Gdy niższa entropia wywołuje silniejszy chaos

Dominik Kwietniak

Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński

Będlewo, 21 kwietnia 2007 r.

Entropia topologiczna a chaos

- Dla $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ definiujemy *entropię topologiczną* $h(f)$,

Entropia topologiczna a chaos

- Dla $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ definiujemy *entropię topologiczną* $h(f)$,

Entropia topologiczna a chaos

- Dla $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ definiujemy *entropię topologiczną* $h(f)$, $h(f) \in [0, +\infty]$.

Entropia topologiczna a chaos

- Dla $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ definiujemy *entropię topologiczną* $h(f)$, $h(f) \in [0,+\infty]$.
- Entropia jest niezmiennikiem, tzn. dwa przekształcenia, których dynamiki są równoważne muszą mieć równe entropie.

Entropia topologiczna a chaos

- Dla $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ definiujemy *entropię topologiczną* $h(f)$, $h(f) \in [0,+\infty]$.
- Entropia jest niezmiennikiem, tzn. dwa przekształcenia, których dynamiki są równoważne muszą mieć równe entropie.
- Dla danej klasy $\mathcal{D}$ odwzorowań warto wiedzieć ile wynosi

$$\inf\{h(f) : f \in \mathcal{D}\}.$$

Entropia topologiczna a chaos

- Dla $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ definiujemy *entropię topologiczną* $h(f)$, $h(f) \in [0, +\infty]$.
- Entropia jest niezmiennikiem, tzn. dwa przekształcenia, których dynamiki są równoważne muszą mieć równe entropie.
- Dla danej klasy $\mathcal{D}$ odwzorowań warto wiedzieć ile wynosi

$$\inf\{h(f) : f \in \mathcal{D}\}.$$

- Ile wynosi to infimum, gdy $\mathcal{D}$, to klasa odwzorowań chaotycznych w sensie Devaneya,

Entropia topologiczna a chaos

- Dla $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ definiujemy *entropię topologiczną* $h(f)$, $h(f) \in [0, +\infty]$.
- Entropia jest niezmiennikiem, tzn. dwa przekształcenia, których dynamiki są równoważne muszą mieć równe entropie.
- Dla danej klasy $\mathcal{D}$ odwzorowań warto wiedzieć ile wynosi

$$\inf\{h(f) : f \in \mathcal{D}\}.$$

- Ile wynosi to infimum, gdy $\mathcal{D}$, to klasa odwzorowań chaotycznych w sensie Devaneya, całkowicie chaotycznych,

Entropia topologiczna a chaos

- Dla $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ definiujemy *entropię topologiczną* $h(f)$, $h(f) \in [0, +\infty]$.
- Entropia jest niezmiennikiem, tzn. dwa przekształcenia, których dynamiki są równoważne muszą mieć równe entropie.
- Dla danej klasy $\mathcal{D}$ odwzorowań warto wiedzieć ile wynosi

$$\inf\{h(f) : f \in \mathcal{D}\}.$$

- Ile wynosi to infimum, gdy $\mathcal{D}$, to klasa odwzorowań chaotycznych w sensie Devaneya, całkowicie chaotycznych, dokładnie chaotycznych?

Entropia a chaos Devaneya na odcinku

Entropia a chaos Devaneya na odcinku

- $I^{\mathrm{D}}([0,1]) = \inf\{h(f) | f\colon [0,1] \mapsto [0,1] \text{ chaot. wg Devaneya}\}$.

Entropia a chaos Devaneya na odcinku

- $I^{\mathrm{D}}([0,1]) = \inf\{h(f) | f \colon [0,1] \mapsto [0,1]$ chaot. wg Devaneya$\}$.
- $I^{\mathrm{D}}([0,1]) = (1/2)\log 2$ oraz istnieje chaotyczne wg Devaneya przekształcenie f takie, że $h(f) = \frac{1}{2} log 2$.

Entropia a chaos Devaneya na odcinku

- $I^{\mathrm{D}}([0,1]) = \inf\{h(f) | f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ chaot. wg Devaneya$\}$.
- $I^{\mathrm{D}}([0,1]) = (1/2)\log 2$ oraz istnieje chaotyczne wg Devaneya przekształcenie f takie, że $h(f) = \frac{1}{2} log 2$.
- $I^{\mathrm{TD}}([0,1]) = \inf\{h(f) | f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ całk. chaotyczne$\}$.

