Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
"Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина"

На правах рукописи

УДК 517.938

Жешутко Зузанна

УСТОЙЧИВОСТЬ И СИЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА И СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Василий Афанасьевич Главан

Брест, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Z	— множество натуральных чисел;
R	— множество действительных чисел;
R^m	— действительное m–мерное пространство;
${}^C R^n$	— комплексификация веществ. линейного простр. R^n;
${}^C A$	— комплексификация веществ. линейного оператора A;
C	— множество комплексных чисел;
C^{m^*}	— сопряжение пространства C^m
I_n	— единичная матрица размерности n;
$tr(A)$	— след матрицы A;
$C(A)$	— централизатор матрицы A, т.е. множество матриц коммутирующих с оператором A;
$\mathcal{A}$	— кортеж матриц $\{A_1, \ldots, A_m\}$;
$\sigma(\mathcal{A})$	— общий спектр кортежа $\mathcal{A}$;
$\mathrm{lin}\{A, \ldots\}$	— линейное пространство операторов, порождённое $A, \ldots$;
$sp(2n, R)$	— алгебра Ли матриц Гамильтона;
$Sp(2n, R)$	— симплектическая группа, т.е. множество всех симплектических преобразований пространства R^{2n};
$O(2n)$	— ортогональная группа, т.е. множ. всех линейных преобр. пр. R^{2n}, сохраняющих структуру Евклида;
$Gl(n, C)$	— комплексная линейная группа, т.е. множ. всех лин. преобр. пр. R^{2n}, сохраняющих комплексную структуру;
$U(n)$	— унитарная группа, т.е. множ. всех лин. преобр. пр. R^{2n}, сохраняющих скалярное произведение Эрмита;
$\|\cdot\|$	— норма элемента;
$\oplus$	— прямая сумма линейных пространств;
$(\cdot, \cdot)$	— стандартное скалярное произведение;
$[\cdot, \cdot]$	— симплектическое внутреннее произведение векторов;
$\omega(\cdot, \cdot)$	— невырожденная кососимметрическая билинейная форма;
E	— действительное конечномерное нормированное векторное пространство;
F	— действительное или комплексное конечномерное нормированное векторное пространство;
$L(E, F)$	— множество линейных ограниченных операторов пространства E в пространство F.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа относится к качественной теории дифференциальных уравнений и посвящена изучению свойств устойчивости решений линейных вполне разрешимых гамильтоновых дифференциальных и симплектических разностных уравнений. Тематика рассматриваемых в ней вопросов находится на стыке теории дифференциальных уравнений, классической механики и симплектической геометрии. Она примыкает к исследованиям посвященным развитию и обобщению классической теории параметрического резонанса – явления, впервые исследованного в работах П.Л.Капицы [15] в пятидесятых годах прошлого столетия. Строгому математическому обоснованию явления параметрического резонанса посвящено много работ, из которых следует выделить пионерскую работу М.Г.Крейна о сильной устойчивости линейных систем Гамильтона со многими степенями свободы. Дальнейншее свое развитие эта теория получила в работах И.М.Гельфанда и В.Б.Лидского [9], Р.Кушмана и А.Келли [39], М.Леви [60], Н.Н.Нехорошева, С.Ю.Доброхотова и А.Б.Валиньо [3], В.И.Арнольда и А.Б.Гивенталя [2], М.Вуйтковского [83] и других.

Настоящая работа представляет собой попытку распространения метод и результатов теории устойчивости и сильной устойчивости линейных обыкновенных систем дифференциальных и разностных гамильтоновых систем на случай линейных симплектических действий коммутативных групп R^m и Z^m. Действия последних, как правило, порождены линейными вполне разрешимыми дифференциальными и разностными уравнениями.

Одним из главных препятствий, стоящих на пути таких обобщений – это классическая нерешенная задача об одновременной приводимости к "нормальной форме" конечного семейства линейных отображений в конечномерном пространстве, наподобии теории нормальной формы Жордана для одной матрицы, или нормальной формы Вильямсона квадратичных гамильтонианов и соответствующих им гамильтоновых матриц. Хотя для семейств попарно коммутирующих линейных операторов имеется довольно хорошо разработанная "многопараметрическая" спектральная теория, теории "одновременной приводимости к нормальной форме" даже в этом, коммутивном, случае нет и, по – видимому, такая задача неразрешима (И.М.Гельфанд, В.А.Пономарев [10]).

Заметим также, что конкретная автономная линейная гамильтонова

система с многомерным временем обычно порождена некоторым кортежем матриц Гамильтона. Поэтому для практического приложения полученных теоретических результатов к конкретным примерам кажется полезной возможность приведения данного кортежа к простейшему виду. В работе приведено несколько результатов, которые позволяют привести к вещественной диагональной форме, некоторые полиоператоры Гамильтона размерности 2×2 и 4×4. Получены также аналогические результаты для кортежей симплектических матриц.

Для проверки доказательств лемм касающихся нормальных форм полиоператоров, а также для применения теорем о сильной устойчивости к конкретным примерам, использована компьютерная система алгебраических вычислений *Mathematica*.

В последнее время в связи с некоторыми задачами физики возникли так называемые бигамильтоновы системы дифференциальных уравнений. Л.М.Лерман и Я.Л.Уманский [59] дали классификацию точек равновесия для бигамильтоновых систем в размерности четыре. Они определяют также понятия структурной устойчивости линейных действий Пуассона (ЛДП). В связи с этим естественным является вопрос об условиях устойчивости и сильной устойчивости линейных систем Гамильтона с многомерным временем, или, другими словами, линейных симплектических действий абелевых групп. В данной диссертации исследуются линейные симплектические действия абелевых групп R^m и Z^m. Здесь сформулированные и доказаны некоторые критерии, обеспечивающие устойчивость и сильную устойчивость автономных систем Гамильтона, а также симплектических систем, обобщающие результаты М.Г.Крейна, Р.Кушмана и А.Келли, М.Леви и М.Вуйтковского на случай многомерного времени.

В то же время для систем с квазипериодическими коэффициентами нельзя говорить о сильной устойчивости. Н.Нехорошев и А.Валиньо доказали, что сильная устойчивость линейных обыкновенных систем Гамильтона с постоянными или периодическими коэффициентами эквивалентна критерию существования комплексного ростка Маслова. Они дают также условия существования и единственности инвариантного комплексного ростка для некоторых линейных квазипериодических систем. Таким образом, задачу о существовании и единственности инвариантного комплексного ростка можно считать обобщением задачи сильной устойчивости на квазипериодический случай. В данной диссертации формулируются некоторые обобщения этих результатов на линейные автономные системы Гамильтона с многомерным временем.

ОБЩАЯ КОНЦЕПЦИЯ РАБОТЫ

Основная часть диссертационной работы состоит из трех глав и одного приложения.

