Dynamika przekształceń indukowanych na hiperprzestrzeni i przestrzeni miar probabilistycznych

Dominik Kwietniak

Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński

Będlewo, 30 kwietnia 2006 r.

O czym to będzie?

O czym to będzie?

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.

O czym to będzie?

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
- Jeżeli $f\colon X \mapsto X$ jest ciągłe i $x \in X$, to interesuję nas dynamika orbity punktu x względem f, czyli ciągu $x, f(x), f^2(x), \ldots$

O czym to będzie?

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
- Jeżeli $f\colon X \mapsto X$ jest ciągłe i $x \in X$, to interesuję nas dynamika orbity punktu x względem f, czyli ciągu $x, f(x), f^2(x), \ldots$
- $\mathcal{K}$ rodzina wszystkich niepustych i zwartych podzbiorów X rozważana z metryką Hausdorffa d_H.

O czym to będzie?

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
- Jeżeli $f\colon X \mapsto X$ jest ciągłe i $x \in X$, to interesuję nas dynamika orbity punktu x względem f, czyli ciągu $x, f(x), f^2(x), \ldots$
- $\mathcal{K}$ rodzina wszystkich niepustych i zwartych podzbiorów X rozważana z metryką Hausdorffa d_H.
- $\mathcal{M}$ rodzina wszystkich borelowskich miar probabilistycznych na X rozważna z metryką Prochorowa d_P.

O czym to będzie?

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
- Jeżeli $f\colon X \mapsto X$ jest ciągłe i $x \in X$, to interesuję nas dynamika orbity punktu x względem f, czyli ciągu $x, f(x), f^2(x), \ldots$
- $\mathcal{K}$ rodzina wszystkich niepustych i zwartych podzbiorów X rozważana z metryką Hausdorffa d_H.
- $\mathcal{M}$ rodzina wszystkich borelowskich miar probabilistycznych na X rozważna z metryką Prochorowa d_P.
- Każde przekształcenie ciągłe $f\colon X \mapsto X$ indukuje w naturalny sposób przekształcenia $\overline{f}_{\mathcal{K}}\colon \mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}$ i $\overline{f}_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$.

O czym to będzie?

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
- Jeżeli $f\colon X \mapsto X$ jest ciągłe i $x \in X$, to interesuję nas dynamika orbity punktu x względem f, czyli ciągu $x, f(x), f^2(x), \ldots$
- $\mathcal{K}$ rodzina wszystkich niepustych i zwartych podzbiorów X rozważana z metryką Hausdorffa d_H.
- $\mathcal{M}$ rodzina wszystkich borelowskich miar probabilistycznych na X rozważna z metryką Prochorowa d_P.
- Każde przekształcenie ciągłe $f\colon X \mapsto X$ indukuje w naturalny sposób przekształcenia $\overline{f}_{\mathcal{K}}\colon \mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}$ i $\overline{f}_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$.

Pytanie

Jaki jest związek między dynamiką f a dynamikami $\overline{f}_{\mathcal{K}}$ i $\overline{f}_{\mathcal{M}}$?

Dynamika topologiczna

(X, d) zwarta przestrzeń metryczna. $f : X \mapsto X$ ciągłe.

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \text{ dla pewnego } n > 0\}$$

Dynamika topologiczna

(X, d) zwarta przestrzeń metryczna. $f : X \mapsto X$ ciągłe.

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \text{ dla pewnego } n > 0\}$$

Definicja (Topologiczna tranzytywność i jej odmiany)

- tranzytywne wtw, gdy dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w X istnieje $n > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Dynamika topologiczna

(X, d) zwarta przestrzeń metryczna. $f : X \mapsto X$ ciągłe.

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \text{ dla pewnego } n > 0\}$$

Definicja (Topologiczna tranzytywność i jej odmiany)

- tranzytywne wtw, gdy dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w X istnieje $n > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- słabo mieszające wtw, gdy $f^{\times n}$ tranzytywne dla wszyskich $n \in \mathbb{N}$.

Dynamika topologiczna

(X, d) zwarta przestrzeń metryczna. $f : X \mapsto X$ ciągłe.

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \text{ dla pewnego } n > 0\}$$

Definicja (Topologiczna tranzytywność i jej odmiany)

- tranzytywne wtw, gdy dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w X istnieje $n > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- słabo mieszające wtw, gdy $f^{\times n}$ tranzytywne dla wszyskich $n \in \mathbb{N}$.
- mieszające wtw, gdy dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w X istnieje $N > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ dla wszystkich $n \geqslant N$.

Dynamika topologiczna

(X, d) zwarta przestrzeń metryczna. $f : X \mapsto X$ ciągłe.

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \text{ dla pewnego } n > 0\}$$

Definicja (Topologiczna tranzytywność i jej odmiany)

- tranzytywne wtw, gdy dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w X istnieje $n > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- słabo mieszające wtw, gdy $f^{\times n}$ tranzytywne dla wszyskich $n \in \mathbb{N}$.
- mieszające wtw, gdy dla dow. $U, V \neq \emptyset$ otwartych w X istnieje $N > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ dla wszystkich $n \geqslant N$.
- dokładne wtw, gdy dla dow. $U \neq \emptyset$ otwartego w X istnieje $N > 0$ takie, że $f^N(U) = X$.

Hiperprzestrzeń zbiorów zwartych $\mathcal{K}$

Hiperprzestrzeń zbiorów zwartych $\mathcal{K}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.

Hiperprzestrzeń zbiorów zwartych $\mathcal{K}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
- $\mathrm{Nbr}(A, \varepsilon) = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.