Entropia a chaos Devaneya na odcinku

- $I^{\mathrm{D}}([0,1]) = \inf\{h(f) | f \colon [0,1] \mapsto [0,1]$ chaot. wg Devaneya$\}$.
- $I^{\mathrm{D}}([0,1]) = (1/2)\log 2$ oraz istnieje chaotyczne wg Devaneya przekształcenie f takie, że $h(f) = \frac{1}{2} log 2$.
- $I^{\mathrm{TD}}([0,1]) = \inf\{h(f) | f \colon [0,1] \mapsto [0,1]$ całk. chaotyczne$\}$.
- $I^{\mathrm{ED}}([0,1]) = \inf\{h(f) | f \colon [0,1] \mapsto [0,1]$ dokł. chaotyczne$\}$.

Entropia a chaos Devaneya na odcinku

- $I^{\mathrm{D}}([0,1]) = \inf\{h(f) | f\colon [0,1] \mapsto [0,1] \text{ chaot. wg Devaneya}\}$.
- $I^{\mathrm{D}}([0,1]) = (1/2)\log 2$ oraz istnieje chaotyczne wg Devaneya przekształcenie f takie, że $h(f) = \frac{1}{2} log 2$.
- $I^{\mathrm{TD}}([0,1]) = \inf\{h(f) | f\colon [0,1] \mapsto [0,1] \text{ całk. chaotyczne}\}$.
- $I^{\mathrm{ED}}([0,1]) = \inf\{h(f) | f\colon [0,1] \mapsto [0,1] \text{ dokł. chaotyczne}\}$.
- $I^{\mathrm{TD}}([0,1]) = I^{\mathrm{ED}}([0,1]) = (1/2)\log 2$ oraz nie istnieje całkowicie chaotyczne przekształcenie f takie, że $h(f) = \frac{1}{2} log 2$.

Entropia a chaos Devaneya na odcinku c.d.

Entropia a chaos Devaneya na odcinku c.d.

- Istnieje chaotyczne wg Devaneya przekształcenie f takie, że $h(f) = \frac{1}{2} log 2$, ale nie jest ono (nie może być) całkowicie chaotyczne.

Entropia a chaos Devaneya na odcinku c.d.

- Istnieje chaotyczne wg Devaneya przekształcenie f takie, że $h(f) = \frac{1}{2} log 2$, ale nie jest ono (nie może być) całkowicie chaotyczne.
- Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje całkowicie chaotyczne przekształcenie f_ε takie, że $\log 2 < 2h(f_\varepsilon) \leqslant \log 2 + \varepsilon$. Wspomniane przekształcenia są nawet dokładnie chaotyczne. Czy mogą być tylko całkowicie chaotyczne?

Entropia a chaos Devaneya na odcinku c.d.

- Istnieje chaotyczne wg Devaneya przekształcenie f takie, że $h(f) = \frac{1}{2} log 2$, ale nie jest ono (nie może być) całkowicie chaotyczne.
- Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje całkowicie chaotyczne przekształcenie f_ε takie, że $\log 2 < 2h(f_\varepsilon) \leqslant \log 2 + \varepsilon$. Wspomniane przekształcenia są nawet dokładnie chaotyczne. Czy mogą być tylko całkowicie chaotyczne?
- Nie! Jeżeli $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ jest całkowicie chaotyczne, ale nie jest dokładnie chaotyczne, to

$$h(f) > \frac{1}{2} \log 3.$$

Kilka definicji

Kilka definicji

Definicja (Topologiczna tranzytywność i jej odmiany)

Przekształcenie ciągłe $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ jest

- tranzytywne $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w $[0,1]$ istnieje $n > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Kilka definicji

Definicja (Topologiczna tranzytywność i jej odmiany)

Przekształcenie ciągłe $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ jest

- tranzytywne $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w $[0,1]$ istnieje $n > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- mieszające $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w $[0,1]$ istnieje $N > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ dla wszystkich $n \geqslant N$.

