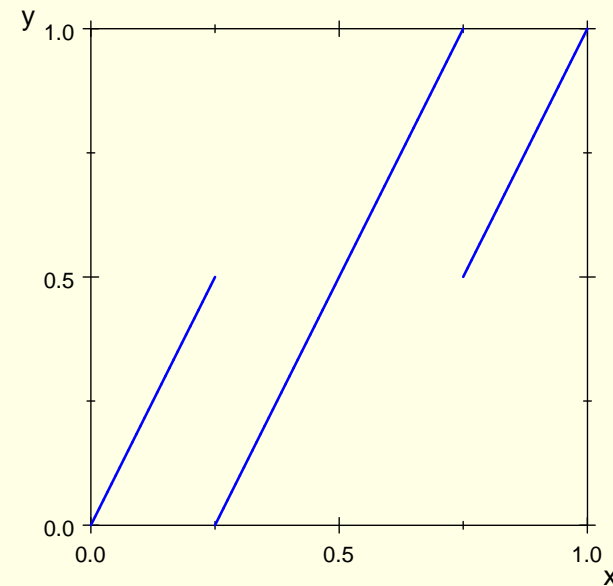
$E_\nu(\cdot|\mathcal{I})$ - warunkowa wartość oczekiwana, tj. gdy $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu)$ to $E_\nu(f|\mathcal{I}) \in L^1(X, \mathcal{I}, \nu)$ oraz

$$\int_A E_\nu(f|\mathcal{I})(x) \nu(dx) = \int_A f(x) \nu(dx), \quad A \in \mathcal{I}.$$

Gdy T jest ergodyczne, tj. zbiory niezmiennicze są trywialne: $\nu(A) = 0$ lub $\nu(X \setminus A) = 0$, to $E_\nu(f|\mathcal{I}) = \int f(x) \nu(dx)$.

Przykład 1. $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{4}) \\ 2x - \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \\ 2x - 1, & x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$



ν - miara Lebesgue'a

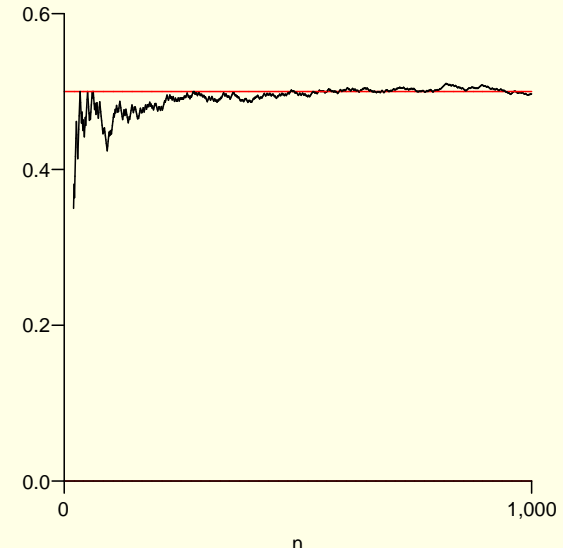
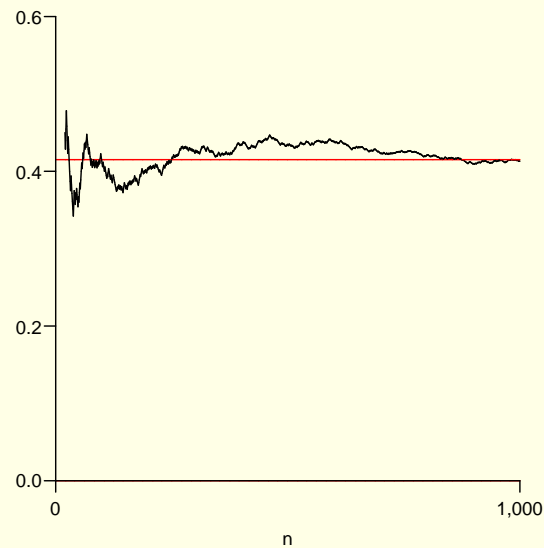
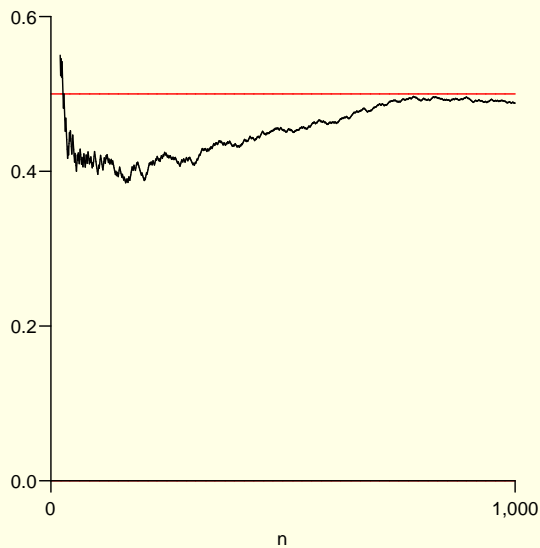
T - nie jest ergodyczne: $T^{-1}([0, \frac{1}{2}]) = [0, \frac{1}{2}]$ i $T^{-1}([\frac{1}{2}, 1]) = [\frac{1}{2}, 1]$

