# FOLIACJE

## P. Walczak, Będlewo 2006

1. **Podstawy: definicja, przykłady, konstrukcje.**
2. **Holonomia, dynamika, entropia.**
3. **Miary niezmiennicze.**
4. **Varia.**

# Definicja.

$p$-wymiarową *foliacją* klasy $\mathrm{C}^k$ na rozmaitości $M$ nazywamy rodzinę $\mathcal{F}$ spójnych $p$-wymiarowych jej podrozmaitości (tzw. *liści*) spełniających następujące własności:

(a) $\cup\mathcal{F} = \mathcal{M}$,

(b) jeżeli $L, L' \in \mathcal{F}$ i $L \cap L' \neq \emptyset$, to $L = L'$,

(c) istnieje na $M$ atlas $\mathcal{A}$ klasy $\mathrm{C}^k$ taki, że jeżeli $\phi = (\phi_1, \phi_2) : U \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ jest mapą z $\mathcal{A}$ i $L \in \mathcal{F}$, to składowe spójności (tzw. *płytki*) iloczynu $L \cap U$ są dane równaniami postaci $\phi_2 =$const.

Mapy atlasu $\mathcal{A}$ nazywamy *wyróżnionymi* przez $\mathcal{F}$.

Liczbę $q = m - p$ nazywamy *kowymiarem* foliacji $\mathcal{F}$ i piszemy $q = \operatorname{codim} \mathcal{F}$ oraz $p = \dim \mathcal{F}$.

Atlas złożony z map wyróżnionych nazywamy *sfoliowanym*

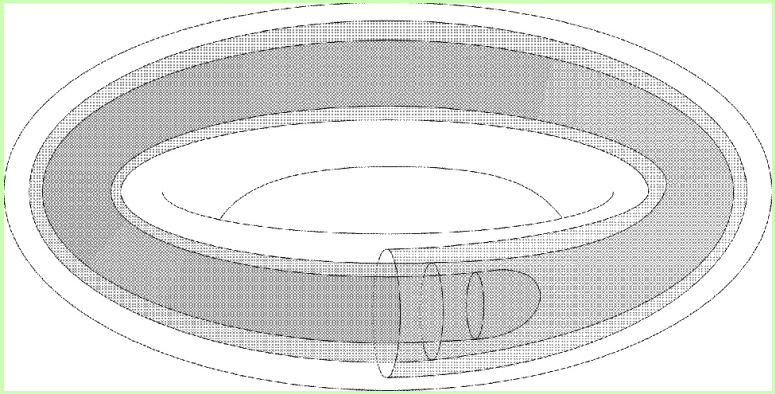
# Przykłady.

1. Foliacja trywialna: rozkład produktu kartezjańskiego $M = M_1 \times M_2$ na rodzinę podrozmaitości postaci $M_1 \times \{z\}$, gdzie $z \in M_2$.

2. Foliacje złożone z włókien submersji: Jeżeli $f : M \to N$ jest submersją (tj. odwzorowaniem gładkim takim, że różniczka $f_*$ przekształca - dla każdego $x \in M$ - przestrzeń styczną $T_xM$ na $T_{f(x)}N$), to składowe spójności przeciwobrazów $f^{-1}(y)$, $y \in N$, tworzą foliację $\mathcal{F}_f$ na $M$.

3. Foliacje 1-wymiarowe (orientowalne) "=" pola wektorowe bez osobliwości. Np., niech $M = T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ będzie torusem dwuwymiarowym, a $X$ polem wektorowym na $M$ wyznaczonym przez stałe pole wektorowe $\tilde{X} = [a, b]$ na $\mathbb{R}^2$.
Jeżeli iloraz $a/b$ jest liczbą wymierną, to wszystkie liście foliacji wyznaczonej na $M$ przez $X$ są zwarte (tj., krzywe całkowe pola $X$ są zamknięte); w przeciwnym razie wszystkie liście tej foliacji są gęste na $M$, w szczególności każdy liść $L$ przecina dziedzinę $U$ dowolnej mapy wyróżnionej nieskończenie wiele razy, tzn. $L \cap U$ jest sumą nieskończenie wielu płytek.

# Foliacja Reeba.



Rysunek 1: Składowa Reeba $(R, \mathcal{R})$.

Sferę

$$S^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \sum_i x_i^2 = 1\}$$

można przedstawić jako sumę dwu podzbiorów $A$ i $B$:

$$A = \{x \in S^3; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1/2\}$$

$$B = \{x \in S^3; x_1^2 + x_2^2 \geqslant 1/2\}$$

dyfeomorficznych z $R$, każdą z nich wypełnić foliacją $\mathcal{R}$ i otrzymać w ten sposób tzw. *foliację Reeba* sfery trójwymiarowej.

# Rola składowych Reeba.

**Twierdzenie Nowikowa (1965)** Każda dwuwymiarowa foliacja sfery $S^3$ zawiera składową Reeba. W konsekwencji, każada foliacja dwuwymiarowa sfery $S^3$ zawiera liść zwarty. Podobnie, każda foliacja dwuwymiarowa dowolnej zwartej rozmaitości trójwymiarowej o skończonej grupie podstawowej zawiera liść zwarty.

**"Twierdzenie" Gabai (1983-87)** Istnieje szeroka klasa łańcuchów $K = \cup K_i \subset S^3$, dla których można zbudować foliacje dwuwymiarowe na $S^3$ o tej własności, że wszystkie ich składowe Reeba są zbudowane wokół ich składowych spójności $K_i$.

# Konstrukcje.

## 1. Zawieszenie.

Dane: rozmaitości $B$ i $T$ oraz homomorfizm $\Phi$ grupy podstawowej $\Gamma = \pi_1(B)$ w grupę dyfeomorfizmów $\mathrm{Diff}^k(T)$.
Konstruujemy rozmaitość

$$M_\Phi = (\tilde{B} \times T)/\equiv_\Phi$$

gdzie $\tilde{B}$ – nakrycie uniwersalne rozmaitości $B$, $\equiv_\Phi$:

$$(\tilde{b}_1, t_1) \equiv_\Phi (\tilde{b}_2, t_2) \Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(b_2 = \gamma^{-1}(\tilde{b}_1) \text{ i } t_2 = \Phi(\gamma)(t_1)).$$

Foliacja produktu $\tilde{B} \times T$ o liściach $\tilde{B} \times \{t\}$ $(t \in T)$ rzutuje się do foliacji $\mathcal{F}_\Phi$ na $M_\Phi$.
Nazywamy ją *zawieszeniem* homomorfizmu $\Phi$.
Rozmaitość $M_\Phi$ jest wiązką nad $B$ z włóknem $T$. Foliacja $\mathcal{F}_\Phi$ jest transwersalna do włókien tej wiązki, a jej liście są nakryciami rozmaitości $B$. Para $(M_\Phi, \mathcal{F}_\Phi)$ jest więc tzw. *wiązką sfoliowaną*.