Первая глава содержит десять параграфов, в которых приводятся определения и теоремы будучи основанием, "отправным пунктом" для получения результатов диссертации. Этот теоретический базис представляет собой также очерк основных этапов в развитии научной мысли по рассматриваемой в данной работе тематике. Поскольку он основан на работах многих авторов, поэтому в ним приведён и обзор литературы.

Четыре первых параграфа этой главы посвящены линейным дифференциальным уравнениям. В частности, напоминаются условия полной разрешимости этих систем, определение и условия их приводимости к системе с постоянными коэффициентами. Для линейных систем с Ω–периодическими коэффициентами приведена теорема об ее N–приводимости.

В параграфах 1.5 и 1.6, коротко обсуждены методы симплектической геометрии, а также теория параметрического резонанса в линейных периодических системах Гамильтона со многими степенями свободы, теория развитая М.Г.Крейном. В диссертации результаты касающиеся параметрического резонанса обобщены и развиты на случай линейных симплектических действий групп R^m и Z^m.

Седьмой параграф – это обзор результатов, полученных различными авторами, касающихся исследования характера устойчивости как линейной гамильтоновой системы с постоянными коэффициентами, так и линейных симплектических отображений. В диссертации эти критерии обобщены на случай многомерного времени.

В восьмом параграфе обсуждаются так называемые бигамильтоновы системы и напоминается определение линейного действия Пуассона, в качестве отображения возникающего при одновременной линеаризации в окрестности точки покоя.

Девятый параграф посвящен теории спектра линейных полиоператоров, на которой автор основал формулировку и доказательства основных свойств общего спектра семейств попарно коммутирующих гамильтоновых (и соответственно симплектических) матриц.

Последний параграф первой главы приводит известные результаты В.П.Маслова, а также Н.Н.Нехорошева и А.Б.Валиньо, выявляющие связь между устойчивостью и сильной устойчивостью линейной авто-

номной системы Гамильтона и существованием и однозначностью комплексного ростка. Некоторые обобщения этих результатов доказаны автором в третьей главе диссертации.

В начале второй (и соответственно, третьей) главы сформулированы и доказаны основные свойства общего спектра кортежа попарно коммутирующих гамильтоновых (соотв. симплектических) матриц. Доказано, что спектр полиоператора Гамильтона $\mathcal{A}$ симметрический, т.е. если собственный функционал Λ – это элемент этого спектра, то $-\Lambda$ – также принадлежит спектру. Аналогично доказано, что спектр симплектического полиоператора $\mathcal{T}$, которому принадлежит некоторой общий функционал M содержит также функционалы M^{-1}, $\bar{M}$ и $\bar{M}^{-1}$. Как для кортежей гамильтоновых, так и симплектических матриц доказывается J–ортогональность общих собственных векторов соответствующих двум различным собственным функционалам Λ и M.

Доказано также, что гамильтонов (соотв. симплектический) полиоператор, собственные функционалы которого попарно различны, приводим к диагональной форме.

Для $\mathcal{A} \in (sp(2n, R))^m$ (соотв. $\mathcal{T} \in (Sp(2n, R))^m$) размерности 2×2 найден конкретный оператор $S \in Sp(2n, R)$, приводящий полиоператор $\mathcal{A}$ (соотв. $\mathcal{T}$) к диагональному виду. Это сделано в случае, когда собственные функционалы полиоператора $\mathcal{A}$ (соотв. $\mathcal{T}$) – вещественные, а также в случае, когда они чисто мнимые.

Для чисто мнимого общего спектра получена также вещественная форма для $\mathcal{A}$ (соотв., $\mathcal{T}$). Доказательство леммы 2.1.6 (соотв. 3.2.5) показывает, каким образом можно привести полиоператор Гамильтона (соотв. симплектический) размерности 4×4 к блочно – диагональному виду.

Затем, для вещественного гамильтонова полиоператора $\mathcal{A}$ размерности $2n \times 2n$ определяется разложение линейного пространства V в прямую сумму корневых подпространств этого полиоператора и доказывается существование блочно – диагональной формы для кортежа $\mathcal{A}$ в случае, когда все его собственные функционалы обладают ненулевыми вещественными частями.

Во втором параграфе второй главы, следуя [7, 24], приведены теоремы необходимые для дальнейших исследований. Именно, напоминается условия разрешимости рассматриваемой в диссертации системы (2.1), а также приводится аналог теоремы Флоке – Ляпунова для многомерного линейного вполне разрешимого уравнения с периодическими коэффициентами.

Третий параграф второй главы касается проблемы устойчивости и

сильной устойчивости в линейных вполне разрешимых гамильтоновых системах вида (2.1). Доказано, что если эта система устойчива и существует сильно устойчивый элемент $\exp(\mathcal{A}, t_0)$ для некоторого $t_0 \in R^m$, то система (2.1) – сильно устойчива. В теореме 2.3.3 автор сводит проблему сильной устойчивости той же системы на всем фазовым пространстве к проблеме сильной устойчивости на инвариантных фазовых подпространствах.

Формулируется также обобщение известного понятия знако–определённого собственного значения, принадлежащее М.Г.Крейну, на случай собственного функционала гамильтонова полиоператора. С помощью этого понятия доказывается (см. теорему 2.3.4), что чисто мнимый и определённый общий спектр полиоператора $\mathcal{A}$ влечёт за собой сильную устойчивость дифференциальной системы (2.1).

В этой же главе сформулированы и доказаны некоторые обобщения известных критериев сильной устойчивости обыкновенных систем, принадлежащих Р.Кушману и А.Келли, а также М.Леви и М.Вуйтковскому. Именно, автор доказал, что если сумма централизаторов матриц A_j, составляющих полиоператор $\mathcal{A}$, состоит из устойчивых линейных операторов Гамильтона, то система (2.1) – сильно устойчива (теорема 2.3.5). Кроме того, если $\mathcal{A}$ – сильно устойчив то пересечение вышеуказанных централизаторов содержит только устойчивые операторы (теорема 2.3.6).

Основным результатом второй главы является теорема 2.4.1. В ней приводятся необходимые и достаточные условия сильной устойчивости линейной вполне разрешимой системы Гамильтона. В терминах метод орбит присоединённых действий группы Ли $Sp(2n, R)$ доказано, что необходимым и достаточным условием сильной устойчивости полу простого полиоператора Гамильтона $\mathcal{A}$ есть условие принадлежности всех достаточно близких к $\mathcal{A}$ кортежей $\mathcal{D}$ некоторому пространству $\mathcal{M} \cap \ker \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^*}$, которое подробно описывается в четвёртом параграфе второй главы.

В последним, пятом параграфе второй главы автор диссертации исследует связь между сильной устойчивостью линейных вполне разрешимых систем Гамильтона с многомерным временем и комплексным ростком. В теореме 2.5.1 доказано, что существование комплексного ростка влечёт за собой устойчивость системы (2.1). На оборот, если эта система устойчива и соответствующий ее полиоператор Гамильтона обладает простым общим спектром, то существует единственный комплексный росток (теорема 2.5.2). Кроме того доказательство теоремы 2.5.3 показывает, что из существования сильно устойчивого элемента следует существование и единственность комплексного ростка для системы (2.1).