Przykład 2. $f(x) = 1_A(x)$, $A = [\frac{1}{2}, 1)$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x_0)) \rightarrow \nu(A) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & T - \text{diadyczna} \\ 2 - \frac{\ln 3}{\ln 2}, & T - \text{Guass} \\ \frac{1}{2}, & T - \text{logistyczna} \end{cases}$$

punkt początkowy: $x_0 = \pi - 3$;

wykres $(n, \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x_0)))$, $20 \leq n \leq 1000$,



Przykład 3. Ułamki łańcuchowe

$$T(x) = 1/x \pmod{1}, \quad x \in (0, 1), \quad x = \frac{1}{\left[\frac{1}{x} \right] + T(x)}$$

$$x = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \frac{1}{a_3(x) + \frac{1}{\dots}}}}$$

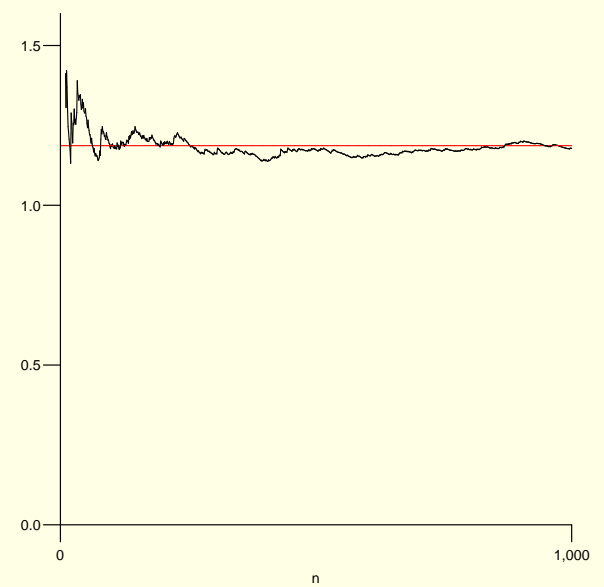
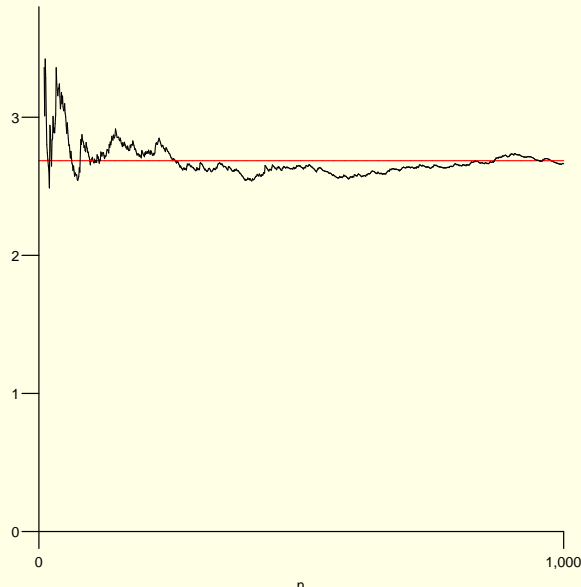
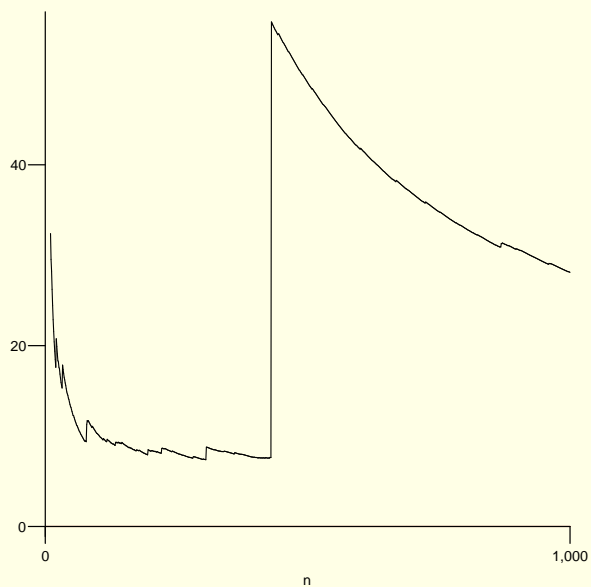
gdzie $a_1(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$, $a_i(x) = a_1(T^{i-1}(x))$, $i \geq 2$.

$$\int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{a_1(x)}{1+x} dx = k \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \approx \frac{1}{k} \implies \int_0^1 a_1(x) \nu(dx) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_1(T^i(x)) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log a_1(T^i(x)) = \prod_{k=1}^{\infty} k^{\log_2 \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)} \approx 2.685452$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log T^i(x) = \frac{\pi^2}{12 \ln 2} \approx 1.865691$$



Przykład 4. Twierdzenie Borela o liczbach normalnych

Rozwinięcie dwójkowe $x \in [0, 1)$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x)}{2^i}, \quad d_i(x) \in \{0, 1\}.$$

$$\left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i(x) = \frac{1}{2} \right\} - \text{zbiór liczb normalnych.}$$

$$T(x) = 2x \pmod{1}, \quad A = \left[\frac{1}{2}, 1\right), \quad f(x) = 1_A(x) = d_1(x),$$

$$d_i(x) = d_1(T^{i-1}(x)), \quad i \geq 1.$$

Twierdzenie Birkhoffa \implies Mocne Prawo Wielkich Liczb

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (X, \mathcal{B}(X), \nu)$ jest przestrzenią probabilistyczną,

zmienne losowe $d_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są niezależne o tym samym

rozkładzie: $\mathbb{P}(d_i = 0) = \mathbb{P}(d_i = 1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(d_i) = \frac{1}{2}$.