## 2. Sklejanie styczne.

$(M_1, \mathcal{F}_1)$ i $(M_2, \mathcal{F}_2)$ – sfoliowane rozmaitości z brzegiem, $\operatorname{codim} \mathcal{F}_1 = \operatorname{codim} \mathcal{F}_2 = 1$.
$\partial_i$ $(i = 1, 2)$ – suma pewnych składowych brzegu $\partial M_i$ złożona z liści foliacji $\mathcal{F}_i$
$F : \partial_1 \to \partial_2$ – dyfeomorfizm.
Wprowadźmy w $M_1 \cup M_2$ relację równoważności $\equiv_F$:

$$x \equiv_F y \quad \text{gdy} \quad x = y \quad \text{lub} \quad x \in \partial_1, y \in \partial_2 \quad \text{i} \quad y = F(x).$$

$M = (M_1 \cup M_2)/\equiv_F$ jest rozmaitością z foliacją $\mathcal{F}$ pokrywającą się w naturalny sposób z $\mathcal{F}_i$ na zbiorze $\operatorname{pr}(M_i)$, $i = 1, 2$, gdzie $\operatorname{pr} : M_1 \cup M_2 \to M$ jest kanoniczną projekcją.

Foliacja $\mathcal{F}$ powstała przez *sklejenie styczne* $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$.

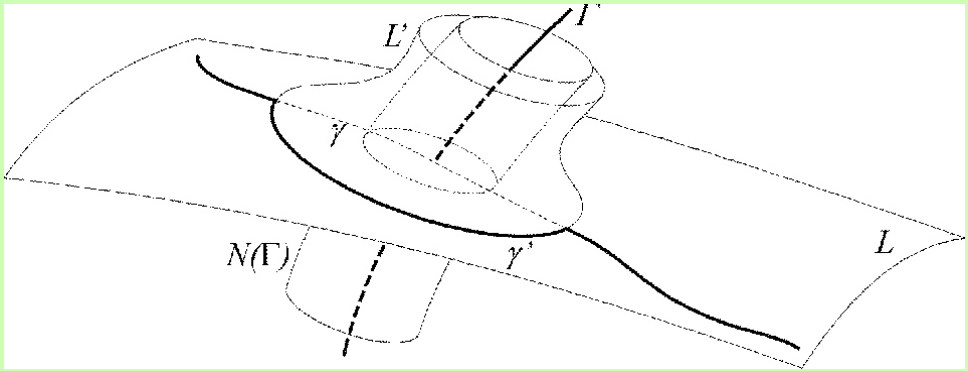
(**Przykład**: Foliacja Reeba sfery $S^3$ powstała przez styczne sklejenie dwu składowych Reeba.)

## 3. Sklejanie transwersalne.

$(M_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2$, – j.w. ale $\operatorname{codim} \mathcal{F}_1 = \operatorname{codim} \mathcal{F}_2 = q$.
$\partial_i \subset \partial M_i$ – suma składowych spójności brzegu takich, że $\mathcal{F}_i$ jest transwersalna do $\partial M_i$ wzdłuż $\partial_i$
$X_i$ – pole wektorowe na $M_i$ transwersalne do $\partial_i$ i skierowanym wzdłuż $\partial_i$ "do wewnątrz" $M_i$
$\epsilon > 0$ na tyle małe, by potok lokalny $\Phi_i$ pola $X_i$ był określony na produkcie $\partial_i \times [0, 2\epsilon)$
$N_i = \Phi_i(\partial_i \times [0, \epsilon)$
$F : \partial_1 \to \partial_2$ – dyfeomorfizm.
Utożsamiając w sumie rozłącznej $(M_1 \setminus \partial_1) \cup (M_2 \setminus \partial_2)$ punkty $\Phi_1(x, t)$ i $\Phi_2(F(x), \epsilon - t)$ $(x \in \partial_1, t \in (0, \epsilon))$ otrzymujemy rozmaitość $M$.
Transwersalność do brzegu $\Longrightarrow$ foliacje $\mathcal{F}_i$ wyznaczają foliacje $\tilde{\mathcal{F}}_i$ na $\partial_i$.
Pola $X_i$ można wybrać tak, by były styczne do liści foliacji $\mathcal{F}_i$.
Wtedy: jeżeli $F$ przekształca liście $\tilde{\mathcal{F}}_1$ na liście $\tilde{\mathcal{F}}_2$, to foliacje $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ wyznaczają na $M$ taką foliację $\mathcal{F}$, że $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ na $M_i \setminus N_i$.
Foliacja $\mathcal{F}$ jest *transwersalnym sklejeniem* $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$.

## 4. Turbulizacja.

$\mathcal{F}$ – foliacja kowymiaru 1 na $M$,
$\Gamma$ – krzywa zamknięta transwersalna do $\mathcal{F}$
$N$ – małe otoczenie tubularne krzywej $\Gamma$
Budujemy foliację $\mathcal{F}_0$ na $N$ styczną do jego brzegu $S^1 \times S^{n-2}$ i taką że wszystkie jej liście zawarte we wnętrzu $N$ są dyfeomorficzne z $\mathbb{R}^{n-1}$.
Foliację $\mathcal{F}$ na dopełnieniu wnętrza otoczenia $N$ zmodyfikujmy w otoczeniu brzegu $\partial N$ tak, by stała się styczna do $\partial N$ i by pokrywała się z $\mathcal{F}$ poza małym otoczeniem tego brzegu:




Rysunek 2: Turbulizacja.

## Turbulization c.d.

Otrzymaną foliację oznaczmy przez $\mathcal{F}_1$ i sklejmy ją stycznie z $\mathcal{F}_0$.