Kilka definicji

Definicja (Topologiczna tranzytywność i jej odmiany)

Przekształcenie ciągłe $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]$ jest

- tranzytywne $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w $[0,1]$ istnieje $n > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- mieszające $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w $[0,1]$ istnieje $N > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ dla wszystkich $n \geqslant N$.
- dokładne $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ dla dow. $U \neq \emptyset$ otwartego w $[0,1]$ istnieje $N > 0$ takie, że $f^N(U) = X$.

Chaos Devaneya

Definicja (Chaos w sensie Devaneya)

Funkcja $f : X \mapsto X$ jest *chaotyczna w sensie Devaneya* jeżeli:

Chaos Devaneya

Definicja (Chaos w sensie Devaneya)

Funkcja $f : X \mapsto X$ jest *chaotyczna w sensie Devaneya* jeżeli:

(D1) f jest *tranzytywna*;

Chaos Devaneya

Definicja (Chaos w sensie Devaneya)

Funkcja $f\colon X \mapsto X$ jest *chaotyczna w sensie Devaneya* jeżeli:

(D1) f jest *tranzytywna*;

(D2) zbiór punktów okresowych f, tj. zbiór

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \text{ dla pewnego } n > 0\}$$

jest gęstym podzbiorem przestrzeni X.

Chaos Devaneya na odcinku

Twierdzenie (Na odcinku tranzytywność wywołuje chaos)

Jeżeli $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *jest tranzytywne, to zbiór*

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \textit{ dla pewnego } n > 0\}$$

jest gęsty.

Chaos Devaneya na odcinku

Twierdzenie (Na odcinku tranzytywność wywołuje chaos)

Jeżeli $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *jest tranzytywne, to zbiór*

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \text{ dla pewnego } n > 0\}$$

jest gęsty.

Wniosek

Jeżeli $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *jest ciągłe, to*

- f *chaotyczne w sensie Devaneya* $\Leftrightarrow$ f *tranzytywne;*
- f *całkowicie chaotyczne* $\Leftrightarrow$ f *mieszające;*
- f *dokładnie chaotyczne* $\Leftrightarrow$ f *dokładne.*

Odmiany chaosu w sensie Devaneya cd.

Obserwacja

Niech $f : [0,1] \mapsto [0,1]$. *Wówczas:*

Odmiany chaosu w sensie Devaneya cd.

Obserwacja

Niech $f : [0,1] \mapsto [0,1]$*. Wówczas:*

- *f dokładnie chaotyczne*

Odmiany chaosu w sensie Devaneya cd.

Obserwacja

Niech $f : [0,1] \mapsto [0,1]$. *Wówczas:*

- f *dokładnie chaotyczne* $\Longrightarrow$
- f *całkowicie chaotyczne*

Odmiany chaosu w sensie Devaneya cd.

Obserwacja

Niech $f : [0,1] \mapsto [0,1]$*. Wówczas:*

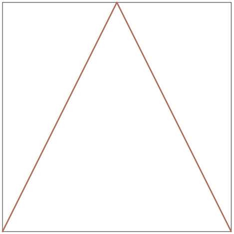
- f *dokładnie chaotyczne* $\Longrightarrow$
- f *całkowicie chaotyczne* $\Longrightarrow$
- f *chaotyczne w sensie Devaneya.*