Centralne Twierdzenie Graniczne

Zmienne losowe d_i mają wariancję $\sigma^2 = \int (d_i(x) - \frac{1}{2})^2 dx = \frac{1}{4}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{i=1}^n d_1 \circ T^{i-1} - \frac{1}{2}n}{\sqrt{n}} \leq a \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$$

\Leftrightarrow

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left(\frac{\sum_{i=1}^n d_1 \circ T^{i-1} - \frac{1}{2}n}{\sqrt{n}} \leq a \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \right| \rightarrow 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} h \circ T^i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \sigma N(0, 1),$$

gdzie $h = d_1 - \mathbb{E}(d_1)$ i $\mathbb{E}(h^2) = \sigma^2$

Jak w Przykładzie 2:

$$f(x) = 1_A(x), \quad A = \left[\frac{1}{2}, 1\right), \quad h = f - \int f(x)\nu(dx)$$

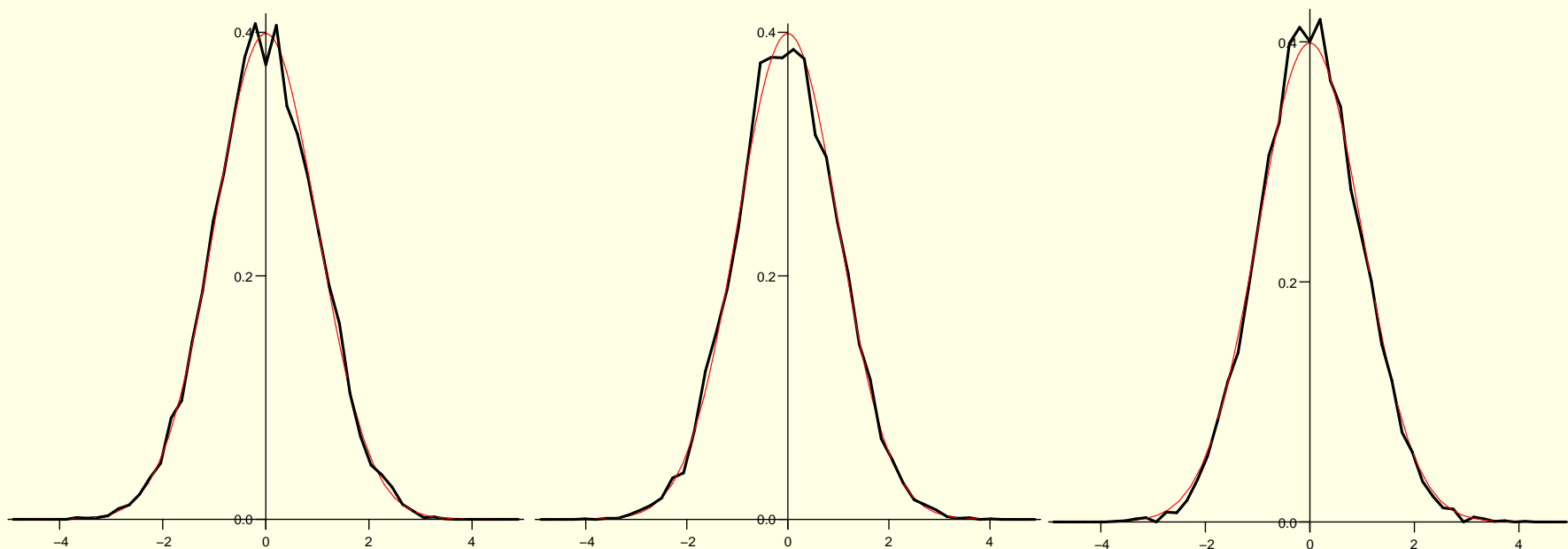
$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} h \circ T^{i-1}}{b_n} \rightarrow^d N(0, 1), \quad \frac{b_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma > 0$$

Porównanie wykresów gęstości takich zmiennych z gęstością rozkładu $N(0, 1)$ (kolor czerwony), gdy:

T - diadyczna

T - Gaussa

T - logistyczna



CTG dla odwzorowań ergodycznych

$$\begin{aligned} b_n^2 &= \left\| \sum_{i=0}^{n-1} h \circ T^i \right\|_2^2 = \int \left(\sum_{i=0}^{n-1} h(T^i(x)) \right)^2 \nu(dx) \\ &= n \int h^2(x) \nu(dx) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \int h(x) h(T^i(x)) \nu(dx) \\ &= n \int h^2(x) \nu(dx) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \int \mathcal{P}_T^i h(x) h(x) \nu(dx) \end{aligned}$$