Как известно, отображение за период, или оператор Пуанкаре является мощным средством для исследования дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Аналог такого оператора для систем с многомерным временем – это оператор полидромии (см. второй параграф второй главы), введённый Перовым и Задорожным [24]. Это позволяет формулировать и доказывать результаты для вполне разрешимых систем с много периодическими коэффициентами на языке семейств попарно коммутирующих операторов.

Условиям устойчивости и сильной устойчивости таких дискретных линейных вполне разрешимых систем посвящен третий параграф третьей главы. Доказанные в ним результаты аналогичные тем, доказанным в третьем параграфе второй главы. Специфика симплектической группы, а также дискретность времени порождают соответственные трудности, которые надо было преодолеть.

Теорема 3.3.2 показывает, что для устойчивости симплектического полиоператора $\mathcal{T}$ необходимо и достаточно, чтобы все его собственные функционалы лежали на единичном торе и чтобы $\mathcal{T}$ был полу простым. Как в случае гамильтонового полиоператора, так и для симплектического кортежа матриц – его устойчивость и существование некоторого сильно устойчивого элемента влекут за собой сильную устойчивость $\mathcal{T}$ (теорема 3.3.3). Возможно также (теорема 3.3.4) свести проблему сильной устойчивости симплектического полиоператора на всем пространстве к проблеме такой устойчивости на инвариантных симплектических подпространствах.

С помощью понятия знако–определённости собственного функционала симплектического полиоператора $\mathcal{T}$, доказывается критерий сильной устойчивости последнего, являющийся основным результатом третьей главы. Именно, доказано (теорема 3.3.5), что если общий спектр полиоператора $\mathcal{T}$ лежит на единичным торе и является определённым, то $\mathcal{T}$ – сильно устойчив.

В теоремах 3.3.6 и 3.3.7 формулируются и доказываются некоторые условия сильной устойчивости $\mathcal{T}$, использующие понятие общего централизатора семейства матриц. Они аналогичны теоремам 2.3.5 и 2.3.6 соответственно.

В данной диссертации, кроме вышеуказанных теоретических результатов, приведены также многочисленные примеры и контрпримеры. Поскольку кратный чисто мнимый спектр гамильтоновой матрицы возможен только в размерности четыре и выше, то построение семейств попарно коммутирующих гамильтоновых матриц является нелёгкой зада-

чей. Для преодоления этих трудностей, автор применяет Компьютерную Систему Символических Вычислений "Mathematica". Эти результаты частично использованы в доказательствах утверждений 2.3.1 и 3.3.1. Примеры связанные с теоремой 2.4.1 выделены в Приложении.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Теория устойчивости заложена в классических работах А.М.Ляпунова и А.Пуанкаре и получила дальнейшее развитие в работах Дж.Биркгоффа, А.Н.Колмогорова, В.И.Арнольда, Дж.Мозера, А.А.Андронова, Л.С.Понтрягина, М.Г.Крейна, Е.А.Барбашина и др.

Как известно, необходимым и достаточным условием устойчивости по Ляпунову линейной автономной системы дифференциальных уравнений является чисто мнимый спектр и отсутствие клеток Жордана. В случае кратных чисто мнимых собственных значений любое достаточно малое возмущение матрицы правой части системы приводит к потере устойчивости.

В силу полунепрерывности и симметрии спектра, гамильтонова матрица с чисто мнимым простым спектром удовлетворяет более строгому условию сильной устойчивости, т.е. устойчивости вместе со всеми достаточно близкими гамильтоновыми матрицами.

Как показал М.Г.Крейн линейная гамильтонова система не теряет устойчивости при возмущениях, даже если существуют кратные собственные значения, при условии, что они "определены". Это свойство наличия "безопасных резонансов" стоит на базе математического обоснования явления "параметрического резонанса", явления, открытого П.Л.Капицей ещё в сороковых годах прошлого столетия. Условия сильной устойчивости гамильтоновых систем были рассмотрены также в работах таких авторов как Р.Кушман, А.Келли, М.Леви, В.И.Арнольд и А.Б.Гивенталь, М.П.Вуйтковски.

В последнее время в связи с некоторыми задачами физики начато исследование так называемых бигамильтоновых систем, т.е. систем Гамильтона с дополнительным первым интегралом. Такие системы обычно определяют действие группы R^2. В работах Л.М.Лермана и Я.Л.Уманского исследованы такие системы на четырёхмерных многообразиях. В их работах проведена классификация особых точек таких систем, а также исследована их устойчивость, в том числе и сильная устойчивость в случае простого общего спектра линеаризации бигамильтоновой системы.

Большое количество работ последних двух десятилетий посвящено симплектическим, а также пуассоновым действиям групп Ли (В.И.Арнольд, А.Вейнстейн, Ж.Сурьо), в том числе и коммутативных.

Эти, а также многочисленные другие результаты, указывают на ак-

туальность задачи распространения теории сильной устойчивости на гамильтоновы системы с многомерным временем, в том числе и на симплектические действия групп R^m и Z^m.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Работа выполнена на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений Учреждения образования "Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина" в соответствии с планом предусмотренным республиканской программой "Математические структуры".

Цель и задачи исследования. Цель настоящей работы состоит в получении условий сильной устойчивости линейных вполне разрешимых дифференциальных систем Гамильтона с постоянными, а также периодическими коэффициентами в случае многомерного времени, а также линейных симплектических действий групп R^m и Z^m.

Для достижения цели решаются следующие задачи:
— найти необходимые и достаточные условия сильной устойчивости линейных автономных вполне разрешимых систем дифференциальных уравнений Гамильтона;
— исследовать устойчивость дискретных линейных автономных вполне разрешимых симплектических систем и линейных действий Пуассона группы Z^m;
— сформулировать и доказать критерий сильной устойчивости линейных многопериодических систем Гамильтона с многомерным временем;
— сформулировать и доказать условия существования комплексного ростка Маслова и определить его связь с условиями устойчивости линейных симплектических действий абелевых групп;
— построить нормальные формы линейных Гамильтоновых и симплектических полиоператоров в полупростом случае.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются гамильтоновы линейные системы дифференциальных уравнений с многомерным временем, а также симплектические действия группы Z^m. Предмет исследования — характер устойчивости решений этих систем.

Методология и методы проведённого исследования. В работе использованы классические методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, современные методы симплектической геометрии, а также метод орбит.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Полученные в диссертации результаты являются новыми. В работе обобщена и развита теория сильной устойчивости линейных вполне разрешимых дифференциальных и разностных систем Гамильтона с многомерным

временем и линейных симплектических действий группы Z^m.

Практическая значимость полученных результатов. Работа носит теоретический характер, её результаты развивают общую теорию многомерных линейных вполне разрешимых дифференциальных и разностных уравнений Гамильтона (в том числе с симметрией), в частности теорию сильной устойчивости таких систем. Результаты диссертации могут быть практически использованы при исследовании конкретных физических проблем описываемых системами уравнений данного типа.