Foliacja $\mathcal{F}'$ powstała przez tzw. *turbulizację* $\mathcal{F}$ wzdłuż $\Gamma$.

**Uwaga:**
Każdy liść niezwarty na rozmaitości zwartej przecina pewną transwersalę zamkniętą !

## 5. Indukowanie

$\mathcal{F}$ – foliacja na rozmaitości $N$

$F : M \to N$ – odwzorowanie gładkie *transwersalne* do $\mathcal{F}$ tzn.

$$T_{F(x)}N = T_{F(x)}\mathcal{F} + F_{*x}(T_xM), x \in M,$$

Transwersalność $F$ do $\mathcal{F} \Longrightarrow \tilde{L} = F^{-1}(L)$ $L \in \mathcal{F}$ – podrozmaitość $M$, przy czym $\operatorname{codim} \tilde{L} = \operatorname{codim} L$.

$\Longrightarrow$ rodzina $\tilde{\mathcal{F}}$ składowych spójności przeciwobrazów $F^{-1}(L)$ liści $L$ foliacji $\mathcal{F}$ jest foliacją na $M$, przy czym znowu $\operatorname{codim} \tilde{\mathcal{F}} = \operatorname{codim} \mathcal{F}$.

Foliację $\tilde{\mathcal{F}}$ nazywamy *indukowaną* z $\mathcal{F}$ przez $F$.

$F : M \to N$ – nakrycie $\Longrightarrow$ każda foliacja $\mathcal{F}$ na $N$ podnosi się na $M$

# HOLONOMIA

## Pseudogrupy.

**Definicja.** *Pseudogrupą* przekształceń przestrzeni topologicznej $X$ nazywamy każdy zbiór $\mathcal{G}$ przekształceń $h : D_h \to R_h$ określonych na podzbiorach otwartych $D_h \subset X$ i przekształcających je homeomorficznie na podzbiory otwarte $R_h \subset X$, przy czym

(i) $\mathrm{id}_X \in \mathcal{G}$,

(ii) jeżeli $f, h \in \mathcal{G}$, to $f^{-1} \in \mathcal{G}$ i $f \circ h \in \mathcal{G}$,

(iii) jeżeli $h \in \mathcal{G}$ i $U$ jest otwartym podzbiorem dziedziny $D_h$, to $h|U \in \mathcal{G}$,

(iv) jeżeli $h : D_h \to R_h$ jest homeomorfizmem pomiędzy otwartymi podzbiorami przestrzeni $X$, $\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem dziedziny $D_h$ i $h|U \in \mathcal{G}$ dla każdego $U \in \mathcal{U}$, to $h \in \mathcal{G}$.

# Generowanie pseudogrup:

Dla każdego zbioru $A$ lokalnych homeomorfizmów przestrzeni $X$ istnieje najmniejsza pseudogrupa $\mathcal{G}(A)$ zawierająca $A$:

$h \in \mathcal{G}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h : D_h \to R_h$ jest homeomorfizmem i dla każdego $x \in D_h$ istnieje jego otoczenie otwarte $U \subset D_h$, elementy $h_1, \ldots, h_n$ zbioru $A$ i liczby $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{\pm 1\}$ takie, że

$$h|U = h_1^{\epsilon_1} \circ \cdots \circ h_n^{\epsilon_n}|U.$$

Mówimy, że $\mathcal{G}(A)$ jest *pseudogrupą generowaną* przez $A$.

Jeżeli istnieje zbiór skończony generujący pseudogrupę $\mathcal{G}$, to mówimy, że $\mathcal{G}$ jest *skończenie generowana*.

# Dobre atlasy.

**Definicja.** Atlas $\mathcal{A}$ (lub pokrycie $\mathcal{U}$ dziedzinami jego map) nazywamy *dobrym* jeżeli
(i) pokrycie $\mathcal{U}$ jest lokalnie skończone,
(ii) dla każdego $\phi \in \mathcal{A}$ obraz $R_\phi = \phi(D_\phi)$ dziedziny $D_\phi$ mapy $\phi$ jest otwartą kostką w przestrzeni $\mathbb{R}^n$,
(iii) dla dowolnych $\phi, \psi \in \mathcal{A}$ takich, że $D_\phi \cap D_\psi \neq \emptyset$ istnieje mapa wyróżniona $\chi$ taka, że $R_\chi$ jest kostką otwartą w $\mathbb{R}^n$, $\overline{D_\phi \cup D_\psi} \subset D_\chi$ oraz $\phi = \chi | D_\phi$.

$M$ - parazwarta $\Longrightarrow$

**Lemat.** Każda rozmaitość sfoliowana posiada atlas dobry.

**Uwaga.** Każda płytka jednej mapy atlasu dobrego $\mathcal{A}$ przecina conajwyżej jedną płytkę innej mapy z $\mathcal{A}$ !.

# Pseudogrupa holonomii.

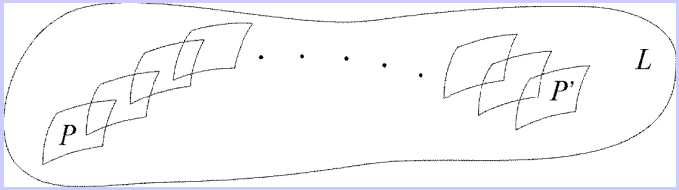
$T$ – podrozmaitość $M$ transwersalna do $\mathcal{F}$ i *zupełna* tj. przecinająca wszystkie liście foliacji $\mathcal{F}$

$\phi, \psi \in \mathcal{A}$ - mapy atlasu dobrego, $D_\phi \cap D_\psi \neq \emptyset \Longrightarrow$ możemy określić *odwzorowanie holonomii* $h_{\psi,\phi}$ pewnego podzbioru otwartego $U_{\psi,\phi} \in T_\phi$ w $T_\psi$ przyjmując, że $h_{\psi,\phi}(z) = z'$ wtedy i tylko wtedy, gdy płytka mapy $\phi$ przechodząca przez $z$ przecina płytkę mapy $\psi$ przechodzącą przez $z'$.