Twierdzenie 1. Niech (X, \mathcal{B}, T, ν) będzie ergodycznym układem dynamicznym. Jeśli $h \in L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$ spełnia $\mathcal{P}_T h = 0$, to

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} h \circ T^i}{\sqrt{n}} \rightarrow \|h\|_2 N(0, 1).$$

$$\mathcal{P}_T(f \circ T) = f \quad \text{i} \quad (\mathcal{P}_T f) \circ T = E(f|T^{-1}(\mathcal{B})) \quad \text{dla } f \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu)$$

Twierdzenie o zamianie zmiennych:

$$\int_{T^{-1}(A)} (f \circ T)(x) \nu(dx) = \int_A f(x) (\nu \circ T^{-1})(dx).$$

Definicja operatora \mathcal{P}_T :

$$\int_A \mathcal{P}_T f(x) \nu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} f(x) \nu(dx).$$

$$\mathcal{P}_T(f \circ T) = f \quad \text{i} \quad (\mathcal{P}_T f) \circ T = E(f|T^{-1}(\mathcal{B})) \quad \text{dla } f \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu)$$

Twierdzenie o zamianie zmiennych:

$$\int_{T^{-1}(A)} (f \circ T)(x) \nu(dx) = \int_A f(x) (\nu \circ T^{-1})(dx).$$

Definicja operatora \mathcal{P}_T :

$$\int_A \mathcal{P}_T f(x) \nu(dx) = \int_{T^{-1}(A)} f(x) \nu(dx).$$

$B \in T^{-1}(\mathcal{B}) \implies B = T^{-1}(A)$ dla pewnego $A \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \int_B ((\mathcal{P}_T f) \circ T)(x) \nu(dx) &= \int_{T^{-1}(A)} ((\mathcal{P}_T f) \circ T)(x) \nu(dx) = \\ \int_A \mathcal{P}_T f(x) \nu(dx) &= \int_{T^{-1}(A)} f(x) \nu(dx) = \int_B f(x) \nu(dx) \end{aligned}$$

Różnice martyngałowe

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - przestrzeń probabilistyczna

$\{\mathcal{F}_{n,i}, \zeta_{n,i} : 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$

1. $\mathcal{F}_{n,i-1} \subset \mathcal{F}_{n,i} \subset \mathcal{F}$ - σ -ciąta, $i \geq 1, n \geq 1$,
2. $\zeta_{n,i}$ - $\mathcal{F}_{n,i}$ -mierzalne, $\mathbb{E}(\zeta_{n,i}) = 0$, $\mathbb{E}(\zeta_{n,i}^2) < \infty$,
3. $\mathbb{E}(\zeta_{n,i} | \mathcal{F}_{n,i-1}) = 0$, $1 \leq i \leq n, n \geq 1$.

Różnice martyngałowe

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - przestrzeń probabilistyczna

$\{\mathcal{F}_{n,i}, \zeta_{n,i} : 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$

1. $\mathcal{F}_{n,i-1} \subset \mathcal{F}_{n,i} \subset \mathcal{F}$ - σ -ciąta, $i \geq 1, n \geq 1$,
2. $\zeta_{n,i}$ - $\mathcal{F}_{n,i}$ -mierzalne, $\mathbb{E}(\zeta_{n,i}) = 0$, $\mathbb{E}(\zeta_{n,i}^2) < \infty$,
3. $\mathbb{E}(\zeta_{n,i} | \mathcal{F}_{n,i-1}) = 0$, $1 \leq i \leq n, n \geq 1$.

Jeśli $\mathcal{P}_T h = 0$ to

$$\{T^{-n+i}(\mathcal{B}), \frac{1}{\sqrt{n}} h \circ T^{n-i} : 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$$

jest rodziną różnic martyngałowych.

$$E(h \circ T^{n-i} | (T^{n-i+1})^{-1}(\mathcal{B})) = (\mathcal{P}_{T^{n-i+1}}(h \circ T^{n-i})) \circ T^{n-i+1} = (\mathcal{P}_T h) \circ T^{n-i+1}$$

CTG [Billingsley, 1995, Theorem 35.12]

Niech $\{\mathcal{F}_{n,i}, \zeta_{n,i}\}$ będzie rodziną różnic martyngałowych. Jeśli

$$(a) \quad \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\zeta_{n,i}^2 | \mathcal{F}_{n,i-1}) \xrightarrow{P} \sigma^2,$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\zeta_{n,i}^2 1_{\{|\zeta_{n,i}| > \varepsilon\}}) \rightarrow 0 \text{ dla każdego } \varepsilon > 0,$$

to

$$\sum_{i=1}^n \zeta_{n,i} \xrightarrow{d} \sigma N(0, 1).$$

Dowód Twierdzenia 1: $\mathcal{F}_{n,i} = T^{-n+i}(\mathcal{B})$, $\zeta_{n,i} = \frac{1}{\sqrt{n}}h \circ T^{n-i}$