Przekształcenie dokładne

Przekształcenie namiotowe

$$f(x) = 1 - |1 - 2x|.$$

f

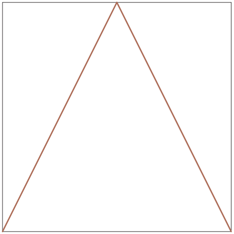


Przekształcenie dokładne

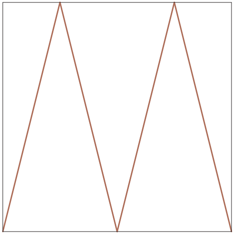
Przekształcenie namiotowe

$$f(x) = 1 - |1 - 2x|.$$

f



f^2

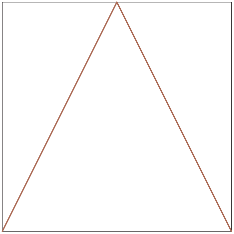


Przekształcenie dokładne

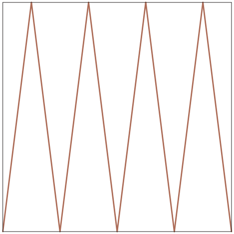
Przekształcenie namiotowe

$$f(x) = 1 - |1 - 2x|.$$

f

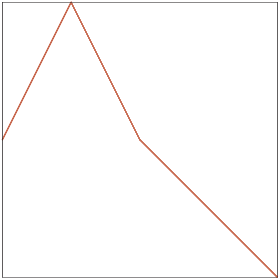


f^3



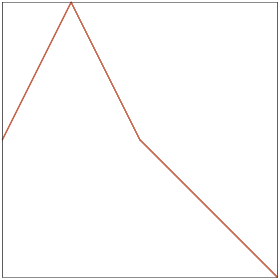
Przekształcenie chaotyczne, ale nie całkowicie chaotyczne

f

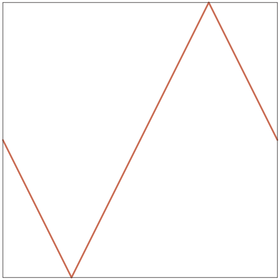


Przekształcenie chaotyczne, ale nie całkowicie chaotyczne

f

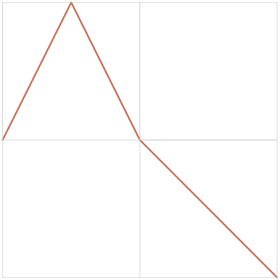


f^2

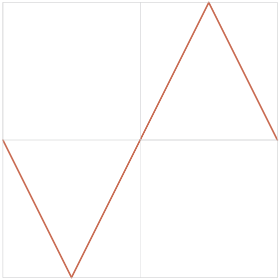


Przekształcenie chaotyczne, ale nie całkowicie chaotyczne

f



f^2



Topologiczne mieszanie na odcinku

Twierdzenie (Charakteryzacja mieszania)

Następujące warunki są równoważne:

1. $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *jest mieszające;*

Topologiczne mieszanie na odcinku

Twierdzenie (Charakteryzacja mieszania)

Następujące warunki są równoważne:

1. $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ *jest mieszające;*
2. f^n *jest tranzytywne dla każdedego* n*;*

Topologiczne mieszanie na odcinku

Twierdzenie (Charakteryzacja mieszania)

Następujące warunki są równoważne:

1. $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ *jest mieszające;*
2. f^n *jest tranzytywne dla każdedego* n*;*
3. *dla dow.* $\varepsilon > 0$ *i przedziału* $(a, b) \subset (0, 1)$ *istnieje* $N > 0$ *takie, że*

$$(\varepsilon, 1 - \varepsilon) \subset f^n((a, b))$$

dla wszystkich $n \geqslant N$*.*

Przekształcenia mieszające, ale nie dokładne

Twierdzenie (Blokh)

Z: $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *jest mieszające.*

Przekształcenia mieszające, ale nie dokładne

Twierdzenie (Blokh)

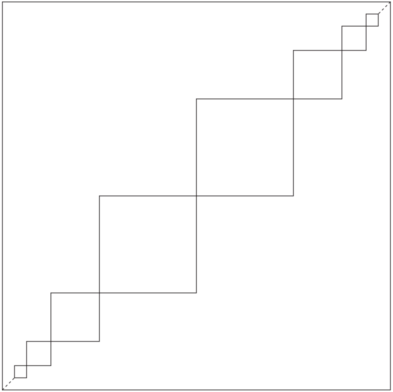
Z: $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *jest mieszające.*

T: f *nie jest dokładne*

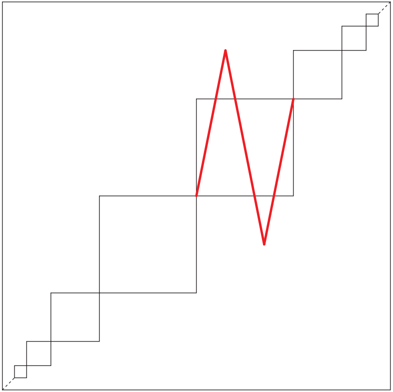
$$\Updownarrow$$

istnieje $a \in \{0,1\}$ *takie, że* $f^{-2}(a) = \{a\}$.