**Definicja.** Pseudogrupę $\mathcal{H}_\mathcal{A}$ generowaną przez wszystkie odwzorowania $h_{\psi,\phi}$, $\phi, \psi \in \mathcal{A}$, nazywamy *pseudogrupą holonomii* foliacji $\mathcal{F}$. Jej elementy nazywamy *odwzorowaniami holonomii*.

# Grupa holonomii liścia.

$L$ – liść foliacji $\mathcal{F}$
$c : [0,1] \to L$ – krzywa na $L$
$(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_k)$ - *łańcuch map* wzdłuż $c$:




tzn. istnieją liczby $t_0 < t_1 < \ldots t_k < t_{k+1}$ takie, że $t_0 = 0$, $t_{k+1} = 1$ i $c([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, k$
$h_i = h_{\phi_i, \phi_{i-1}}$ – elementarne odwzorowania holonomii
$h_c = h_k \circ \cdots \circ h_0$ – *odwzorowanie holonomii wzdłuż* $c$.
**Uwaga.** Odwzorowania $h_c$, $h_{c'}$ holonomii wzdłuż dwóch krzywych homotopijnych na $L$ (z zachowaniem końców) pokrywają się w pewnym otoczeniu punktu $x = c(0) = c'(0)$, wyznaczają więc ten sam kiełek $[h_c]_x$ w $x$.
$T$ – transwersala zupełna, $x \in T$, $\pi_1(L, x)$ – grupa podstawowa liścia $L \Longrightarrow$

$$h_L : \pi_1(L, x) \ni \gamma \mapsto [h_c]_x \in \Gamma(T, x) - \textit{homomorfizm grup}$$

$H_L = \mathrm{im}(h_L)$ – *grupa holonomii* liścia $L$.

# Entropia pseudogrupy

**Dane:** $\mathcal{G}$ - pseudogrupa na $(X, d)$, $\mathcal{S}$ - skończony zbiór generatorów

**Definicje.** Niech $n \in \mathbb{N}$ i $\epsilon > 0$. Punkty $x$ i $y \in X$ są $(n, \epsilon)$-*rozseparowane*, gdy istnieją $g_1, \ldots g_k \in \mathcal{S}$, dla których $x, y \in D_g$ i

$$d(g(x), g(y)) \geqslant \epsilon, gdzie\ g = g_1 \circ \cdots \circ g_n.$$

$N(n, \epsilon)$ = maksymalna moc takiego zbioru $A \subset X$, że dowolne dwa (różne) jego punkty są $(n, \epsilon)$-rozseparowane

$$N(\epsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon)$$

$$h(\mathcal{G}, \mathcal{S}) = \lim_{\epsilon \to 0} N(\epsilon).$$

Liczbę $h(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ nazywa się *entropią* pseudogrupy $\mathcal{G}$ (względem $\mathcal{S}$).

**Krótko:** entropia jest miarą wykładniczego wzrostu maksymalnej liczby punktów rozseparowanych:

$$\epsilon << 1 \Longrightarrow N(n, \epsilon) \approx \exp(nh)$$

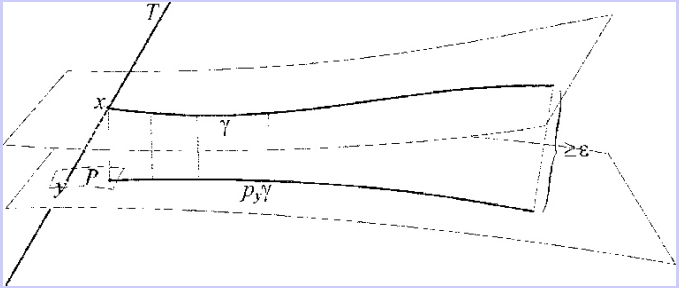
# Entropia geometryczna foliacji

**Dane:** $\mathcal{F}$ - foliacja zwartej rozmaitości riemannowskiej $(M, g)$, $\mathcal{A}$ – atlas dobry na $(M, \mathcal{F})$, $T$ -transwersala zupełna $T$, $\epsilon_0 > 0$ – ustalone i małe

**Definicje:** Punkty $x, y \in T$ są $(R, \epsilon)$-*rozseparowane* $(R, \epsilon > 0,)$ gdy $d(x, y) \geqslant \epsilon_0$ lub istnieje krzywa $\gamma$ na liściu $L_x$ o początku $x$, długości $\leqslant R$ i taka, że $d(\gamma(t), \mathrm{pr}_y\, \gamma(t)) \geqslant \epsilon$ dla pewnego $t$.

$N(R, \epsilon)$ =maksymalna moc podzbioru transwersali $T$ o punktach parami $(R, \epsilon)$-rozseparowanych

*entropia geometryczna*: $h(\mathcal{F}, g) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{R \to \infty} \frac{1}{R} \log N(R, \epsilon)$



# Wybrane twierdzenia.

**Twierdzenie 1.** Dla dowolnej metryki riemannowskiej $g$ na $(M, \mathcal{F})$ zachodzi równość

$$h(\mathcal{F}, g) = \sup_{\mathcal{U}} \frac{1}{\Delta_{\mathcal{U}}} h(\mathcal{H}_{\mathcal{U}}, \mathcal{S}_{\mathcal{U}}),$$

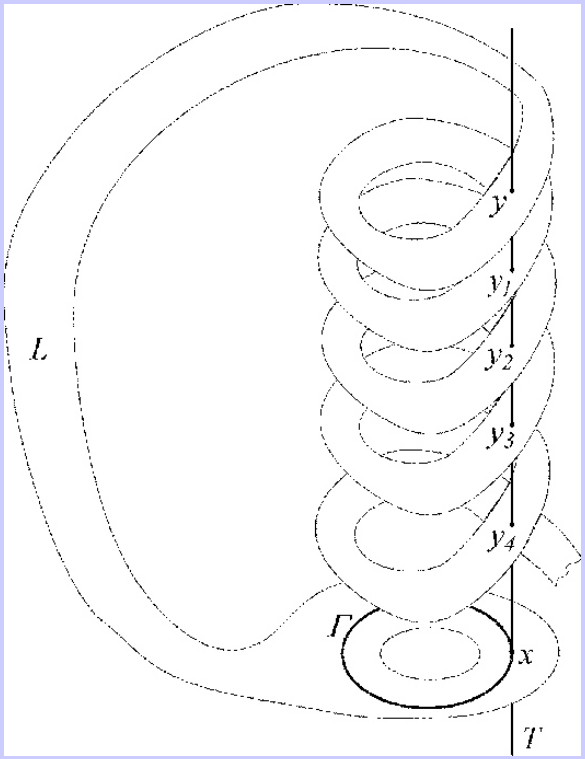
gdzie $\mathcal{U}$ – pokrycie dobre $(M, \mathcal{F})$, $\Delta_{\mathcal{U}}$ = kres górny średnic płytek pokrycia $\mathcal{U}$, $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ = pseudogrupa holonomii generowana przez zbiór $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ wszystkich elementarnych odwzorowań holonomii odpowiadających parom przecinających się map z $\mathcal{U}$.