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\zeta_{n,i}^2 | \mathcal{F}_{n,i-1}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathcal{P}_T h^2) \circ T^{n-i+1} = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} ((\mathcal{P}_T h^2) \circ T) \circ T^i \rightarrow \int ((\mathcal{P}_T h^2) \circ T)(x) d\nu(x) = \|h\|^2 = \sigma^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\zeta_{n,i}^2 1_{\{|\zeta_{n,i}| > \varepsilon\}}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\{|h \circ T^{n-i}| > \varepsilon \sqrt{n}\}} (h^2 \circ T^{n-i})(x) \nu(dx) = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{T^{-n+i}(\{|h| > \varepsilon \sqrt{n}\})} (h^2 \circ T^{n-i})(x) \nu(dx) = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\{|h| > \varepsilon \sqrt{n}\}} h^2(x) \nu(dx) = \int_{\{|h| > \varepsilon \sqrt{n}\}} h^2(x) \nu(dx) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

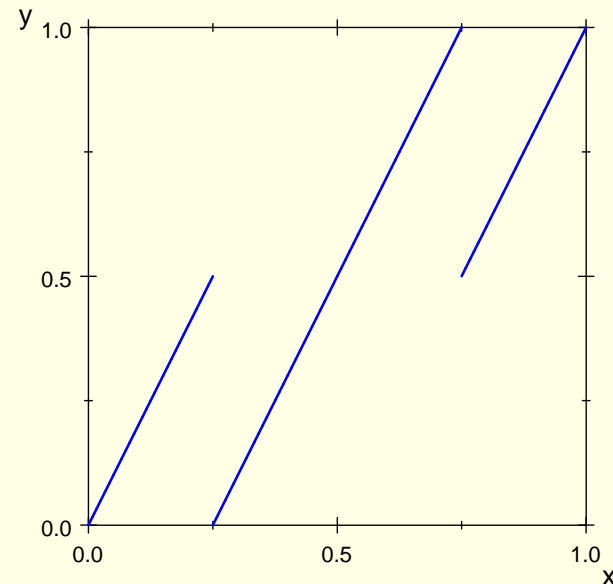
Uwaga. Jeśli opuścimy założenie ergodyczności w Twierdzeniu 1, to

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} h \circ T^i}{\sqrt{n}} \rightarrow^d \sqrt{E_\nu(h^2|\mathcal{I})} N(0, 1).$$

Przykład 5. $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{4}) \\ 2x - \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \\ 2x - 1, & x \in [\frac{3}{4}, 1). \end{cases}$$

$$\mathcal{I} = \left\{ [0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1), [0, 1), \emptyset \right\}$$



Operator Frobeniusa-Perrona

$$\mathcal{P}_T f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}x\right) 1_{[0, \frac{1}{2})}(x) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) 1_{[\frac{1}{2}, 1)}(x) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) 1_{[0, 1)}(x).$$

Weźmy

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{4}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \\ 1, & x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}, \quad h_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{4}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \\ -2, & x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ 2, & x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Wtedy $\mathcal{P}_T h_1 = \mathcal{P}_T h_2 = 0$ oraz $h_1^2 = 1$, $h_2^2 = 1_{[0, \frac{1}{2})} + 4 \cdot 1_{[\frac{1}{2}, 1)}$.