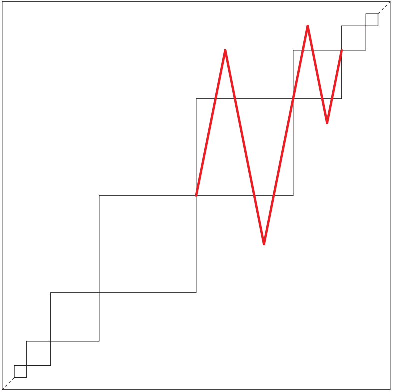
Przekształcenie mieszające, ale nie dokładne



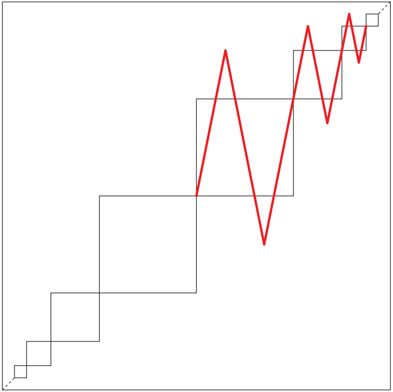
Przekształcenie mieszające, ale nie dokładne



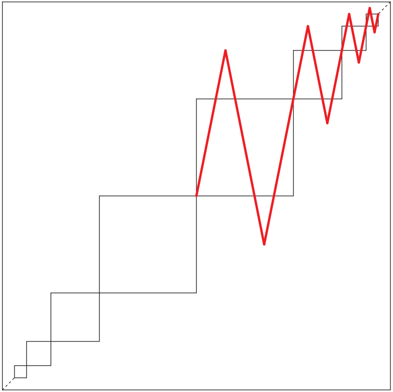
Przekształcenie mieszające, ale nie dokładne



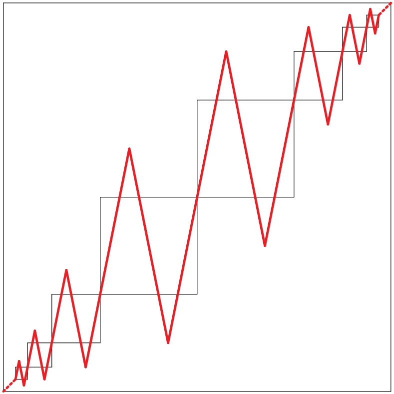
Przekształcenie mieszające, ale nie dokładne



Przekształcenie mieszające, ale nie dokładne



Przekształcenie mieszające, ale nie dokładne



Entropia przekształceń odcinka a podkowy

Definicja

Mówimy, że przedziały domknięte $(I_1, \ldots, I_n)$ tworzą n-podkowę dla f, gdy $\operatorname{int} I_s \cap \operatorname{int} I_t = \emptyset$, gdy $s \neq t$ oraz dla wszystkich $j = 1, \ldots, n$ mamy

$$I_1 \cup \ldots \cup I_n \subset f(I_j).$$

Twierdzenie (folklor)

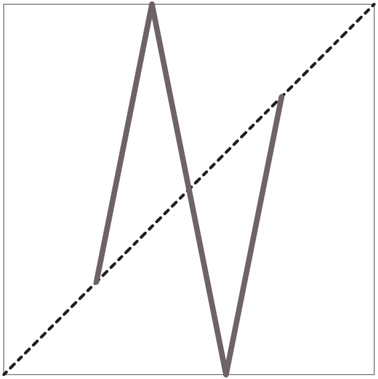
Jeżeli f ma n podkowę, to $h(f) \geqslant logn$.