**Wniosek.** $h(\mathcal{F}, g) > 0 \Leftrightarrow h(\mathcal{H}_{\mathcal{U}}, \mathcal{S}_{\mathcal{U}}) > 0$.

**Twierdzenie 2.** $X$ = pole wektorowe na $(M, g)$, $\|X\| = 1$, $\mathcal{F}$ = rodzina trajektorii $X$, $(\phi_t)$ – potok pola $X$. Wtedy

$$h(\mathcal{F}, g) = 2h_{top}(\phi_1)$$

**Twierdzenie 3.** $\operatorname{codim} F = 1 \Longrightarrow h(\mathcal{F}) > 0$ *iff* $\mathcal{F}$ zawiera liść sprężynujący:



# Przykłady – własności.

**1.** Entropia foliacji Reeba i entropie foliacji riemannowskich $= 0$.

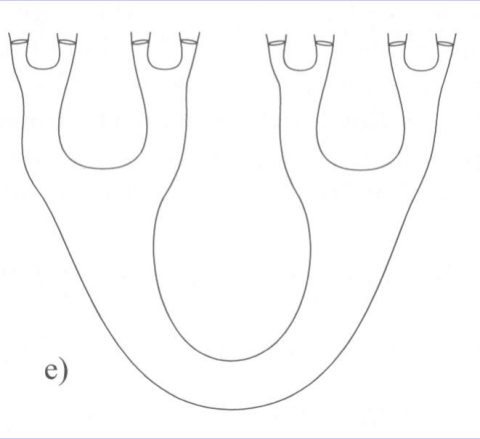
**2.** Entropia foliacji stabilnej (*"weak stable"*) potoku geodezyjnego na zwartej powierzchni hiperbolicznej $> 0$.

**3.** Turbulizacja nie zwiększa (ale też nie wyzerowuje) entropii.

**4.** Indukowanie nie zwiększa entropii.

**5.** $\mathcal{F}$ = sklejenie styczne $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2 \Longrightarrow h(\mathcal{F}) = \max(h(\mathcal{F}_1), h(\mathcal{F}_2))$

**6.** Foliacja Hirscha (liście, *drzewa Cantora*, jak poniżej !) ma dodatnią entropię.



# MIARY NIEZMIENNICZE

**Oznaczenia.** $\mathcal{M}(X)$ - przestrzeń borelowskich miar prawdopodobieństwa na zwartej przestrzeni metrycznej $X$ (z topologią słabej $*$-zbieżności)
$T : X \to X$ - ciągłe
$G \subset$ Homeo (X) - skończenie generowana grupa
$\mathcal{G}$ - skończenie generowana pseudogrupa na $X$

**Definicje.** $\mu \in \mathcal{M}(X)$ jest $T$-, $G$-, $\mathcal{G}$- *niezmiennicza*, gdy

$$\mu(T^{-1}(A) = \mu(A), \mu(g(A)) = \mu(A), \mu(h(B)) = \mu(B),$$

gdy tylko $A, B$ -borelowskie, $g \in G$, $h \in \mathcal{G}$ i (**uwaga !**) $B$ - podzbiór dziedziny $h$

**Oznaczenia.** $\mathcal{M}(X,T)$, $\mathcal{M}(X,G)$, $\mathcal{M}(X,\mathcal{G})$ - przestrzenie miar niezmienniczych

**Obserwacja.** $\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(X,T), \mathcal{M}(X,G), \mathcal{M}(X,\mathcal{G})$ - wypukłe w $C(X)^*$

**Problemik.** Kiedy $\mathcal{M}(X,T)$, $\mathcal{M}(X,G)$, $\mathcal{M}(X,\mathcal{G}) \neq \emptyset$ ?

# Istnienie miar niezmienniczych - 1

$V \subset C(X)$ - podprzestrzeń liniowa

Tw. Hahna-Banacha + Tw. Riesza o reprezentacji $\Longrightarrow$

**Lemat.** Następujące warunki są równoważne:
(1) istnieje miara $\mu \in \mathcal{M}(X)$ taka, że $\int_X f d\mu = 0$, $f \in V$,
(2) dla każdego $f \in V$ istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) \leqslant 0$.

**Wniosek 1.** $\mathcal{M}(X,T) \neq \emptyset$.

**Inaczej:** $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $\mu_n = (1/n) \cdot \Sigma_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mu)$, $\mu_\infty$ - pkt. skupienia ciągu $(\mu_n) \Longrightarrow \mu_\infty \in \mathcal{M}(X,T)$.

**Wniosek 2.** $G$-abelowa $\Longrightarrow \mathcal{M}(X,G) \neq \emptyset$.

**Wniosek 3.** $G$-abelowa, $g_1, \ldots, g_k \in G$, $f_1, \ldots, f_k \in C(X)$, $f = \Sigma_i(f_i - f_i \circ g_i) \Longrightarrow$ istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) \leqslant 0$.

**Problemik.** Elementarny dowód wniosku 3 ?

# Istnienie miar niezmienniczych - 2

$\mathcal{S}$ - skończony, symetryczny zbiór generujący $\mathcal{G}$, $x \in X$

$$\mathcal{S}_n(x) = \{(h_1 \circ \ldots \circ h_n)(x), h_j \in \mathcal{S}\}$$

$$N(n, x) = \#(\mathcal{S}_n(x))$$

**Twierdzenie.** Jeżeli

$$(1) \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(n, x) \leqslant 0,$$

to istnieje $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{G})$ o nośniku zawartym w domknięciu orbity $\mathcal{G}(x)$.