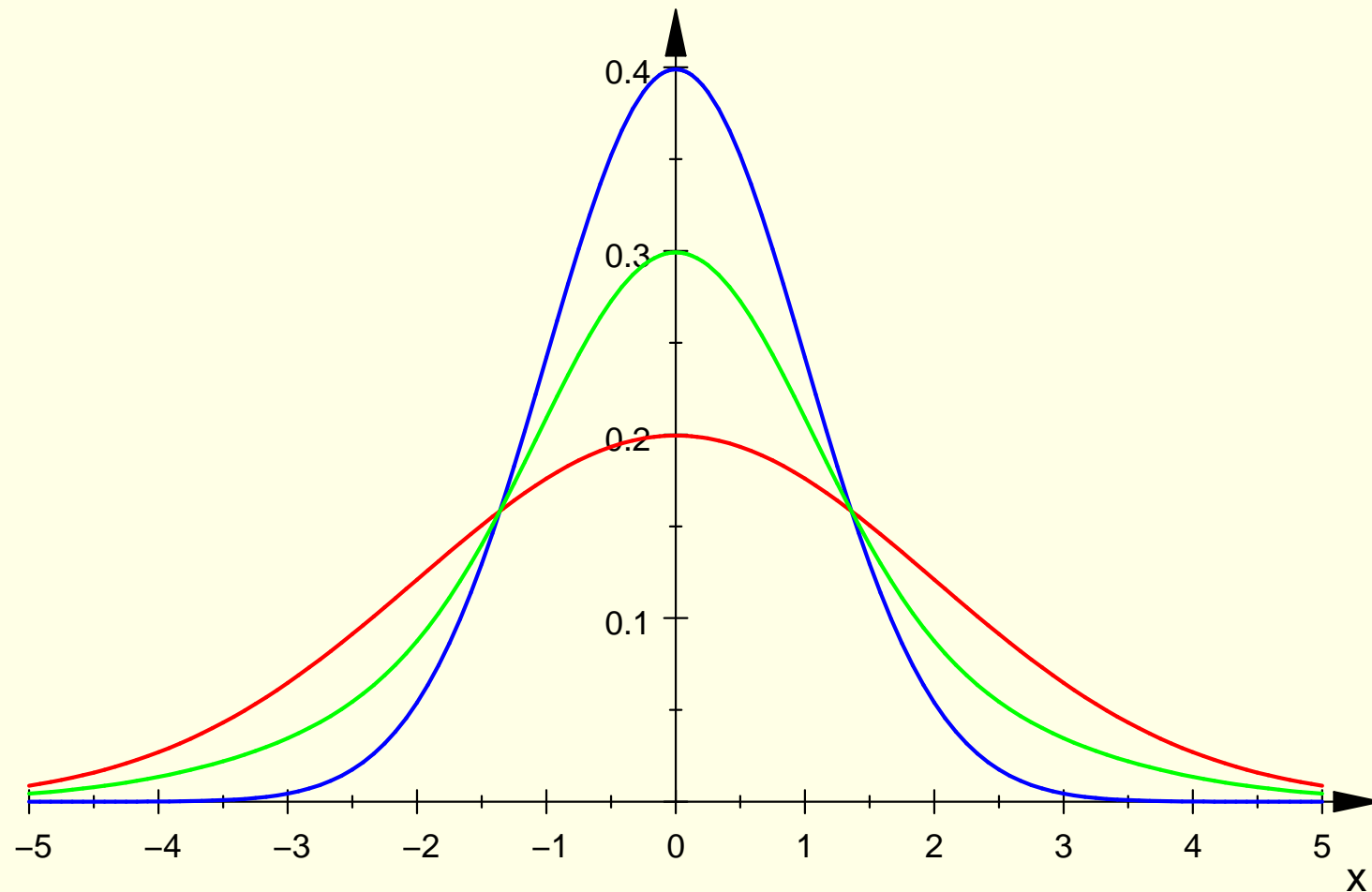
Mamy $E_\nu(h_1^2 | \mathcal{I}) = 1$, $E_\nu(h_2^2 | \mathcal{I}) = h_2^2$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} h_1 \circ T^i \rightarrow^d N(0, 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} h_2 \circ T^i \rightarrow^d \sqrt{E_\nu(h_2^2 | \mathcal{I})} N(0, 1)$$

Gęstość zmiennej losowej $\sqrt{E(h_2^2|\mathcal{I})}N(0, 1)$ jest równa

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{8}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Mieszanie

T jest mieszające, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A \cap T^{-n}(B)) = \nu(A)\nu(B) \quad \text{dla } A, B \in \mathcal{B}.$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x)g(T^n(x))\nu(dx) = \int f(x)\nu(dx) \int g(x)\nu(dx)$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathcal{P}_T^n f(x)g(x)\nu(dx) = \int f(x)\nu(dx) \int g(x)\nu(dx)$$

dla $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu)$, $g \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \nu)$.

Szybkość mieszania

$$\left| \int f(x)g(T^n(x))\nu(dx) - \int f d\nu \int g d\nu \right| \leq I(n) \|f\|_{\mathcal{L}_1} \|g\|_{\mathcal{L}_2}$$

- oszacowania w normie BV: $I(n) = C\theta^n$

\mathcal{L}_1 - funkcje o ograniczonej wariacji, $\mathcal{L}_2 = L^1$

- tzw. 'coupling method': [Young, 1998, Young, 1999]

\mathcal{L}_1 - funkcje hölderowskie, $\mathcal{L}_2 = L^\infty$

- metryki Birkhoffa: [Liverani, 1995]

Uwaga.

$$\|\mathcal{P}_T^n h\|_1 \leq I(n) \|h\|_{\mathcal{L}_1}$$

$$\|h\|_1 \leq \|h\|_2 \leq \|h\|_\infty$$

$$\|\mathcal{P}_T^n h\|_2 \leq \|h\|_\infty^{1/2} \|\mathcal{P}_T^n h\|_1^{1/2}$$

Twierdzenie 2 ([Tyran-Kamińska, 2005]). Niech (X, \mathcal{B}, T, ν) będzie układem dynamicznym. Jeśli $h \in L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$ spełnia

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} \left\| \sum_{k=1}^n \mathcal{P}_T^k h \right\|_2 < \infty. \quad (1)$$

to istnieje $\tilde{h} \in L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$ takie, że

$$\mathcal{P}_T \tilde{h} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} (h - \tilde{h}) \circ T^j \xrightarrow{L^2} 0.$$

Uwaga.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\mathcal{P}_T^n h\|_2}{\sqrt{n}} < \infty \implies (1)$$

$$\sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^n \mathcal{P}_T^k h \right\|_2 < \infty \iff \exists_{\tilde{h}, f \in L^2} h - \tilde{h} = f \circ T - f, \mathcal{P}_T \tilde{h} = 0.$$

Przykład 6.

$$T_\gamma(y) = \begin{cases} y(1 + 2^\gamma y^\gamma) & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 2y - 1 & \frac{1}{2} < y \leq 1 \end{cases}$$

Jeśli h jest hölderowska na $[0, 1]$ to $\|\mathcal{P}_T^n h\|_1 \leq Cn^{1-\frac{1}{\gamma}}$.