Hiperprzestrzeń zbiorów zwartych $\mathcal{K}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
- $\mathrm{Nbr}(A, \varepsilon) = \{x \in X \colon \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.
- Definiujemy metrykę Hausdorffa d_H dla $K, L \in \mathcal{K}$:

$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset \mathrm{Nbr}(L, \varepsilon) \text{ i } L \subset \mathrm{Nbr}(K, \varepsilon)\}.$$

Hiperprzestrzeń zbiorów zwartych $\mathcal{K}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
- $\mathrm{Nbr}(A, \varepsilon) = \{x \in X \colon \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.
- Definiujemy metrykę Hausdorffa d_H dla $K, L \in \mathcal{K}$:

$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset \mathrm{Nbr}(L, \varepsilon) \text{ i } L \subset \mathrm{Nbr}(K, \varepsilon)\}.$$

- $(\mathcal{K}, d_H)$ - zwarta przestrzeń metryczna. Topologia zadana przez d_H w $\mathcal{K}$ to topologia Vietorisa.

Hiperprzestrzeń zbiorów zwartych $\mathcal{K}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
- $\mathrm{Nbr}(A, \varepsilon) = \{x \in X \colon \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.
- Definiujemy metrykę Hausdorffa d_H dla $K, L \in \mathcal{K}$:

$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset \mathrm{Nbr}(L, \varepsilon) \text{ i } L \subset \mathrm{Nbr}(K, \varepsilon)\}.$$

- $(\mathcal{K}, d_H)$ - zwarta przestrzeń metryczna. Topologia zadana przez d_H w $\mathcal{K}$ to topologia Vietorisa.
- Definiujemy $\overline{f}_{\mathcal{K}} \colon \mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}$

Hiperprzestrzeń zbiorów zwartych $\mathcal{K}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
- $\mathrm{Nbr}(A, \varepsilon) = \{x \in X \colon \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.
- Definiujemy metrykę Hausdorffa d_H dla $K, L \in \mathcal{K}$:

$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon K \subset \mathrm{Nbr}(L, \varepsilon) \text{ i } L \subset \mathrm{Nbr}(K, \varepsilon)\}.$$

- $(\mathcal{K}, d_H)$ - zwarta przestrzeń metryczna. Topologia zadana przez d_H w $\mathcal{K}$ to topologia Vietorisa.
- Definiujemy $\overline{f}_{\mathcal{K}} \colon \mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}$ takie, że

$$\overline{f}_{\mathcal{K}}(K) = f(K), \qquad \text{dla } K \in \mathcal{K}$$

Przestrzeń miar probabilistycznych $\mathcal{M}$

Przestrzeń miar probabilistycznych $\mathcal{M}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
  $\mathcal{B}$ to σ-ciało zbiorów borelowskich.

Przestrzeń miar probabilistycznych $\mathcal{M}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
  $\mathcal{B}$ to σ-ciało zbiorów borelowskich.
- $\mathrm{Nbr}(A, \varepsilon) = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.

Przestrzeń miar probabilistycznych $\mathcal{M}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
  $\mathcal{B}$ to σ-ciało zbiorów borelowskich.
- $\mathrm{Nbr}(A, \varepsilon) = \{x \in X \colon \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.
- Definiujemy metrykę Prochorowa d_P dla $\mu, \nu \in \mathcal{M}$:

$$d_P(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon \mu(B) \leqslant \nu(\mathrm{Nbr}(B, \varepsilon)) + \varepsilon \text{ dla dow. } B \in \mathcal{B})\}.$$

Przestrzeń miar probabilistycznych $\mathcal{M}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
  $\mathcal{B}$ to σ-ciało zbiorów borelowskich.
- $\mathrm{Nbr}(A, \varepsilon) = \{x \in X \colon \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.
- Definiujemy metrykę Prochorowa d_P dla $\mu, \nu \in \mathcal{M}$:

  $$d_P(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon \mu(B) \leqslant \nu(\mathrm{Nbr}(B, \varepsilon)) + \varepsilon \text{ dla dow. } B \in \mathcal{B})\}.$$

- $(\mathcal{M}, d_P)$ - zwarta przestrzeń metryczna. Topologia zadana przez d_P w $\mathcal{M}$ to słaba *-topologia.

Przestrzeń miar probabilistycznych $\mathcal{M}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
  $\mathcal{B}$ to σ-ciało zbiorów borelowskich.
- $\mathrm{Nbr}(A, \varepsilon) = \{x \in X \colon \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.
- Definiujemy metrykę Prochorowa d_P dla $\mu, \nu \in \mathcal{M}$:

  $$d_P(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon \mu(B) \leqslant \nu(\mathrm{Nbr}(B, \varepsilon)) + \varepsilon \text{ dla dow. } B \in \mathcal{B})\}.$$

- $(\mathcal{M}, d_P)$ - zwarta przestrzeń metryczna. Topologia zadana przez d_P w $\mathcal{M}$ to słaba *-topologia.
- Definiujemy $\overline{f}_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$

Przestrzeń miar probabilistycznych $\mathcal{M}$

- (X, d) zwarta przestrzeń metryczna.
  $\mathcal{B}$ to σ-ciało zbiorów borelowskich.
- $\mathrm{Nbr}(A, \varepsilon) = \{x \in X \colon \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.
- Definiujemy metrykę Prochorowa d_P dla $\mu, \nu \in \mathcal{M}$:

  $$d_P(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon \mu(B) \leqslant \nu(\mathrm{Nbr}(B, \varepsilon)) + \varepsilon \text{ dla dow. } B \in \mathcal{B})\}.$$

- $(\mathcal{M}, d_P)$ - zwarta przestrzeń metryczna. Topologia zadana przez d_P w $\mathcal{M}$ to słaba *-topologia.
- Definiujemy $\overline{f}_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ takie, że

$$\overline{f}_{\mathcal{M}}(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)), \qquad \text{dla } \mu \in \mathcal{M} \text{ i } A \in \mathcal{B}.$$

Przestrzenie $\mathcal{K}_n$ i $\mathcal{K}_{\mathsf{F}}$

Przestrzenie $\mathcal{K}_n$ i $\mathcal{K}_{\mathsf{F}}$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{K}_n$ rodzina wszystkich co najwyżej n elementowych podzbiorów X.