Основные положения, выносимые на защиту.
— Необходимые и достаточные условия сильной устойчивости линейных автономных вполне разрешимых систем дифференциальных уравнений Гамильтона, а также линейных симплектических действий группы R^m.
— Необходимые и достаточные условия сильной устойчивости дискретных линейных автономных вполне разрешимых симплектических систем, а также линейных симплектических действий группы Z^m.
— Критерий сильной устойчивости линейных многопериодических систем Гамильтона с многомерным временем.
— Условия существования и единственности комплексного ростка Маслова и его связь с условиями устойчивости линейных симплектических действий абелевых групп.
— Спектральные характеристики, а также некоторые нормальные формы линейных Гамильтоновых и симплектических полиоператоров в полупростом случае.

Личный вклад соискателя. Результаты семи работ [11,45–50] в равной мере принадлежат обоим соавторам (В.А.Главан, З.Жешутко), а результаты пяти работ [71–75] получены лично соискателем.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на: международной математической конференции "Третьи научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям посвящённые 80-летию со дня рождения Ю.С.Богданова" (Минск, 2001); международной математической конференции "The Third International Workshop on *Mathematica* System in Teaching and Research" (Siedlce, 2001); международной математической конференции "Боголюбовские чтения V" (Каменец-Подольский, 2002); международной математической конференции "Еругинские чтения – VIII" (Брест, 2002); международной конференции посвящённой 75-летию со дня рождения академика К.С.Сибирского (Кишинев, 2003); международной математической конференции "Еругинские чтения – IX" (Витебск, 2003); международной конференции "Приложения системы "Mathematica" в социальных процес-

сах и математической физике" (Брест, 2003); международной конференции "Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике" (Брест, 2004); международной математической конференции "IX Белорусская математическая конференция" (Гродно, 2004); международной математической конференции "Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры" (Брест, 2005).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах [11, 45–50, 71–75], среди которых 3 статьи в рецензируемых научных журналах [48, 74, 75], 4 статьи в трудах международных конференций [11, 71–73], а остальные — тезисы докладов [45–47, 49, 50]. Общее количество опубликованных материалов составляет 56 страниц.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит: перечень условных обозначений, введение, общую характеристику работы, четыре главы, заключение, список использованных источников (83 наименований) и одно приложение. Полный объем диссертации 98 стр. машинописного текста, из которых 9 стр. занимает приложение, 8 стр. занимает список использованных источников.

Г Л А В А 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной главе собраны основные факты, определения и теоремы, составляющие отправной пункт для исследований, которых результаты это суть диссертации. Одновременно, поскольку этот теоретический базис, основан на работах многих авторов, здесь приведём и обзор литературы. В данной главе кратко обсудим такие проблемы как:

Линейные вполне разрешимые уравнения. [7] Здесь приведём понятия: линейное однородное уравнение,линейное неоднородное уравнение, фундаментальная система решений, фундаментальная матрица.

Линейные вполне разрешимые уравнения с постоянными коэффициентами. [7] В этим параграфе напомним условия полной разрешимости однородной линейной системы с постоянными коэффициентами и определим вид фундаментальной матрицы такой системы.

Приводимые уравнения. [7, 23, 24] Здесь приведём такие понятия как: преобразование Ляпунова, оператор Ляпунова, приводимое уравнение. Припомним также необходимые и достаточные условия приводимости вполне интегрируемых линейных однородных систем.

Представление Флоке-Ляпунова. [7] В четвёртом параграфе приведено определение периода отображения f, а также определение Ω-периодического отображения для некоторой группы периодов Ω. Расскажем о приводимости вполне интегрируемых линейных однородных систем с Ω-периодической операторной функцией в правой части уравнения.

Элементы симплектической геометрии. [1] Напомним такие, основные для данной диссертации понятия как: внешняя форма порядка 2, невырожденная 2-форма, линейная симплектическая структура, симплектическое линейное пространство, стандартная симплектическая структура, косоортогональные векторы, симплектический базис, симплектическая система координат, симплектическое преобразование, симплектическая группа. Приводим определение стандартного симплектического внутреннего произведения и симплектического базиса с использованием некоторой особенной матрицы J.

Параметрический резонанс в обыкновенных системах со многими степенями свободы. [1, 32] Данный параграф показывает, как можно применить результаты М.Г.Крейна, при изучении условий возникнове-

ния параметрического резонанса в механических системах с многими степенями свободы. Здесь рассказано о симметрии спектра симплектического преобразования, определяется понятие его устойчивости и сильной устойчивости, приводится условия обеспечивающие устойчивость и сильную устойчивость; определяется условия параметрического резонанса в линейной канонической системе с периодически изменяющейся функцией Гамильтона. Приводим также определение положительных и отрицательных собственных значений и результат М.Г.Крейна касающийся сильной устойчивости преобразования S в случае собственных значений преобразования S постоянного знака.

Устойчивость и сильная устойчивость линейной системы Гамильтона с постоянными коэффициентами и линейных симплектических преобразований. Приводим определение гамильтонового линейного преобразования и также результаты различных авторов, таких как: М.Г.Крейн [18], K.R.Meyer и G.R.Hall [66], R.Cushman и A.Kelly [39], M.Levi [60], M.P.Wójtkowski [83], касающиеся проблемы устойчивости и сильной устойчивости линейной системы Гамильтона с постоянными коэффициентами и также устойчивости и сильной устойчивости элементов симплектической группы $Sp(2n, R)$. Этой тематике посвящены также работы [13, 27, 32, 67].

Бигамильтоновы системы и линейные действия Пуассона. Приведём определение линейного действия Пуассона (ЛДП) и простого ЛДП. Опишем кратко результаты Л.М.Лермана и Я.Л.Уманского [59] и звязь этих результатов с нашими исследованиями. Многомерные динамические системы исследованы также в [76, 77].

Основные понятия теории спектра линейных полиоператоров. [7, 51, 61] Приводим определение так называемого левого (соотв. правого), а также общего спектра линейного полиоператора. Напомним понятие общего собственного вектора и понятие собственного функционала.

Комплексная структура и устойчивость линейных вещественных симплектических отображений. Комплексный росток В.П.Маслова. [1] Здесь приведём определение комплексной структуры. Припомним также связь между структурами: симплектической, Евклида, комплексной и Эрмита, или иначе говоря, связь между группами: симплектической, ортогональной, комплексной линейной и унитарной.

Напомним здесь (см. [3, 20]) определение нулевого (иначе говоря, изотропного) подпространства симплектического пространства, а также определим лагранжево подпространство. Приведём понятие знако–определённого корневого подпространства. С помощью этих понятий опре-

деляем комплексный росток линейной автономной системы Гамильтона. Расскажем кратко о результатах В.П.Маслова, и также Н.Н.Нехорошева и А.Б.Валиньо, которые выявляют связь между устойчивостью и сильной устойчивостью этой системы с существованием и однозначностью комплексного ростка.