$$\|\mathcal{P}_T^n h\|_2 \leq C_1 \sqrt{n^{1-\frac{1}{\gamma}}} \implies \frac{\|\mathcal{P}_T^n h\|_2}{\sqrt{n}} \leq C_1 n^{-\frac{1}{2\gamma}}$$

- gdy $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ to zachodzi (1)
- jeśli $\gamma = \frac{1}{2}$ to klasyczne normowanie może nie wystarczyć
np. gdy h jest hölderowskie, $h(0) \neq 0$ [Gouëzel, 2004]

$$\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{i=0}^{n-1} h \circ T^i \xrightarrow{d} \sigma N(0, 1).$$

Idea dowodu Twierdzenia 2: [Kipnis and Varadhan, 1986, Liverani, 1996, Maxwell and Woodroffe, 2000]

Dla $\epsilon > 0$ definiujemy

$$f_\epsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_T^{k-1} h}{(1 + \epsilon)^k} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{P}_T^k h}{(1 + \epsilon)^{n+1}}.$$

$$h_\epsilon = f_\epsilon - (\mathcal{P}_T f_\epsilon) \circ T, \quad \mathcal{P}_T h_\epsilon = 0,$$

$$h = (1 + \epsilon)f_\epsilon - \mathcal{P}_T f_\epsilon = h_\epsilon + \epsilon f_\epsilon + U_T \mathcal{P}_T f_\epsilon - \mathcal{P}_T f_\epsilon$$

$$\|h_\epsilon - h_\delta\|_2^2 \leq (\epsilon + \delta)(\|f_\epsilon\|_2^2 + \|f_\delta\|_2^2), \quad \epsilon, \delta > 0,$$

$$(1) \implies \sqrt{\epsilon} \|f_\epsilon\|_2 \rightarrow 0 \implies h_\epsilon \rightarrow^{L^2} \tilde{h}$$

Dla $\epsilon_n = 2^{-j_n}$, $2^{j_n-1} \leq n < 2^{j_n}$, $n \geq 1$

$$\frac{\|\sum_{k=0}^{n-1} (h - \tilde{h}) \circ T^k\|_2}{\sqrt{n}} \leq \|h_{\epsilon_n} - \tilde{h}\|_2 + 6\sqrt{\epsilon_n} \|f_{\epsilon_n}\|_2.$$

A co gdy:

$$\mathcal{P}_T h = 0 \quad \text{i} \quad h \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu), \quad \text{ale} \quad h \notin L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$$

A co gdy:

$$\mathcal{P}_T h = 0 \quad \text{i} \quad h \in L^1(X, \mathcal{B}, \nu), \text{ ale } h \notin L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$$

Jeśli $h \in L^p(X, \mathcal{B}, \nu)$ dla $p \in [1, 2)$, to

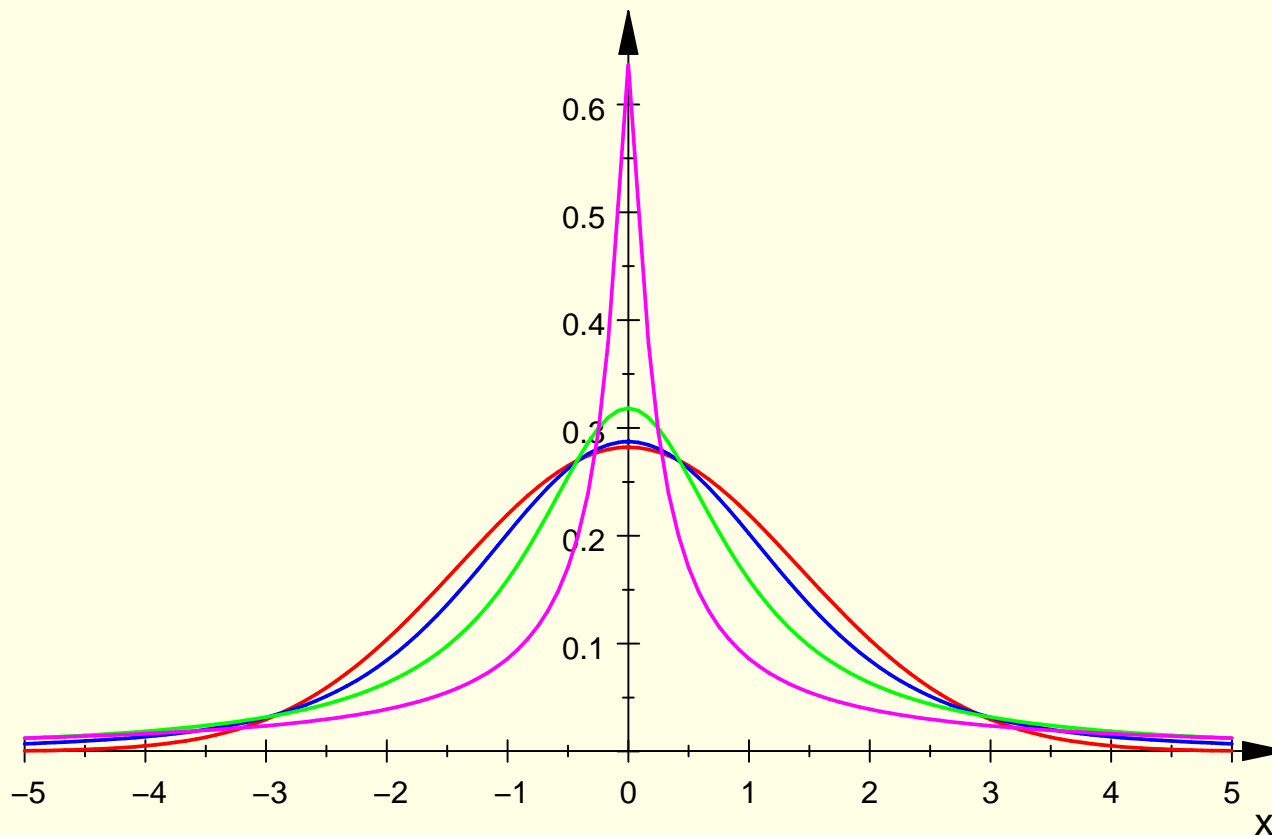
$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} h \circ T^i}{n^{1/p}} \rightarrow 0 \quad \nu - \text{p.w.}$$