Przestrzenie $\mathcal{K}_n$ i $\mathcal{K}_{\mathsf{F}}$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{K}_n$ rodzina wszystkich co najwyżej n elementowych podzbiorów X.
- $\mathcal{K}_n$ jest ciągłym obrazem $X^{\times n}$ przez

$$p_n \colon X^{\times n} \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\} \in \mathcal{K}_n.$$

Przestrzenie $\mathcal{K}_n$ i $\mathcal{K}_{\mathsf{F}}$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{K}_n$ rodzina wszystkich co najwyżej n elementowych podzbiorów X.
- $\mathcal{K}_n$ jest ciągłym obrazem $X^{\times n}$ przez

$$p_n \colon X^{\times n} \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\} \in \mathcal{K}_n.$$

- $\mathcal{K}_n$ jest niezmiennicze dla przekształcenia indukowanego $\overline{f}_{\mathcal{K}}$,

$$\overline{f}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}_n) \subset \mathcal{K}_n.$$

Przestrzenie $\mathcal{K}_n$ i $\mathcal{K}_{\mathsf{F}}$

- $\mathcal{K}_n$ rodzina wszystkich co najwyżej n elementowych podzbiorów X.
- $\mathcal{K}_n$ jest ciągłym obrazem $X^{\times n}$ przez

$$p_n \colon X^{\times n} \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\} \in \mathcal{K}_n.$$

- $\mathcal{K}_n$ jest niezmiennicze dla przekształcenia indukowanego $\overline{f}_{\mathcal{K}}$,

$$\overline{f}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}_n) \subset \mathcal{K}_n.$$

- $\mathcal{K}_{\mathsf{F}}$ to rodzina wszystkich skończonych podzbiorów X,

$$\mathcal{K}_{\mathsf{F}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n.$$

Przestrzenie $\mathcal{K}_n$ i $\mathcal{K}_{\mathsf{F}}$

- $\mathcal{K}_n$ rodzina wszystkich co najwyżej n elementowych podzbiorów X.
- $\mathcal{K}_n$ jest ciągłym obrazem $X^{\times n}$ przez

$$p_n \colon X^{\times n} \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\} \in \mathcal{K}_n.$$

- $\mathcal{K}_n$ jest niezmiennicze dla przekształcenia indukowanego $\overline{f}_{\mathcal{K}}$,

$$\overline{f}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}_n) \subset \mathcal{K}_n.$$

- $\mathcal{K}_{\mathsf{F}}$ to rodzina wszystkich skończonych podzbiorów X,

$$\mathcal{K}_{\mathsf{F}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n.$$

- $\mathcal{K}_{\mathsf{F}}$ jest gęstym i $\overline{f}_{\mathcal{K}}$-niezmienniczym podzbiorem $\mathcal{K}$.

Przestrzenie $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{M}_{\mathsf{F}}$

Przestrzenie $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{M}_{\mathrm{F}}$

- Punktowi $x \in X$ przyporządkowywujemy miarę μ_x taką, że $\mu_x(B) = \mathbb{I}_B(x)$ dla $B \in \mathcal{B}$, tzn.

$$\mu_x(B) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in B; \\ 0, & \text{gdy } x \notin B. \end{cases}$$

Przestrzenie $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{M}_{\mathrm{F}}$

- Punktowi $x \in X$ przyporządkowywujemy miarę μ_x taką, że $\mu_x(B) = \mathbb{I}_B(x)$ dla $B \in \mathcal{B}$, tzn.

$$\mu_x(B) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in B; \\ 0, & \text{gdy } x \notin B. \end{cases}$$

- Dla ust. $n \in \mathbb{N}$ definiujemy:

$$q_n \colon X^{\times n} \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}\left(\mu_{x_1} + \ldots + \mu_{x_n}\right) \in \mathcal{M}.$$

Przestrzenie $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{M}_{\mathrm{F}}$

- Punktowi $x \in X$ przyporządkowywujemy miarę μ_x taką, że $\mu_x(B) = \mathbb{I}_B(x)$ dla $B \in \mathcal{B}$, tzn.

$$\mu_x(B) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in B; \\ 0, & \text{gdy } x \notin B. \end{cases}$$

- Dla ust. $n \in \mathbb{N}$ definiujemy:

$$q_n \colon X^{\times n} \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}\left(\mu_{x_1} + \ldots + \mu_{x_n}\right) \in \mathcal{M}.$$

- $\mathcal{M}_n = q_n(X^{\times n})$.

Przestrzenie $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{M}_{\mathrm{F}}$

- Punktowi $x \in X$ przyporządkowywujemy miarę μ_x taką, że $\mu_x(B) = \mathbb{I}_B(x)$ dla $B \in \mathcal{B}$, tzn.

$$\mu_x(B) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in B; \\ 0, & \text{gdy } x \notin B. \end{cases}$$

- Dla ust. $n \in \mathbb{N}$ definiujemy:

$$q_n \colon X^{\times n} \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}\left(\mu_{x_1} + \ldots + \mu_{x_n}\right) \in \mathcal{M}.$$

- $\mathcal{M}_n = q_n(X^{\times n})$.
- $\mathcal{M}_n$ jest niezmiennicze dla przekształcenia indukowanego $\overline{f}_{\mathcal{M}}$,

$$\overline{f}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_n) \subset \mathcal{M}_n.$$

Przestrzenie $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{M}_{\mathsf{F}}$

- Punktowi $x \in X$ przyporządkowywujemy miarę μ_x taką, że $\mu_x(B) = \mathbb{I}_B(x)$ dla $B \in \mathcal{B}$, tzn.

$$\mu_x(B) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in B; \\ 0, & \text{gdy } x \notin B. \end{cases}$$

- Dla ust. $n \in \mathbb{N}$ definiujemy:

$$q_n \colon X^{\times n} \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}\left(\mu_{x_1} + \ldots + \mu_{x_n}\right) \in \mathcal{M}.$$

- $\mathcal{M}_n = q_n(X^{\times n})$.
- $\mathcal{M}_n$ jest niezmiennicze dla przekształcenia indukowanego $\overline{f}_{\mathcal{M}}$,

$$\overline{f}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_n) \subset \mathcal{M}_n.$$

- $\mathcal{M}_{\mathsf{F}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$.