Twierdzenie

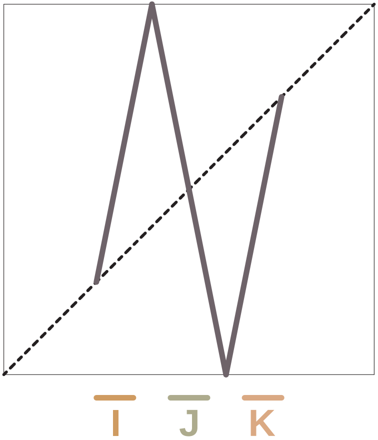
$h(f) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciągi $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ takie, że $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$ oraz dla każdej liczby naturalnej n przekształcenie f^{k_n} ma s_n-podkowę. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} \log s_n = h(f).$$

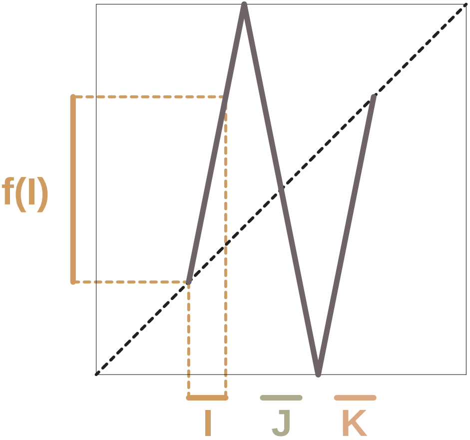
Przykład 3-podkowy



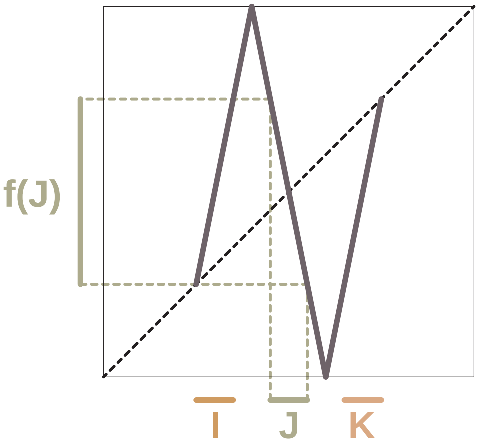
Przykład 3-podkowy



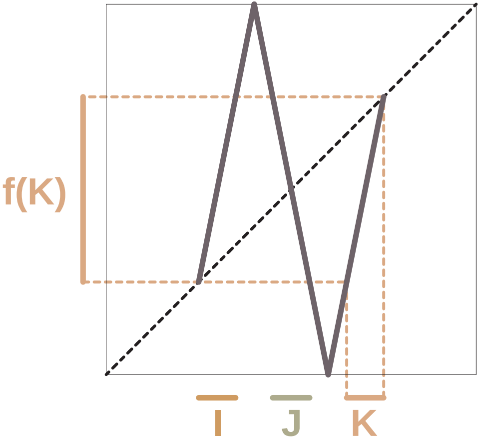
Przykład 3-podkowy



Przykład 3-podkowy



Przykład 3-podkowy



Główne twierdzenie

Twierdzenie (Harańczyk & Kwietniak)

1. *Jeżeli* $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *jest mieszające, ale nie dokładne, to*

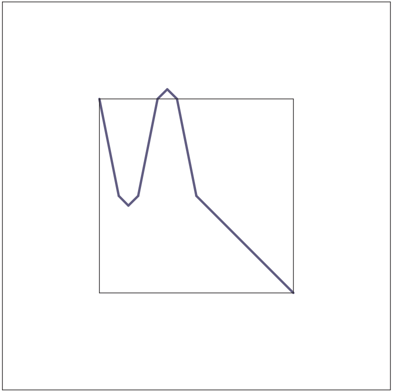
$$h(f) > \frac{1}{2}\log 3.$$

Główne twierdzenie

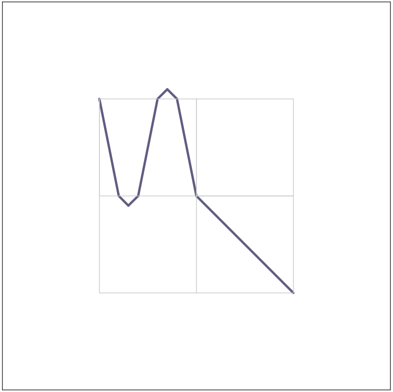
Twierdzenie (Harańczyk & Kwietniak)