1.1. Линейные вполне разрешимые уравнения

Изучению свойств многомерных дифференциальных уравнений, в том числе и уравнений с периодическими коэффициентами, посвящены работы [7, 21–24, 62]. На них основаны первые четыре параграфа настоящей главы.

Пусть E и F обозначают конечномерные нормированные векторные пространства, E – действительное, F – может быть и комплексным; размерность E равна m, а размерность F равна n. В исследованных в данной диссертации проблемах будем конкретно предполагать, что время является действительным и m-мерным, т.е. $E = R^m$ и что размерность фазового пространства – чётная, т.е. $F = R^{2n}$.

Линейным однородным уравнением называется уравнение вида

$$x'h = A(t)hx, \tag{1.1}$$

где h – произвольный вектор из E, а функция A определена и непрерывна в некотором открытом множестве $U \subset E$ и принимает значения из пространства $L(E; L(F; F))$. В случае рассматриваемым в данной работе имеем $A : R^m \to L(R^m, sp(2n, R))$.

Неоднородное уравнение имеет вид

$$x'h = A(t)hx + f(t)h, \tag{1.2}$$

где функция f определена и непрерывна на множестве U и принимает значения в пространстве $L(E; F)$.

Если функции A и f непрерывно дифференцируемы, то системы (1.1), (1.2) являются вполне интегрируемыми тогда и только тогда, когда

$$\wedge\{A'(t)hk - A(t)hA(t)k\} = 0, \tag{1.3}$$

$$\wedge\{A(t)hf(t)k - f'(t)hk\} = 0. \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1) и, соответственно (1.2) могут быть записаны также в координатной форме:

$$dx = A_1(t)xdt_1 + \ldots + A_m(t)xdt_m, \tag{1.5}$$

$$dx = [A_1(t)x + f_1(t)]dt_1 + \ldots + [A_m(t)x + f_m(t)]dt_m, \tag{1.6}$$

где $A_j(t)$ – матрицы размеров $n \times n$, f_j - n-вектор–функции, x – подлежащая определению n-вектор–функция.

Условия полной интегрируемости для (1.5), (1.6) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial A_i(t)}{\partial t_j} + A_i(t)A_j(t) = \frac{\partial A_j(t)}{\partial t_i} + A_j(t)A_i(t),$$

$$A_i(t)f_j(t) + \frac{\partial f_i(t)}{\partial t_j} = A_j(t)f_i(t) + \frac{\partial f_j(t)}{\partial t_i},$$

$$(i, j = 1, \ldots, m),$$

они должны выполнятся при всех $t \in U$.

Теорема 1.1.1. [7] *Если $U = E$, то всякое решение уравнений (1.1), (1.2) определено для всех $t \in E$.*

Замечание 1.1.1. Везде дальше будем предполагать, что $U = E$.

Напомним, что система n линейно независимых решений уравнения (1.1) называется фундаментальной системой решений этого уравнения. Более того, если $x_1, \ldots, x_n$ - фундаментальная система решений уравнения (1.1), то всякое решение x этого уравнения можно представить в виде

$$x(t) = c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t), \tag{1.7}$$

где $c_1, \ldots, c_n$ - скалярные величины. Путем соответствующего их выбора можно получить любое решение уравнения (1.1), поэтому выражение (1.7) называем ещё общим решением этого уравнения.

Пусть $x_j^1(t), \ldots, x_j^n(t)$ - координаты вектора $x_j(t)$ в базисе $b_1, \ldots, b_n$ пространства F, т.е.

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} x_j^i(t)b_i.$$

Матрицу

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \ldots & x_n^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix},$$

где вектор-функции $x_1, \ldots, x_n$ являются решениями уравнения, назовём матрицей Вронского (фундаментальной матрицей), если $x_1, \ldots, x_n$ - фундаментальная система решений.

Если $W(t)$ - фундаментальная матрица, а c - произвольный вектор из F, то функция $x(t) = W(t)c$ является решением уравнения (1.5); более того, каждое решение уравнения (1.5) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ представимо в виде $x(t) = W(t)c$, где $c = W^{-1}(t_0)x(t_0)$; при этом $W(t_0)$ - неособая матрица при любом $t_0 \in E$.

Отсюда следует, что каждое решение уравнения (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ можно представить в виде $x(t, t_0, x_0) = W(t)W^{-1}(t_0)x_0$, или, в других обозначениях $g^t_{t_0} = W(t)W^{-1}(t_0)$, $x(t, t_0, x_0) = g^t_{t_0}x_0$.

1.2. Линейные вполне разрешимые уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$x'h = Ahx, \quad (h \in E), \tag{1.8}$$

где $A \in L(E; L(F; F))$. Уравнение (1.8) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда при любых h, k из E имеет место равенство

$$AhAk = AkAh \tag{1.9}$$

(операторы A, удовлетворяющие условию (1.9), следуя А.И.Перову, будем называть пермутабельными).

Для координатной формы уравнения (1.8)

$$dx = A_1 x dt_1 + \ldots + A_m x dt_m, \tag{1.10}$$

или, в других обозначениях:

$$\frac{\partial x}{\partial t_j} = A_j x, \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.11}$$

условие (1.9) означает, что матрицы $A_1, \ldots, A_m$ попарно коммутативны, т.е.

$$A_i A_j = A_j A_i \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Фундаментальным оператором уравнения (1.8) является оператор $W(t)$, $W(t) = \exp(At)$, причём $W(0) = I_F$. Для уравнения (1.10) фундаментальная матрица определяется в виде экспоненты

$$W(t) = \exp(A_1 t_1 + \ldots + A_m t_m).$$

1.3. Приводимые уравнения

Рассмотрим линейное уравнение

$$x'h = A(t)hx \ (h \in E) \tag{1.12}$$

с непрерывной операторной функцией $A(t)$, определённой на E. Будем предполагать, что уравнение (1.12) является вполне интегрируемым и что каждое решение его определено для всех $t \in E$.

Среди уравнений выше указанного вида, простейшие – это уравнения с постоянными коэффициентами – их изучение сводится к алгебраической задаче нахождения собственных функционалов оператора A (см. [7]). Поэтому представляют интерес такие уравнения вида (1.12), которые можно привести к уравнениям с постоянными коэффициентами при помощи преобразований сохраняющих основные черты поведения решений. На этом пути приходим к понятию приводимого уравнения в смысле Ляпунова.

Введём в уравнение (1.12) вместо неизвестной функции x новую неизвестную функцию z при помощи преобразования

$$x = \Lambda(t)z. \tag{1.13}$$

Операторную функцию $\Lambda : E \to L(F; F)$ подчиним следующим требованиям:
1) функция Λ непрерывно дифференцируема в E,
2) функция Λ ограничена в E,
3) при любом $t \in E$ оператор $\Lambda(t)$ имеет обратный и функция $\Lambda^{-1}(t)$ ограничена в E.