Przestrzenie $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{M}_{\mathsf{F}}$

- Punktowi $x \in X$ przyporządkowywujemy miarę μ_x taką, że $\mu_x(B) = \mathbb{I}_B(x)$ dla $B \in \mathcal{B}$, tzn.

$$\mu_x(B) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in B; \\ 0, & \text{gdy } x \notin B. \end{cases}$$

- Dla ust. $n \in \mathbb{N}$ definiujemy:

$$q_n \colon X^{\times n} \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}(\mu_{x_1} + \ldots + \mu_{x_n}) \in \mathcal{M}.$$

- $\mathcal{M}_n = q_n(X^{\times n})$.
- $\mathcal{M}_n$ jest niezmiennicze dla przekształcenia indukowanego $\overline{f}_{\mathcal{M}}$,

$$\overline{f}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_n) \subset \mathcal{M}_n.$$

- $\mathcal{M}_{\mathsf{F}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{M}_{\mathsf{F}}$ jest gęstym i $\overline{f}_{\mathcal{M}}$-niezmienniczym podzbiorem $\mathcal{M}$.

Dygresja - semisprzężenie

Mówimy, że $f\colon X \mapsto X$ i $g\colon Y \mapsto Y$ są semisprzężone, jeżeli istnieje ciągła surjekcja $p\colon X \mapsto Y$ taka, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$p \circ f = g \circ p$$

Dygresja - semisprzężenie

Mówimy, że $f\colon X \mapsto X$ i $g\colon Y \mapsto Y$ są semisprzężone, jeżeli istnieje ciągła surjekcja $p\colon X \mapsto Y$ taka, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$p \circ f = g \circ p$$

Dygresja - semisprzężenie

Mówimy, że $f\colon X \mapsto X$ i $g\colon Y \mapsto Y$ są semisprzężone, jeżeli istnieje ciągła surjekcja $p\colon X \mapsto Y$ taka, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$p \circ f = g \circ p$$

Dygresja - semisprzężenie

Mówimy, że $f\colon X \mapsto X$ i $g\colon Y \mapsto Y$ są semisprzężone, jeżeli istnieje ciągła surjekcja $p\colon X \mapsto Y$ taka, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$p \circ f = g \circ p$$

W powyższej sytuacji mówimy, że g jest faktorem f, a f nazywamy rozszerzeniem g.

Związki między $X^{\times n}$, a $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{K}_n$

Związki między $X^{\times n}$, a $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{K}_n$

$$\begin{tikzcd}
 & X^{\times n} \arrow[dl, "q_n"'] \arrow[dr, "p_n"] & \\
\mathcal{M}_n \arrow[rr, "\mu \mapsto \operatorname{supp} \mu"'] & & \mathcal{K}_n
\end{tikzcd}$$

Związki między $X^{\times n}$, a $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{K}_n$

$$\begin{tikzcd}
 & X^{\times n} \arrow[dl, "q_n"'] \arrow[dr, "p_n"] & \\
\mathcal{M}_n \arrow[rr, "\mu \mapsto \operatorname{supp} \mu"'] & & \mathcal{K}_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^{\times n} \arrow[r, "f^{\times n}"] \arrow[d, "q_n"'] & X^{\times n} \arrow[d, "q_n"] \\
\mathcal{M}_n \arrow[r, "\overline{f}_{\mathcal{M}_n}"'] & \mathcal{M}_n
\end{tikzcd}$$

Twierdzenie

1. *Przekształcenie* $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ *jest faktorem* $f^{\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Związki między $X^{\times n}$, a $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{K}_n$

$$\begin{tikzcd}
 & X^{\times n} \arrow[dl, "q_n"'] \arrow[dr, "p_n"] & \\
\mathcal{M}_n \arrow[rr, "\mu \mapsto \operatorname{supp} \mu"'] & & \mathcal{K}_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^{\times n} \arrow[r, "f^{\times n}"] \arrow[d, "q_n"'] & X^{\times n} \arrow[d, "q_n"] \\
\mathcal{M}_n \arrow[r, "\overline{f}_{\mathcal{M}_n}"'] & \mathcal{M}_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^{\times n} \arrow[r, "f^{\times n}"] \arrow[d, "p_n"'] & X^{\times n} \arrow[d, "p_n"] \\
\mathcal{K}_n \arrow[r, "\overline{f}_{\mathcal{K}_n}"'] & \mathcal{K}_n
\end{tikzcd}$$

Twierdzenie

1. *Przekształcenie* $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ *jest faktorem* $f^{\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. *Przekształcenie* $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ *jest faktorem* $f^{\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Związki między $X^{\times n}$, a $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{K}_n$

$$\begin{tikzcd}
 & X^{\times n} \arrow[dl, "q_n"'] \arrow[dr, "p_n"] & \\
\mathcal{M}_n \arrow[rr, "\mu \mapsto \operatorname{supp} \mu"'] & & \mathcal{K}_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^{\times n} \arrow[r, "f^{\times n}"] \arrow[d, "q_n"'] & X^{\times n} \arrow[d, "q_n"] \\
\mathcal{M}_n \arrow[r, "\overline{f}_{\mathcal{M}_n}"'] & \mathcal{M}_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^{\times n} \arrow[r, "f^{\times n}"] \arrow[d, "p_n"'] & X^{\times n} \arrow[d, "p_n"] \\
\mathcal{K}_n \arrow[r, "\overline{f}_{\mathcal{K}_n}"'] & \mathcal{K}_n
\end{tikzcd}$$