**Dowód.** Z (1) $\Longrightarrow$ istnieje podciąg $(n_k)$ taki, że

$$(2) \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\#(\mathcal{S}_{n_{k+1}}(x) \setminus \mathcal{S}_{n_{k-1}}(x))}{\#\mathcal{S}_{n_k}(x)} = 0$$

Przyjmijmy

$$(3) \quad \Lambda_k(f) = \frac{1}{N(n_k, x)} \sum_{y\in\mathcal{S}_{n_k}(x)} f(y).$$

Nie zmniejszając ogólności, $\Lambda_k \to \Lambda \in C(X)^*$. Z (2) i (3) $\Longrightarrow$

$$(4) \quad |\Lambda_k(f) - \Lambda_k(f \circ h)| \to 0$$

gdy $k \to \infty$, $f \in C(X)$, $h \in \mathcal{S}$. Oczywiście, $\Lambda(1) = 1$ i $\Lambda(f) \geqslant 0$, gdy $f \geqslant 0$. Zatem ("Riesz Representation Thm."), $\Lambda$ reprezentuje $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{G})$. c.b.d.o.

Podobnie:
**Twierdzenie.** Jeżeli entropia $\mathcal{G}$ jest równa zeru, to $\mathcal{M}(X, \mathcal{G}) \neq \emptyset$.

**Laplasjan.** $(M, g)$ – rozmaitość riemannowka (tzn. $g(x)$ – iloczyn skalarny w przestrzeni stycznej $T_xM$, $x \in M$
$\nabla$ – koneksja (Levi-Civita) na $(M, g)$
$X$ – pole wektorowe na $M \Longrightarrow \operatorname{div}(X) := \operatorname{tr}(Z \mapsto \nabla_Z X)$
$f \in C^\infty(M) \Longrightarrow \nabla f =$ gradient $f$, tzn. $g(\nabla f, Z) = df(Z)$ dla każdego pola wektorowego $Z$

**Definicja.** *Laplasjanem* funkcji $f$ na $(M, g)$ nazywamy funkcję

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

**Uwaga.** $\Delta$ jest eliptycznym operatorem różniczkowym drugiego rzędu. Lokalnie,

$$\Delta f = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \text{wyrazy niższego rzędu},$$

gdzie $(a_{ij})$ jest dodatnio określoną macierzą funkcji gładkich. Jeśli więc $f$ osiąga lokalne maksimum w punkcie $x$, to

$$\Delta f(x) \leqslant 0.$$

# Miary harmoniczne 1.

**Definicja 1.** Miara $\mu \in \mathcal{M}(M)$ na (zwartej) rozmaitości riemannowskiej $M$ jest *harmoniczna*, gdy

$$\int \Delta f d\mu = 0$$

dla wszystkich $f$.

**Przykład.** Klasyczne twierdzenie Stokesa $\Longrightarrow h \cdot \mathrm{vol}$ - harmoniczna, gdy $h$ - harmoniczna ($\Delta h = 0$).

$(M, \mathcal{F}, g)$ - sfoliowana rozmaitość riemannowska

$\Delta_{\mathcal{F}}$ - sfoliowany laplasjan, tzn.

$$\Delta_{\mathcal{F}} f(x) = \Delta_L(f|L)(x),$$

gdy $f \in C^\infty(M)$, $x \in M$, $L$ – liść $\mathcal{F}$ i $x \in L$.

**Definicja 2.** (L. Garnett) Miara $\mu \in \mathcal{M}(M)$ na (zwartej) sfoliowanej rozmaitości riemannowskiej jest *harmoniczna*, gdy

$$\int \Delta_{\mathcal{F}} f d\mu = 0$$

dla wszystkich $f$.

# Miary harmoniczne 2.

**Twierdzenie 1.** Na dowolnej zwartej sfoliowanej rozmaitości riemannowskiej istnieją miary harmoniczne.

**Dowód.** Jeżeli $V = \mathrm{im}\ \Delta_{\mathcal{F}}$ i $f \in V$, to $f$ osiąga max w pewnym p-cie $x$, podobnie $f|L$, gdy $L$ – liść przez $x$, zatem

$$\Delta_{\mathcal{F}} f(x) = \Delta_L(f|L)(x) \leqslant 0.$$

**Twierdzenie 2.** Miara $\mu$ na $(M, \mathcal{F}, g)$ jest harmoniczna $\Longleftrightarrow$ $\mu$ jest niezmiennicza względem operatorów $(D_t)$ dyfuzji ciepła wzdłuż liści foliacji $\mathcal{F}$.

**Twierdzenie 3.** Miara $\mu$ na $(M, \mathcal{F}, g)$ jest harmoniczna $\Longleftrightarrow$ lokalnie (w mapie sfoliowanej $U$) jest postaci

$$\mu|U = \int_T (h_z \cdot \mathrm{vol}_z) d\sigma(z),$$

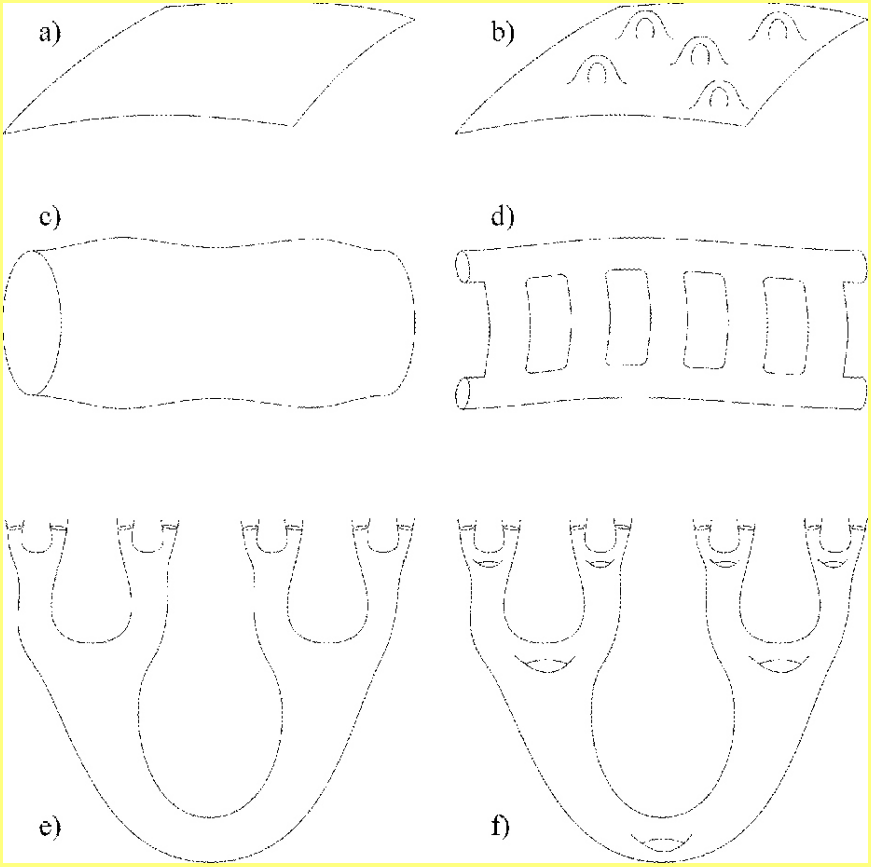
gdzie $T$ – transwersala $\mathcal{F}$ w $U$, $\sigma$ – miara na $T$, $\mathrm{vol}_z$ – miara objętości na płytce $P_z$ przez $z$, $h_z$ - funkcja harmoniczna na $P_z$.