1. *Jeżeli* $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *jest mieszające, ale nie dokładne, to*
$$h(f) > \frac{1}{2}\log 3.$$
2. *Dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *mieszające, ale nie dokładne i takie, że*
$$h(f) \leqslant \frac{1}{2}\log 3 + \varepsilon.$$

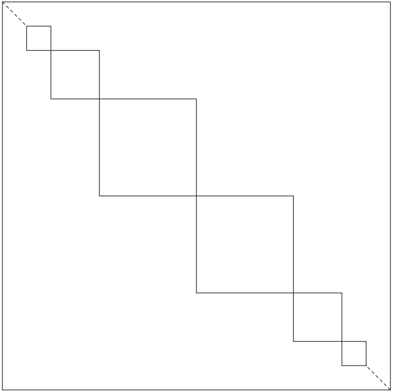
Przekształcenie f takie, że $\log 3 < 2h(f) \leqslant \log + \varepsilon$



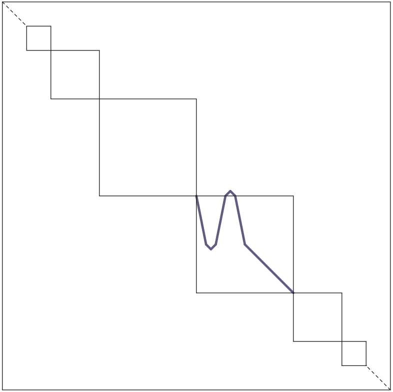
Przekształcenie f takie, że $\log 3 < 2h(f) \leqslant \log + \varepsilon$



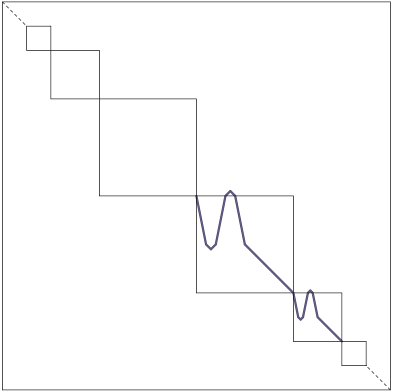
Przekształcenie f takie, że $\log 3 < 2h(f) \leqslant \log + \varepsilon$



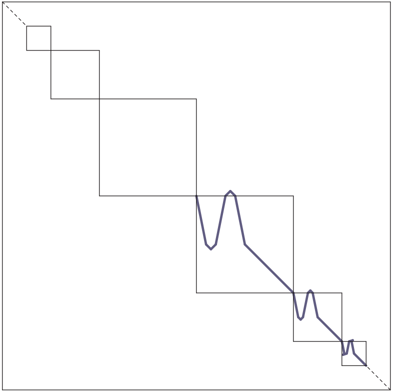
Przekształcenie f takie, że $\log 3 < 2h(f) \leqslant \log + \varepsilon$



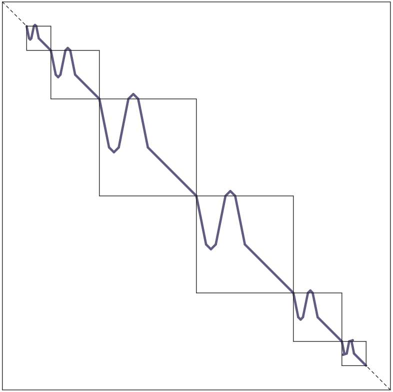
Przekształcenie f takie, że $\log 3 < 2h(f) \leqslant \log + \varepsilon$



Przekształcenie f takie, że $\log 3 < 2h(f) \leqslant \log + \varepsilon$



Przekształcenie f takie, że $\log 3 < 2h(f) \leqslant \log + \varepsilon$



Literatura

L. Alseda, J Llibre, M. Misiurewicz.
Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One.
Wszystko co chcielibyście wiedzieć o entropii na odcinku. A nawet więcej.

S. Ruette.
Chaos for continuous interval maps.
Wersja wstępna. Do ściągnięcia ze strony WWW autorki:
`http://www.math.u-psud.fr/~ruette/`

G. Harańczyk, D. Kwietniak.
When lower entropy implies stronger Devaney chaos.
W przygotowaniu. Powinna pojawić się do końca maja na stronie:
`http://www.im.uj.edu.pl/DominikKwietniak/`