Преобразование (1.13), в котором оператор $\Lambda(t)$ удовлетворяет условиям 1)–3), называется *преобразованием Ляпунова*, а соответствующий оператор $\Lambda(t)$ – *оператором Ляпунова.*

Согласно (1.12), (1.13), функция z удовлетворяет уравнению

$$z'h = \Lambda^{-1}(t)(A(t)h\Lambda(t) - \Lambda'(t)h)z = B(t)hz \ (h \in E). \tag{1.14}$$

Легко проверить, что уравнение (1.14) вполне интегрируемо. Кроме того, асимптотические свойства уравнений (1.12) и (1.14) одинаковы.

Определение 1.3.1. *Уравнение (1.12) называется приводимым, если существует такое преобразование Ляпунова (1.13), что в уравнении (1.14) операторная функция B не зависит от $t \in E$.*

Из данного определения сразу вытекает

Теорема 1.3.1. *Уравнение (1.12) приводимо тогда и только тогда, когда его фундаментальный оператор $W(t)$ может быть представлен в виде*

$$W(t) = \Lambda(t)\exp(Bt), \tag{1.15}$$

где $\Lambda(t)$ – оператор Ляпунова, а B – оператор из $L(E; L(F; F))$, удовлетворяющий равенству $BhBk = BkBh$ при любых h, k из E.

Напомним, что в случае, когда размерность пространства E больше единицы, то можно изучать вопросы поведения решений при $t \in N$, где N обозначает некоторое подпространство пространства E. При этом используются такие преобразования (1.13), которые удовлетворяют условиям (1)–(3) только для $t \in N \subset E$. Преобразование такого рода называется N-преобразованием Ляпунова, если функция $\Lambda(t)$ непрерывно дифференцируема в E, причём существует оператор обратный к $\Lambda(t)$ и для $t \in N$ выполняются условия: $\|\Lambda(t)\| \leq \alpha_1$, $\left\|\Lambda^{-1}(t)\right\| \leq \alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 = \text{const} > 0$). Соответствующий оператор $\Lambda(t)$ называется в этим случае – N-оператором Ляпунова.

Определение 1.3.2. *Уравнение (1.12) называется N-приводимым, если существует такое N-преобразование Ляпунова (1.13), что в уравнении (1.14) операторная функция B не зависит от $t \in N$.*

1.4. Представление Флоке-Ляпунова

Теория Флоке–Ляпунова получила развитие во многих работах (см., например [4–7, 14, 16, 19, 23–25, 28–30, 43, 68]). Ниже приводим факты непосредственно связанные с тематикой диссертации.

Пусть f - отображение пространства E в F (или в произвольное хаусдорфово пространство). Вектор $\omega \in E$ называется периодом отображения f, если $f(t+\omega) = f(t)$ для любого $t \in E$. Множество Ω_f всех периодов отображения f является, очевидно, подгруппой аддитивной группы пространства E. Если отображение f непрерывно, то группа Ω_f замкнута.

Определение 1.4.1. *Пусть Ω – произвольная замкнутая группа, лежащая в E и пусть f – непрерывное отображение E в F. Отображение f называется Ω-периодическим, если группа периодов этого отображения содержит Ω.*

Множество всех непрерывных отображений $f : E \to F$ с нетривиальной (т.е. отличной от нуля) группой периодов распадается на два класса,

которые в определённом смысле существенно отличаются по своим свойствам. К первому классу относятся те отображения f, линейная оболочка $\mathcal{L}(\Omega_f)$ группы периодов которых совпадает с E; такие отображения называются периодическими. Второй класс составляют отображения, для которых $\mathcal{L}(\Omega_f) \neq E$; эти отображения называются частично периодическими.

Например, если в E выбрать некоторый базис, то функции

$$\sin(t_1 - 2t_2),\ \sin(-2t_2),\ \cos(t_1 + t_2)$$

будут периодическими, а функция

$$g(t) = \sin(-t_2) + \cos(t_1 + t_2) + t_1$$

является частично периодической.

Предположим, что A – операторная Ω-периодическая функция и обозначим линейную оболочку группы Ω через $N = \mathcal{L}(\Omega)$. Следующая теорема доказана в [23, 24] (см. также [19, 43]).

Теорема 1.4.1. *Уравнение (1.12) с Ω-периодической операторной функцией A N-приводимо.*

Из доказательства данной теоремы (см. [7]) вытекает, что фундаментальный оператор $W(t)$ уравнения (1.12) с Ω-периодической функцией A может быть представлен в виде $W(t) = \Lambda(t)\exp(Bt)$, где операторная функция $\Lambda(t)$ является Ω-периодической, т.е. в случае уравнения (1.12), как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет место представление Флоке – Ляпунова.

Здесь особенно важен тот случай, когда $\mathcal{L}(\Omega) = E$, поскольку в этой ситуации с учётом результатов о свойствах операторной экспоненты (см. [7]) удаётся выяснить структуру фундаментального оператора уравнения (1.12), а значит, и структуру каждого решения этого уравнения.

1.5. Элементы симплектической геометрии

Пусть R^n обозначает вещественное линейное пространство размерности n.

Определение 1.5.1. *Внешней формой порядка* 2 *или, иначе говоря,* 2*-формой назовём функцию определённую на упорядоченных парах векторов из R^n, $\omega^2 : R^n \times R^n \to R$, которая обладает свойствами билинейности и антисимметрии, т.е. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R,\ \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in R^n$:*

$$\omega^2(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, \xi_3) = \lambda_1\omega^2(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2\omega^2(\xi_2, \xi_3),$$

$$\omega^2(\xi_1, \xi_2) = -\omega^2(\xi_2, \xi_1).$$

Определение 1.5.2. *2-форма ω^2 в R^{2n} называется невырожденной, если она удовлетворяет условию:*

$$(\forall \eta : \ \omega^2(\xi, \eta) = 0) \Rightarrow (\xi = 0).$$

Определение 1.5.3. *Невырожденную, билинейную, антисимметрическую 2-форму (так называемое кососкалярное произведение) определённую на линейном пространстве R^{2n} назовём линейной симплектической структурой в R^{2n}.*

Пара (R^{2n}, ω^2) называется симплектическим линейным пространством.

Стандартной симплектической структурой в пространстве координат $R^{2n} = \{(p, q)\}$ является невырожденная и антисимметрическая форма:

$$[\cdot, \cdot] = p_1 \wedge q_1 + \ldots + p_n \wedge q_n,$$

где функции $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ суть координаты в R^{2n}, и $\wedge$ – обозначает внешние произведение, конкретно $\forall k = 1, \ldots, n$: значением внешнего произведения $p_k \wedge q_k$ на паре векторов $\xi, \eta \in R^{2n}$ есть ориентированное поле параллелограмма, стороны которого – это ξ и η, в плоскости p_k, q_k; иначе говоря, ориентированное поле проекции параллелограмма (ξ, η) на плоскость координат (p_k, q_k):

$$(p_k \wedge q_k)(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} p_k(\xi) & q_k(\xi) \\ p_k(\eta) & q_k(\eta) \end{vmatrix}.$$

В дальнейших рассуждениях будем принимать форму ω^2 за кососкалярное произведение:

$$[\xi, \eta] = \omega^2(\xi, \eta).$$

Если $[\xi, \eta] = 0$, то векторы ξ, η симплектического пространства назовём косоортогональными. Множество всех векторов косоортогональных к данному вектору η, назовём косоортогональным дополнением вектора η. Оказывается, что симплектическая структура принимает выше описанный, стандартный вид, при подходящим выборе базиса, именно в так называемым симплектическим базисе.