# Liście typowe w wymiarze 2

**Twierdzenie 1.** (Ghys, 1995) Jeżeli $\mu$ jest miarą harmoniczną na $(M, \mathcal{F})$ ($M$ –zwarta, $\mathcal{F}$ – orientowalna, $\dim \mathcal{F} = 2$), to dla $\mu$-p.w. $x \in M$ liść $L_x$ jest jednego z poniższych typów:
(1) powierzchnia zwarta,
(2) płaszczyzna $\mathbb{R}$,
(3) walec $\mathbb{R} \times S^1$,
(4) drzewo Cantora ($S^2 \setminus$ zbiór Cantora),
(5) "potwór z Loch Ness" ($\mathbb{R}$ z dołączoną nieskończoną rodziną rączek),
(6) "drabina Jakóba" (walec z dołączoną nieskończoną rodziną rączek),
(7) "kwitnące drzewo Cantora" (drzewo Cantora z dołączoną nieskończoną rodziną rączek).

**Twierdzenie 2.** (Cantwell i Conlon, 1998) $M, \mathcal{F}$ – jak wyżej $\Longrightarrow$ suma liści typów (1) - (7) jest zbiorem *rezydualnym* (tzn. zawiera przecięcie przeliczalnej rodziny otwartych zbiorów gęstych).

**Uwaga.** W dowolnym wymiarze, liście typowe mają $0, 1, 2$ lub zbiór Cantora końców.




Rysunek 3: Liście typowe w wymiarze 2

# Liście błądzące.

**Definicja.** $L$ jest liściem *błądzącym*, gdy jest niezwarty i właściwy (tj. topologia indukowana z $M$ pokrywa się z topologią rozmaitości na $L$). $L$ jest liściem *istotnie błądzącym*, gdy każdy punkt $x \in L$ posiada otoczenie $U$ takie, że każdy liść $L'$ przecina $U$ wzdłuż conajwyżej jednej płytki.

**Twierdzenie.** (Garnett) $(M, \mathcal{F})$ – zwarta rozmaitość sfoliowana, $\mu$ – miara harmoniczna na $M$, $B$ – suma wszystkich liści błądzących $\Longrightarrow$ $\mu(B) = 0$.

**Twierdzenie.** (Hurder) Jeżeli $\operatorname{codim} \mathcal{F} = 1$ i $\Omega(\mathcal{F})$ = dopełnienie sumy wszystkich liści istotnie błądzących, to

$$h(\mathcal{F}) > 0 \quad \Longrightarrow \quad h(\mathcal{F}, \Omega(\mathcal{F})) > 0.$$

# VARIA

## Klasa Godbillon-Veya.

$\mathcal{F}$ – foliacja transversalnie orientowalna kowymiaru 1 na zwartym $M$
$\omega, \eta$ – 1-formy takie, że $\mathcal{F} = \ker \omega$, $d\omega = \eta \wedge \omega$

**Twierdzenie.** (Godbillon-Vey) Klasa kohomologii de Rhama $\mathrm{gv}(\mathcal{F})$ formy $\eta \wedge d\eta$ nie zależy od $\omega$ i $\eta$, a tylko od $\mathcal{F}$.

**Definicja.** $\mathrm{gv}(\mathcal{F})$ jest tzw. *klasą Godbillon-Veya* foliacji $\mathcal{F}$.

**Twierdzenie.** (Duminy) Jeżeli $\mathrm{gv}(\mathcal{F}) \neq 0$, to $\mathcal{F}$ zawiera liść sprężynujący.

**Wniosek.** $h(\mathcal{F}) = 0 \Longrightarrow \mathrm{gv}(\mathcal{F}) = 0$ (Odwrotnie nie !)

# Quasi-izometrie.

$(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ – przestrzenie metryczne
$F : X \to Y$

**Definicja.** $F$ jest *quasi-izometrią*, gdy istnieje stała $C > 1$ taka, że
(1) $C^{-1} d_X(x, x') - C \leqslant d_Y(F(x), F(x')) \leqslant C d_X(x, x') + C$,
(2) $\mathrm{dist}_Y(y, F(X)) < C$
dla wszystkich $x, x' \in X$ i $y \in Y$. Dwie przestrzenie metryczne są *quasi-izometryczne*, gdy istnieje między nimi quasi-izometria.

**Przykłady.** (1) Dowolne dwie przestrzenie zwarte są q.-i.
(2) Prosta jest q.-i. z walcem i drabiną Jakóba.
(3) Płaszczyzna euklidesowa nie jest q.-i. z płaszczyzną hiperboliczną.
(4) Drzewo Cantora jest q.-i. z kwitnącym drzewem Cantora.