Twierdzenie

1. *Przekształcenie* $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ *jest faktorem* $f^{\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. *Przekształcenie* $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ *jest faktorem* $f^{\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Wniosek

Jeżeli (P) *jest własnością* f *taką, że*

$$f \text{ ma } (P) \implies f^{\times n} \text{ ma } (P)\,(n \in \mathbb{N}) \text{ i każdy faktor } f \text{ ma } (P),$$

Związki między $X^{\times n}$, a $\mathcal{M}_n$ i $\mathcal{K}_n$

$$\begin{tikzcd}
 & X^{\times n} \arrow[dl, "q_n"'] \arrow[dr, "p_n"] & \\
\mathcal{M}_n \arrow[rr, "\mu \mapsto \operatorname{supp} \mu"'] & & \mathcal{K}_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^{\times n} \arrow[r, "f^{\times n}"] \arrow[d, "q_n"'] & X^{\times n} \arrow[d, "q_n"] \\
\mathcal{M}_n \arrow[r, "\overline{f}_{\mathcal{M}_n}"'] & \mathcal{M}_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X^{\times n} \arrow[r, "f^{\times n}"] \arrow[d, "p_n"'] & X^{\times n} \arrow[d, "p_n"] \\
\mathcal{K}_n \arrow[r, "\overline{f}_{\mathcal{K}_n}"'] & \mathcal{K}_n
\end{tikzcd}$$

Twierdzenie

1. *Przekształcenie* $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ *jest faktorem* $f^{\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. *Przekształcenie* $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ *jest faktorem* $f^{\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Wniosek

Jeżeli (P) *jest własnością* f *taką, że*

$$f \text{ ma } (P) \implies f^{\times n} \text{ ma } (P)\,(n \in \mathbb{N}) \text{ i każdy faktor } f \text{ ma } (P),$$

to $\quad f \text{ ma } (P) \implies \overline{f}_{\mathcal{M}} \text{ i } \overline{f}_{\mathcal{K}} \text{ mają } (P) \qquad (n \in \mathbb{N}).$

Związki między $f^{\times n}$, a $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$

Przykład

Własności (P) takie, że

$$f \text{ ma } (P) \implies f^{\times n} \text{ ma } (P) \text{ i każdy faktor } f \text{ ma } (P),$$

Związki między $f^{\times n}$, a $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$

Przykład

Własności (P) takie, że

$$f \text{ ma } (P) \implies f^{\times n} \text{ ma } (P) \text{ i każdy faktor } f \text{ ma } (P),$$

to na przykład:

Związki między $f^{\times n}$, a $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$

Przykład

Własności (P) takie, że

$$f \text{ ma } (P) \implies f^{\times n} \text{ ma } (P) \text{ i każdy faktor } f \text{ ma } (P),$$

to na przykład: gęsty zbiór punktów okresowych,

Związki między $f^{\times n}$, a $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$

Przykład

Własności (P) takie, że

$$f \text{ ma } (P) \implies f^{\times n} \text{ ma } (P) \text{ i każdy faktor } f \text{ ma } (P),$$

to na przykład: gęsty zbiór punktów okresowych, (słabe) mieszanie,

Związki między $f^{\times n}$, a $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$

Przykład

Własności (P) takie, że

$$f \text{ ma } (P) \implies f^{\times n} \text{ ma } (P) \text{ i każdy faktor } f \text{ ma } (P),$$

to na przykład: gęsty zbiór punktów okresowych, (słabe) mieszanie, dokładność,

Związki między $f^{\times n}$, a $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$

Przykład

Własności (P) takie, że

$$f \text{ ma } (P) \implies f^{\times n} \text{ ma } (P) \text{ i każdy faktor } f \text{ ma } (P),$$

to na przykład: gęsty zbiór punktów okresowych, (słabe) mieszanie, dokładność, (ale nie tranzytywność!)...

Związki między $f^{\times n}$, a $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$

Przykład

Własności (P) takie, że

$$f \text{ ma } (P) \implies f^{\times n} \text{ ma } (P) \text{ i każdy faktor } f \text{ ma } (P),$$

to na przykład: gęsty zbiór punktów okresowych, (słabe) mieszanie, dokładność, (ale nie tranzytywność!)...

Wniosek

Zatem wszystkie wyżej wymienione własności (P) przenoszą się z f na $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Wniosek (Entropia topologiczna $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$)

$$h(\overline{f}_{\mathcal{M}_n}) = h(\overline{f}_{\mathcal{K}_n}) = h(f^{\times n}) = n \cdot h(f).$$

$f \implies \overline{f}_{\mathcal{K}}, \overline{f}_{\mathcal{M}}$

$$(P) \in \{\text{(słabo) mieszające, dokładne, } \mathrm{Per}\,\text{jest gęsty}\}$$

$f \implies \overline{f}_{\mathcal{K}}, \overline{f}_{\mathcal{M}}$

$$(P) \in \{\text{(słabo) mieszające, dokładne, Per jest gęsty}\}$$

- f ma $(P) \implies$

$f \implies \overline{f}_{\mathcal{K}}, \overline{f}_{\mathcal{M}}$

$$(P) \in \{\text{(słabo) mieszające, dokładne, Per jest gęsty}\}$$

- f ma $(P) \implies$
- $f^{\times n}$ ma $(P) \implies$

$f \implies \overline{f}_{\mathcal{K}}, \overline{f}_{\mathcal{M}}$

$$(P) \in \{\text{(słabo) mieszające, dokładne, Per jest gęsty}\}$$

- f ma $(P) \implies$
- $f^{\times n}$ ma $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ mają $(P) \implies$

$f \implies \overline{f}_{\mathcal{K}}, \overline{f}_{\mathcal{M}}$

$$(P) \in \{\text{(słabo) mieszające, dokładne, Per jest gęsty}\}$$

- f ma $(P) \implies$
- $f^{\times n}$ ma $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ mają $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_{\mathrm{F}}}$ mają (P).