Определение 1.5.4. *Систему векторов e_{p_i}, e_{q_i}, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющую условиям:*

$$[e_{p_i}, e_{p_j}] = [e_{p_i}, e_{q_j}] = [e_{q_i}, e_{q_j}] = 0, \ [e_{p_i}, e_{q_i}] = 1,$$

назовём симплектическим базисом.

Следующая теорема принадлежит Дарбу.

Теорема 1.5.1. *В каждым симплектическим пространстве существует симплектический базис.*

Более того:

Предложение 1.5.1. *Все симплектические пространства одной и той же размерности – изоморфны.*

Примем в качестве векторов симплектического базиса – версоры координатных осей. Полученная система координат p_i, q_i, в которой 2-форма ω^2 принимает стандартный вид

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = p_1 \wedge q_1 + \ldots + p_n \wedge q_n,$$

называется симплектической системой координат.

Определение 1.5.5. *Линейное отображение $S : R^{2n} \to R^{2n}$ симплектического пространства R^{2n} в себя, которое сохраняет кососкалярное произведение*

$$\forall \xi, \eta \in R^{2n} : [S\xi, S\eta] = [\xi, \eta],$$

назовём симплектическим преобразованием. Множество всех симплектических преобразований пространства R^{2n} называется симплектической группой и обозначается через $Sp(2n, R)$.

1.6. Параметрический резонанс в обыкновенных системах со многими степенями свободы

Как показано в [1] появление параметрического резонанса в линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с периодически изменяющимися параметрами $\ddot{x} + \omega(t)x = 0$ зависит от следа матрицы A так называемого отображения за период.

Поскольку характеристическое уравнение этой матрицы принимает вид

$$\lambda^2 - \lambda \mathrm{tr} A + 1 = 0,$$

то ее характеристические числа удовлетворяют условиям:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr} A, \ \lambda_1 \lambda_2 = \det A = 1.$$

Если $|\mathrm{tr} A| > 2$, то эти корни – вещественные. Более того, один из них имеет значение (по модулю) больше, а второй – меньше единицы. В

таким случае, преобразование A является гиперболическим поворотом и оно неустойчиво.

Вместо этого, если $|\mathrm{tr}A| < 2$, то характеристическое уравнение обладает двумя сопряжёнными комплексными корнями, то есть

$$1 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\overline{\lambda_2} = |\lambda_1|^2 .$$

Отсюда следует, что λ_1 и λ_2 лежат на единичной окружности и отображение A эквивалентно вращению на угол α, где $\lambda_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm i\alpha}$. Следовательно оно устойчиво.

Выше указанные рассуждения можно суммировать следующим образом:

Следствие 1.6.1. *Положение равновесия двумерной линейной системы уравнений с периодически меняющимися параметрами являются устойчивыми, если собственные значения отображения за период лежат на единичной окружности, и неустойчивыми, если по крайней мере одно из собственных значений больше единицы.*

Отображение за период A, служащее изучению параметрического резонанса в системах с одной степенью свободы, является симплектическим преобразованием. Эти результаты можно применять также при изучении условий возникновения параметрического резонанса в механических системах со многими степенями свободы.

Доказательство следующей теоремы можно найти в [1].

Теорема 1.6.1. *Пусть $S : R^{2n} \to R^{2n}$ будет линейным преобразованием симплектического пространства, которому в симплектических координатах $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ соответствует матрица S. Такое преобразование S является симплектическим тогда и только тогда, когда его матрица в симплектических координатах удовлетворяет равенству*

$$S^T J S = J,$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, а S^T обозначает матрицу транспонированную к матрицы S.

Характеристическая черта симплектического преобразования – это симметрия его спектра, а именно:

Теорема 1.6.2. *Характеристический полином симплектического преобразования*

$$p(\lambda) = \det[S - \lambda I]$$

является возвратным (т.е. у него симметрические коэффициенты), то есть $p(\lambda) = \lambda^{2n} p(1/\lambda)$.

Отсюда следует

Следствие 1.6.2. *Если* λ *– это собственное значение симплектического преобразования, то* $1/\lambda$ *также является его собственным числом.*

Кроме того, характеристический полином имеет вещественные коэффициенты, таким образом если λ является комплексным собственным значением, то $\bar{\lambda} \neq \lambda$ – это также собственное значение. Следовательно все корни λ характеристического полинома расположены симметрично относительно вещественной оси, а также относительно единичной окружности.

Теорема 1.6.3. *Если все собственные значения линейного преобразования* S *попарно различные и если они лежат на единичной окружности, то это преобразование – устойчиво.*

Определение 1.6.1. *Назовём преобразование* S' *достаточно близким преобразовании* S*, если разности элементов матрицы* S' *в установленном базисе и элементов матрицы* S *в том же базисе, по модулю, не превышают достаточно малого числа* ε.

Определение 1.6.2. *Симплектическое преобразование* S *назовём сильно устойчивым, если все достаточно близкие преобразовании* S *симплектические отображения являются устойчивыми.*

В случае преобразования $S : R^2 \to R^2$ сильная устойчивость имеет место в случае, когда $\lambda_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm i\alpha}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В многомерном случае имеет место:

Теорема 1.6.4. *Если собственные значения симплектического преобразования* S *попарно различны и лежат на единичной окружности, то это преобразование является сильно устойчивым.*

Следствие 1.6.3. *Параметрический резонанс в линейной канонической системе с периодически изменяющейся функцией Гамильтона может возникнуть только при столкновении собственных значений на единичной окружности. Собственное значение* λ *может в этом случае опустить окружность и тогда симплектическое преобразование перестаёт быть устойчивым.*

Оказывается, что хотя так может случиться, но не всегда так и есть. Если мы разделим собственные значения λ, $|\lambda| = 1$, на два класса так называемых положительных и отрицательных собственных значений, то оказывается, что при столкновении корней разных знаков, они обычно опускают единичную окружность. При столкновении двух корней одинакового знака, они не сходят с единичной окружности.

Следуя [1], сформулируем основные результаты М.Г.Крейна, касающиеся этого явления.