**Problem.** Czy każda rozmaitość riemannowska jest q.-i. z liściem (**pewnej foliacji pewnej rozmaitości zwartej**).?

# Liście i nie-liście 1.

**Twierdzenie.** (Cantwell-Conlon, 1987) Dowolna powierzchnia jest homeomorficzna z liściem.

**Przykład.** (Ghys, 1985) Istnieją rozmaitości niehomeomeorficzne z liśćmi. (Konstrukcja: Weź nieskończoną rodzinę $(G_k, k \in \mathbb{N})$ nieizomorficznych grup skończenie przedstawialnych, dla każdej z nich znajdź rozmaitość zwartą (ustalonego wymiaru $n$) $N_k$ o grupie podstawowej $G_k$ i weź za $N$ sumę spójną wszystkich $N_k$.)

**Definicja.** Ustalmy $C > 1$ i weźmy przestrzeń metryczną $X$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy przez $N(n, X)$ najmniejszą liczbę $k$, dla której istnieją przestrzenie metryczne $Y_1, \ldots Y_k$ takie, że każdy pozdbiór $A \subset X$ średnicy $\leqslant n$ jest $C$-q.-i. z podzbiorem jednej z przestrzeni $Y_j$. Typ wzrostu funkcji $n \mapsto N(n, X)$ nazywamy *typem złożoności geometrycznej* przestrzeni $X$.

# Liście i nie-liście 2.

**Twierdzenie.** (Attie-Hurder, 1996) (1) Typ złożoności geometrycznej dowolnej zupełnej rozmaitości riemannowskiej o ograniczonej geometrii nie przekracza (dla pewnych $a, b > 1$) typu wzrostu funkcji

$$n \mapsto a^{b^n}.$$

(2) Typ złożoności geometrycznej dowolnego liścia (**dowolnej foliacji $\mathcal{F}$ klasy** $\mathrm{C}^1$ !) nie przekracza typu wzrostu funkcji

$$n \mapsto e^n.$$

**Dowód.** (2) Ponieważ $\mathcal{F}$ jest klasy $\mathrm{C}^1$, więc entropia geometryczna $h = h(\mathcal{F}, g)$ jest skończona. Jeśli $\epsilon > 0$ jest dostatecznie małe i $x, y$ leżą na transwersali w odległości $\leqslant \epsilon$, to kule $B^{\mathcal{F}}(x, n)$ i $B^{\mathcal{F}}(y, n)$ sa $C$-q.-i. Wtedy

$$N(n, L) \leqslant e^{n(h+1)} \quad c.b.d.o.$$

# Liście i nie-liście 3.

**Przykład 1.** (Zeghib, 1994) Istnieją powierzchnie (zupełne i o ograniczonej geometrii), których typ geometrycznej złożoności wynosi $a^{b^n}$ $(a, b > 1)$, które nie są więc q.-i. z liśćmi.

**Konstrukcja:** Weź płaszczyznę hiperboliczną i rozmieść na niej archipelagi wysp o dodatniej krzywiźnie (dużo wysp, dużych i różnych rozmiarów (np. $n$, $n^2$ i $n^3$, $n \in \mathbb{N}$) w różnych konfiguracjach.)

**Definicja.** Podrozmaitość $N$ rozmaitości $(M, \mathcal{F})$ jest *$\alpha$-pseudoliściem*, gdy

$$\angle(T_x N, T_x \mathcal{F}) \leqslant \alpha, \quad x \in N.$$

**Przykład 2.** (P.W., 1999) Istnieją powierzchnie (zupełne i o ograniczonej geometrii) $S$ , których typ geometrycznej złożoności wynosi $a^{b^n}$ $(a, b > 1)$, a które są q.-i. z $\alpha$-pseudoliśćmi (pewnej ustalonej foliacji gładkiej na pewnej ustalonej rozmaitości zwartej $M$) dla dowolnego $\alpha > 0$.

**Konstrukcja:** $M$-wiązka okręgów nad powierzchnią hiperboliczną $\Sigma_2$, $\mathcal{F}$-zawieszenie stosownego homeomorfizmu $\pi_1(\Sigma_2) \to \mathrm{Diffeo}(S^1)$, a $S$ - płaszczyzna Zeghiba ze stosownymi archpelagami.

# Kilka problemów.

**Entropia a klasy charakterystyczne.** Czy znikanie entropii $h(\mathcal{F})$ geometrycznej ($\operatorname{codim}\mathcal{F} > 1$) implikuje znikanie innych niż **gv** klas charakterystycznych foliacji $\mathcal{F}$?

**Zasada wariacyjna.** Okreslić (dla możliwie szerokiej klasy grup-pseudogrup-foliacji) entropię względem miar (rozsądnej klasy) tak by zachodziła zasada wariacyjna:

$$h = \sup_{\mu} H_{\mu}.$$

**Wyjątkowe zbiory minimalne w kowymiarze 1.** Wykazać, że dowolny wyjątkowy (tj. $\neq M$, $\neq L$) zbiór minimalny (domknięty, nasycony, niepusty i min ze względu na te własności) dowolnej foliacji **klasy** $\mathrm{C}^2$ (**!**) i kowymiaru 1 na rozmaitości zwartej ma miarę Lebesgues'a 0.

**Wyjątkowe zbiory minimalne w kowymiarze $> 1$.** Scharakteryzować wyjątkowe zbiory minimalne foliacji gładkich danego kowymiaru $q$ ($q > 1$) na rozmaitościach zwartych.

# LITERATURA

**[1]** C. Camacho, A. Lins Neto, Geometric Theory of Foliations, Birkhäuser, 1985

**[2]** A. Candel, L. Conlon, Foliations, I i II, AMS, 2000 i 2003.

**[3]** C. Godbillon, Feuilletages, Birkhäuser, 1991.

**[4]** G. Hector, U. Hirsch, Introduction to the Geometry of Foliations, Part A i B, Vieweg & Sohn, 1981 i 1983.

**[5]** F. Kamber, Ph. Tondeur, Foliated Bundles and Characteristic Classes, Springer, 1975.

**[6]** R. Langevin, *A list of questions about foliations*, w "Differential Topology, Foliations and Group Actions", AMS, 1994.

**[7]** I. Tamura, Topology of Foliations, AMS 1992 (wyd. ros. 1979).

**[8]** Ph. Tondeur, Riemannian Geometry of Foliations, Birkhäuser 1997.

**[9]** P. Walczak, Dynamics of Foliations, Groups and Pseudogroups, Monografie Matematyczne, tom **64**, Birkhäuser, 2004.