$f \implies \overline{f}_{\mathcal{K}}, \overline{f}_{\mathcal{M}}$

$$(P) \in \{\text{(słabo) mieszające, dokładne, Per jest gęsty}\}$$

- f ma $(P) \implies$
- $f^{\times n}$ ma $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ mają $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_{\mathrm{F}}}$ mają (P).

Twierdzenie

Załóżmy, że $Y \subset X$ gęsty i $f(Y) \subset Y$. Wówczas:

$f \implies \overline{f}_{\mathcal{K}}, \overline{f}_{\mathcal{M}}$

$$(P) \in \{\text{(słabo) mieszające, dokładne, Per jest gęsty}\}$$

- f ma $(P) \implies$
- $f^{\times n}$ ma $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ mają $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_{\mathrm{F}}}$ mają (P).

Twierdzenie

Załóżmy, że $Y \subset X$ gęsty i $f(Y) \subset Y$. Wówczas:

1. *Jeżeli $f|_Y$ ma gęsty zbiór punktów okresowych/jest dokładne, to f ma gęsty zbiór punktów okresowych/jest dokładne.*

$f \implies \overline{f}_{\mathcal{K}}, \overline{f}_{\mathcal{M}}$

$$(P) \in \{\text{(słabo) mieszające, dokładne, Per jest gęsty}\}$$

- f ma $(P) \implies$
- $f^{\times n}$ ma $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ mają $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_{\mathrm{F}}}$ mają (P).

Twierdzenie

Załóżmy, że $Y \subset X$ gęsty i $f(Y) \subset Y$. Wówczas:

1. *Jeżeli $f|_Y$ ma gęsty zbiór punktów okresowych/jest dokładne, to f ma gęsty zbiór punktów okresowych/jest dokładne.*
2. *f jest (słabo) mieszające wtw, gdy $f|_Y$ (słabo) mieszające.*

$f \implies \overline{f}_{\mathcal{K}}, \overline{f}_{\mathcal{M}}$

$$(P) \in \{\text{(słabo) mieszające, dokładne, Per jest gęsty}\}$$

- f ma $(P) \implies$
- $f^{\times n}$ ma $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ mają $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_{\mathrm{F}}}$ mają (P).

Twierdzenie

Załóżmy, że $Y \subset X$ gęsty i $f(Y) \subset Y$. Wówczas:

1. *Jeżeli $f|_Y$ ma gęsty zbiór punktów okresowych/jest dokładne, to f ma gęsty zbiór punktów okresowych/jest dokładne.*
2. *f jest (słabo) mieszające wtw, gdy $f|_Y$ (słabo) mieszające.*
3. *f jest tranzytywne wtw, gdy $f|_Y$ tranzytywne.*

$f \implies \overline{f}_{\mathcal{K}}, \overline{f}_{\mathcal{M}}$

$$(P) \in \{\text{(słabo) mieszające, dokładne, Per jest gęsty}\}$$

- f ma $(P) \implies$
- $f^{\times n}$ ma $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_n}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ mają $(P) \implies$
- $\overline{f}_{\mathcal{M}_{\mathrm{F}}}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}_{\mathrm{F}}}$ mają (P).

Twierdzenie

Załóżmy, że $Y \subset X$ gęsty i $f(Y) \subset Y$. Wówczas:

1. *Jeżeli $f|_Y$ ma gęsty zbiór punktów okresowych/jest dokładne, to f ma gęsty zbiór punktów okresowych/jest dokładne.*
2. *f jest (słabo) mieszające wtw, gdy $f|_Y$ (słabo) mieszające.*
3. *f jest tranzytywne wtw, gdy $f|_Y$ tranzytywne.*

Wniosek

f ma $(P) \implies \overline{f}_{\mathcal{M}}$ i $\overline{f}_{\mathcal{K}}$ mają (P).

Entropia topologiczna przekształceń indukowanych

Twierdzenie

Jeżeli $h(f) > 0$, *to* $h(\overline{f}_{\mathcal{M}}) = h(\overline{f}_{\mathcal{K}}) = \infty$.

Twierdzenie (Glasner & Weiss)

Jeżeli $h(f) = 0$, *to* $h(\overline{f}_{\mathcal{M}}) = 0$.

Twierdzenie (...)

Istnieje $f : X \mapsto X$ *takie, że* $h(f) = 0$ *i* $h(\overline{f}_{\mathcal{K}}) > 0$.

I jeszcze jedna definicja chaosu...

Definicja (Chaos w sensie Devaney'a)

Funkcja $f : X \mapsto X$ jest *chaotyczna w sensie Devaney'a* jeżeli:

I jeszcze jedna definicja chaosu...

Definicja (Chaos w sensie Devaney'a)

Funkcja $f : X \mapsto X$ jest *chaotyczna w sensie Devaney'a* jeżeli:

(D1) f jest *topologicznie tranzytywne,* tzn. dla każdej pary niepustych zbiorów otwartych $U, V \subset X$ istnieje takie $n > 0$, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$;

I jeszcze jedna definicja chaosu...

Definicja (Chaos w sensie Devaney'a)

Funkcja $f : X \mapsto X$ jest *chaotyczna w sensie Devaney'a* jeżeli:

(D1) f jest *topologicznie tranzytywne*, tzn. dla każdej pary niepustych zbiorów otwartych $U, V \subset X$ istnieje takie $n > 0$, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$;

(D2) zbiór punktów okresowych odwzorowania f, tj. zbiór

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \text{ dla pewnego } n > 0\}$$

jest gęstym podzbiorem przestrzeni X.