Może wystąpić zbieżność do rozkładów α -stabilnych:

α -stabilne zmienne losowe

η_α , $\alpha \in (0, 2)$, ma funkcję charakterystyczną

$$E e^{i\theta\eta_\alpha} = \begin{cases} \exp(i\theta a - \sigma_\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(\theta) \tan(\pi\alpha/2))), & \alpha \neq 1, \\ \exp(i\theta a - \sigma_\alpha |\theta| (1 + i\beta(2/\pi) \text{sign}(\theta) \ln(\theta))), & \alpha = 1. \end{cases}$$



$\beta = 0, a = 0$

$N(0,1)$

$\alpha = 1.5$

rozkład

Cauchy'ego

$\alpha = 0.5$

Przykład 7. Odwzorowanie trójkątne

$$T(x) = 1 - 2|x|, \quad x \in [-1, 1], \quad f_*(x) = \frac{1}{2}1_{[-1,1]}(x)$$

$$\mathcal{P}_T h(x) = \frac{1}{2}h\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{1}{2}h\left(\frac{1-x}{2}\right).$$

$$h(x) = -h(-x), \quad x \in [-1, 1] \implies \mathcal{P}_T h = 0.$$

Niech $h(x) = x^\gamma$, $x > 0$ i $h(-x) = -h(x)$:

$$2\gamma + 1 > 0 \implies \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} h \circ T^j \xrightarrow{d} \frac{1}{\sqrt{2\gamma + 1}} N(0, 1),$$

$$2\gamma + 1 < 0 \implies \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=0}^{n-1} h \circ T^j \xrightarrow{d} \eta_\alpha, \quad \alpha = -\frac{1}{\gamma}.$$

References

- [Alexander and Yorke, 1984] Alexander, J. C. and Yorke, J. A. (1984). Fat baker's transformations. *Erg. Theory Dyn. Syst.*, 4:1–23.
- [Billingsley, 1995] Billingsley, P. (1995). Probability and measure. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York.
- [Choe, 2005] Choe, G. H. (2005). Computational ergodic theory, volume 13 of Algorithms and Computation in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.
- [Gordin, 1969] Gordin, M. I. (1969). The central limit theorem for stationary processes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 188:739–741.
- [Gouëzel, 2004] Gouëzel, S. (2004). Central limit theorem and stable laws for intermittent maps. *Probab. Theory Related Fields*, 128(1):82–122.
- [Kipnis and Varadhan, 1986] Kipnis, C. and Varadhan, S. (1986). Central limit theorems for additive functionals of reversible Markov chains. *Commun. Math. Phys.*, 104:1–19.
- [Lasota and Mackey, 1994] Lasota, A. and Mackey, M. C. (1994). Chaos, fractals, and noise, volume 97 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York.
- [Liverani, 1995] Liverani, C. (1995). Decay of correlations. *Ann. of Math. (2)*,

142:239–301.

- [Liverani, 1996] Liverani, C. (1996). Central limit theorem for deterministic systems. In *International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995)*, volume 362 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 56–75. Longman, Harlow.
- [Mackey and Tyran-Kamińska, 2006] Mackey, M. C. and Tyran-Kamińska, M. (2006). Deterministic Brownian motion: The effects of perturbing a dynamical system by a chaotic semi-dynamical system. *Phys. Rep.*, 422(5):167–222.
- [Maxwell and Woodroffe, 2000] Maxwell, M. and Woodroffe, M. (2000). Central limit theorems for additive functionals of Markov chains. *Ann. Probab.*, 28(2):713–724.
- [Tyran-Kamińska, 2005] Tyran-Kamińska, M. (2005). An invariance principle for maps with polynomial decay of correlations. *Comm. Math. Phys.*, 260(1):1–15.
- [Young, 1998] Young, L.-S. (1998). Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. *Ann. of Math. (2)*, 147:585–650.
- [Young, 1999] Young, L.-S. (1999). Recurrence times and rates of mixing. *Israel J. Math.*, 110:153–188.