I jeszcze jedna definicja chaosu...

Definicja (Chaos w sensie Devaney'a)

Funkcja $f : X \mapsto X$ jest *chaotyczna w sensie Devaney'a* jeżeli:

(D1) f jest *topologicznie tranzytywne*, tzn. dla każdej pary niepustych zbiorów otwartych $U, V \subset X$ istnieje takie $n > 0$, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$;

(D2) zbiór punktów okresowych odwzorowania f, tj. zbiór

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in X : f^n(x) = x \text{ dla pewnego } n > 0\}$$

jest gęstym podzbiorem przestrzeni X.

Twierdzenie

$(D1)$ *i* $(D2)$ $\implies$ *wrażliwość na warunki początkowe tzn. istnieje* $\delta > 0$ *takie, że dla każdego* $x \in X$ *i* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $y \in X$ *takie, że* $d(x, y) < \varepsilon$ *i* $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ *dla pewnego* $n > 0$.

Porównywanie definicji chaosu

Pytanie

Jaki jest związek między chaosem w sensie Devaney'a a chaosem topologicznym (entropią)?

Porównywanie definicji chaosu

Pytanie

Jaki jest związek między chaosem w sensie Devaney'a a chaosem topologicznym (entropią)?

To samo pytanie w trochę innej wersji brzmi:

Porównywanie definicji chaosu

Pytanie

Jaki jest związek między chaosem w sensie Devaney'a a chaosem topologicznym (entropią)?

To samo pytanie w trochę innej wersji brzmi:

Pytanie (w pewnym sensie rachunkowe)

Ile wynosi $I^D(X)$ dla danej przestrzeni X, gdzie

$$I^D(X) = \inf\{h(f) | f\colon X \mapsto X \text{ chaotyczne w sensie Devaney'a}\}?$$

Porównywanie definicji chaosu

Pytanie

Jaki jest związek między chaosem w sensie Devaney'a a chaosem topologicznym (entropią)?

To samo pytanie w trochę innej wersji brzmi:

Pytanie (w pewnym sensie rachunkowe)

Ile wynosi $I^D(X)$ dla danej przestrzeni X, gdzie

$$I^D(X) = \inf\{h(f) | f\colon X \mapsto X \text{ chaotyczne w sensie Devaney'a}\}?$$

Co wiadomo?

Porównywanie definicji chaosu

Pytanie

Jaki jest związek między chaosem w sensie Devaney'a a chaosem topologicznym (entropią)?

To samo pytanie w trochę innej wersji brzmi:

Pytanie (w pewnym sensie rachunkowe)

Ile wynosi $I^D(X)$ dla danej przestrzeni X, gdzie

$$I^D(X) = \inf\{h(f) | f\colon X \mapsto X \text{ chaotyczne w sensie Devaney'a}\}?$$

Co wiadomo?

- Dla odcinka $[0,1]$ mamy $I^D([0,1]) = \frac{1}{2}\log 2$.

Porównywanie definicji chaosu

Pytanie

Jaki jest związek między chaosem w sensie Devaney'a a chaosem topologicznym (entropią)?

To samo pytanie w trochę innej wersji brzmi:

Pytanie (w pewnym sensie rachunkowe)

Ile wynosi $I^D(X)$ dla danej przestrzeni X, gdzie

$$I^D(X) = \inf\{h(f) | f\colon X \mapsto X \text{ chaotyczne w sensie Devaney'a}\}?$$

Co wiadomo?

- Dla odcinka $[0,1]$ mamy $I^D([0,1]) = \frac{1}{2}\log 2$.
- Dla okręgu $\mathbb{S}^1$ mamy $I^D(\mathbb{S}^1) = 0$.

Porównywanie definicji chaosu

Pytanie

Jaki jest związek między chaosem w sensie Devaney'a a chaosem topologicznym (entropią)?

To samo pytanie w trochę innej wersji brzmi:

Pytanie (w pewnym sensie rachunkowe)

Ile wynosi $I^D(X)$ dla danej przestrzeni X, gdzie

$$I^D(X) = \inf\{h(f) | f\colon X \mapsto X \text{ chaotyczne w sensie Devaney'a}\}?$$

Co wiadomo?

- Dla odcinka $[0,1]$ mamy $I^D([0,1]) = \frac{1}{2}\log 2$.
- Dla okręgu $\mathbb{S}^1$ mamy $I^D(\mathbb{S}^1) = 0$.
- Jeżeli X jest rozmaitością i $\dim X > 1$, to $I^D(X) =???$ [F.Balibrea, L. Snoha]

Zastosowanie przekształceń indukowanych

Zastosowanie przekształceń indukowanych

- Wiemy, że $h(\overline{f}_{\mathcal{K}_n}) = h(f^{\times n}) = n \cdot h(f)$ i jeżeli f dokładne z gęstym zbiorem $\mathrm{Per}(f)$, to $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ dokładne z gęstym zbiorem $\mathrm{Per}(\overline{f}_{\mathcal{K}_n})$.

Zastosowanie przekształceń indukowanych

- Wiemy, że $h(\overline{f}_{\mathcal{K}_n}) = h(f^{\times n}) = n \cdot h(f)$ i jeżeli f dokładne z gęstym zbiorem $\mathrm{Per}(f)$, to $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ dokładne z gęstym zbiorem $\mathrm{Per}(\overline{f}_{\mathcal{K}_n})$.
- Dokładny chaos (= dokładność + gestość okresowych) $\Longrightarrow$ chaos Devaney'a.

Zastosowanie przekształceń indukowanych

- Wiemy, że $h(\overline{f}_{\mathcal{K}_n}) = h(f^{\times n}) = n \cdot h(f)$ i jeżeli f dokładne z gęstym zbiorem $\mathrm{Per}(f)$, to $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ dokładne z gęstym zbiorem $\mathrm{Per}(\overline{f}_{\mathcal{K}_n})$.
- Dokładny chaos (= dokładność + gestość okresowych) $\Longrightarrow$ chaos Devaney'a.

$$I^{ED}(X) = \inf\{h(f) | f : X \mapsto X \text{dokładnie chaotyczne }\}.$$

Zastosowanie przekształceń indukowanych

- Wiemy, że $h(\overline{f}_{\mathcal{K}_n}) = h(f^{\times n}) = n \cdot h(f)$ i jeżeli f dokładne z gęstym zbiorem $\mathrm{Per}(f)$, to $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ dokładne z gęstym zbiorem $\mathrm{Per}(\overline{f}_{\mathcal{K}_n})$.
- Dokładny chaos (= dokładność + gestość okresowych) $\Longrightarrow$ chaos Devaney'a.

$$I^{ED}(X) = \inf\{h(f) | f : X \mapsto X \text{dokładnie chaotyczne }\}.$$

- $I^{D}(X) \leqslant I^{ED}(X)$.

Zastosowanie przekształceń indukowanych

- Wiemy, że $h(\overline{f}_{\mathcal{K}_n}) = h(f^{\times n}) = n \cdot h(f)$ i jeżeli f dokładne z gęstym zbiorem $\mathrm{Per}(f)$, to $\overline{f}_{\mathcal{K}_n}$ dokładne z gęstym zbiorem $\mathrm{Per}(\overline{f}_{\mathcal{K}_n})$.
- Dokładny chaos (= dokładność + gestość okresowych) $\Longrightarrow$ chaos Devaney'a.

$$I^{ED}(X) = \inf\{h(f) | f\colon X \mapsto X \text{dokładnie chaotyczne }\}.$$

- $I^{D}(X) \leqslant I^{ED}(X)$.

Twierdzenie

Jeżeli $I^{ED}(X) = 0$, *to* $I^{ED}(\mathcal{K}_n) = I^{D}(\mathcal{K}_n) = 0$ *dla każdego* $n \geqslant 1$.

Co dalej?

Dla jakich przestrzeni X zachodzi

$$I^{ED}(X) = 0?$$

Najprostszy przykład okrąg $\mathbb{S}^1$...

Co dalej?

Dla jakich przestrzeni X zachodzi

$$I^{ED}(X) = 0?$$

Najprostszy przykład okrąg $\mathbb{S}^1$...

Twierdzenie (M. Misiurewicz & D.K.)

$I^{ED}(\mathbb{S}^1) = 0$, czyli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje dokładnie chaotyczna funkcja $f : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$ taka, że $0 < h(f) < \varepsilon$.

Iloczyny symetryczne okręgu

Wiemy już, że $I^{ED}(\mathbb{S}^1) = 0$, zatem dla każdego n mamy $I^{ED}((\mathbb{S}^1)^{*n}) = 0$. Ale co to jest $(\mathbb{S}^1)^{*n}$?

Twierdzenie (K. Borsuk, S. Ulam?)

$(\mathbb{S}^1)^{*2} =$

Iloczyny symetryczne okręgu

Wiemy już, że $I^{ED}(\mathbb{S}^1) = 0$, zatem dla każdego n mamy $I^{ED}((\mathbb{S}^1)^{*n}) = 0$. Ale co to jest $(\mathbb{S}^1)^{*n}$?

Twierdzenie (K. Borsuk, S. Ulam?)

$(\mathbb{S}^1)^{*2} = \mathbb{M}$, $\mathbb{M}$ - *wstęga Moebiusa.*

Iloczyny symetryczne okręgu

Wiemy już, że $I^{ED}(\mathbb{S}^1) = 0$, zatem dla każdego n mamy $I^{ED}((\mathbb{S}^1)^{*n}) = 0$. Ale co to jest $(\mathbb{S}^1)^{*n}$?

Twierdzenie (K. Borsuk, S. Ulam?)

$(\mathbb{S}^1)^{*2} = \mathbb{M}$, $\mathbb{M}$ - *wstęga Moebiusa.*

Twierdzenie (R. Bott)

$(\mathbb{S}^1)^{*3} =$

Iloczyny symetryczne okręgu

Wiemy już, że $I^{ED}(\mathbb{S}^1) = 0$, zatem dla każdego n mamy $I^{ED}((\mathbb{S}^1)^{*n}) = 0$. Ale co to jest $(\mathbb{S}^1)^{*n}$?

Twierdzenie (K. Borsuk, S. Ulam?)

$(\mathbb{S}^1)^{*2} = \mathbb{M}$, $\mathbb{M}$ - *wstęga Moebiusa.*

Twierdzenie (R. Bott)

$(\mathbb{S}^1)^{*3} = \mathbb{S}^3$.

Iloczyny symetryczne okręgu

Wiemy już, że $I^{ED}(\mathbb{S}^1) = 0$, zatem dla każdego n mamy $I^{ED}((\mathbb{S}^1)^{*n}) = 0$. Ale co to jest $(\mathbb{S}^1)^{*n}$?

Twierdzenie (K. Borsuk, S. Ulam?)

$(\mathbb{S}^1)^{*2} = \mathbb{M}$, $\mathbb{M}$ - *wstęga Moebiusa.*

Twierdzenie (R. Bott)

$(\mathbb{S}^1)^{*3} = \mathbb{S}^3$.

Wniosek

$I^{ED}(\mathbb{M}) = I^{ED}(\mathbb{S}^3) = 0$, *co więcej* $I^{ED}(\mathbb{P}^2) = 0$ *i* $I^{D}(\mathbb{K}) = 0$, *gdzie* $\mathbb{P}^2$ *płaszczyzna rzutowa,* $\mathbb{K}$ *butelka Kleina.*