Лемма 1.6.1. *Если λ, $\bar{\lambda}$ – простые собственные значения симплектического преобразования S, такие, что $|\lambda| = 1$, то соответствующая им инвариантная плоскость π_λ является ненулевой.*

Определение 1.6.3. *Пусть ξ – вещественный вектор плоскости π_λ такой, что $\mathrm{Im}\lambda > 0$, $|\lambda| = 1$. Если $[S\xi, \xi] > 0$ (соответственно $[S\xi, \xi] < 0$), то собственное значение λ назовём положительным (соответственно отрицательным).*

Определение 1.6.4. *Пусть λ – лежащее на единичной окружности собственное значение кратности k. Говорим, что это значение постоянного знака, если ограничение квадратичной формы $[S\xi, \xi]$ на $2k$ – мерном инвариантным подпространстве соответствующим λ, $\bar{\lambda}$, положительно, или отрицательно, определена.*

Теорема 1.6.5. *Симплектическое преобразование S является сильно устойчивым тогда и только тогда, когда все его собственные значения λ лежат на единичной окружности и они постоянного знака.*

1.7. Устойчивость и сильная устойчивость линейной системы Гамильтона с постоянными коэффициентами и линейных симплектических преобразований

Пусть V означает векторное пространство с кососкалярным произведением $[1, 66]$. Линейное преобразование $L : V \to V$ назовём гамильтоновым, если условие

$$[Lx, y] + [x, Ly] = 0$$

выполнено для всех $x, y \in V$. Легко проверить, что матрица A будет гамильтоновой или инфинитезимально симплектической тогда и только тогда, когда $A^T J + JA = 0$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебру Ли всех матриц Гамильтона обозначим через $sp(2n, R)$.

Линейная система Гамильтона

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^{2n}, \quad A \in sp(2n, R), \tag{1.16}$$

рассматривалась многими авторами. (Здесь A имеет вид JH для некоторого симметрического оператора H, т.е. $H^T = H$.)

Напомним, что система (1.16) называется устойчивой по Ляпунову, если все ее решения ограничены для всех $t \in R$. Легко проверить, что система (1.16) будет устойчивой тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы Гамильтона A чисто мнимые и A – диагонализуемая. Другой вопрос возникает, когда обсуждается уравнение (1.16) в качестве математической модели физических проблем. В таком случае элементы матрицы A могут быть известны только приближенно, поэтому сохранение устойчивости при малых изменениях матрицы A имеет важное значение. Упомянутую выше линейную систему Гамильтона назовём сильно устойчивой, если все автономные линейные системы $\dot{x} = Bx$, где $B \in sp(2n, R)$, а матрица B достаточно близка к матрице A, являются устойчивыми. В силу симметрии и полунепрерывности сверху спектра гамильтоновой матрицы, простой и чисто мнимый спектр матрицы A влечет сильную устойчивость системы (1.16) [1, 32]. Гамильтониан системы (1.16) имеет вид $h(x) = -1/2(JAx, x)$ (здесь $(\cdot, \cdot)$ обозначает стандартное скалярное произведение в R^{2n}). Тогда матрица A с кратными собственными числами, для которой h является дефинитной (положительно или отрицательно определённой) квадратичной формой, обладает "безопасными" резонансами (см. [32]).

Нахождению необходимых и достаточных условий сильной устойчивости системы (1.16) посвящено много работ (см., например [39, 60, 66, 83]). Эти критерии можно разделить на три типа: 1) динамический, использующий первые интегралы системы (1.16) (см. [83]), 2) алгебраический, использующий спектр матрицы A (см. [39]), а также 3) геометрический, использующий централизатор $C(A)$ матрицы A в алгебре Ли гамильтоновских матриц (см. [39, 60]).

Остановимся подробнее на их описанию. Известно (см. [1, 2]), что любая линейная автономная гамильтонова система вполне интегрируема, т.е. обладает n независимыми первыми интегралами.

Легко проверить, что для любого натурального l, функция $h_l(x) = 1/2(JA^l x, x)$ является первым интегралом системы (1.16), причём $h_l \equiv 0$ для чётных l.

Следующая теорема является главным результатом работы [83].

Теорема 1.7.1. [83] *Линейная система Гамильтона является сильно устойчивой тогда и только тогда, когда существует линейная комбинация n квадратичных первых интегралов h_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, которая является невырожденной дефинитной квадратичной формой.*

Другие условия сильной устойчивости представлены в [66]. Пусть матрица A обладает разными собственными числами $\pm\beta_1 i, \ldots, \pm\beta_s i$ и пусть V_j будет симплектическим подпространством соответствующим собственным числам $\pm\beta_j i$. Обозначим через A_j ограничение матрицы A на подпространстве V_j.

Теорема 1.7.2. [66] *Система (1.16) сильно устойчива тогда и только тогда, когда Гамильтониан матрицы A_j является дефинитным (положительно или отрицательно определённым) для любого j.*

Кроме того, пусть $C(A)$ обозначает множество матриц Гамильтона коммутирующих с A. Р.Кушман и А.Келли [39] приводят (используя теорию нормальных форм преобразований Гамильтона) следующую характеристику сильной устойчивости:

Теорема 1.7.3. [39] *Матрица $A \in sp(2n, R)$ является сильно устойчивой тогда и только тогда, когда ее централизатор $C(A)$ в $sp(2n, R)$ содержит только устойчивые матрицы.*

Геометрическое доказательство этой теоремы приведено в [60].

Заметим, что подобную характеристику сильной устойчивости сформулированно в [32, 39, 83] для элементов симплектической группы $Sp(2n, R)$. Симплектическое преобразование T назовём устойчивым, если последовательность $\{T^k : k \in Z\}$ ограничена. Преобразование T называется сильно устойчивым, если все симплектические операторы T' достаточно близкие к T устойчивы. Оператор $T = \exp(A) \in Sp(2n, R)$ - сильно устойчив тогда и только тогда, когда $A \in sp(2n, R)$ - сильно устойчив. Если собственные числа симплектического оператора T - различны и лежат на единичной окружности, то T - сильно устойчив. В работе [39] приведён также геометрический критерий сильной устойчивости для симплектических преобразований.

Теорема 1.7.4. [39] *Оператор $T \in Sp(2n, R)$ сильно устойчив тогда и только тогда, когда его централизатор $C(T)$ в $Sp(2n, R)$ содержит только устойчивые матрицы.*

Доказательство этого результата приведённое в [39], существенно опирается на теории нормальных форм гамильтоновских матриц. Короткое и красивое доказательство, использующее присоединённое действие

группы Ли $Sp(2n, R)$ на ее алгебре Ли $sp(2n, R)$, приведено в [60].

М.Вуйтковски в цитируемой выше своей работе [83] (см. также [64,65]) привёл аналогичный критерий сильной устойчивости динамического типа и для разностных уравнений, т.е. для симплектических матриц. Ниже сформулируем этот критерий. Сперва заметим, что для $T \in Sp(2n, R)$ и для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ квадратичная форма $f_k(x) = (JT^k x, x)$ является первым интегралом рекуррентного уравнения $x_{n+1} = Tx_n$, или, что равносильно этому, f_k инвариантна относительно действия T: $f_k(Tx) = f_k(x)$ $(x \in R^{2n})$.

Теорема 1.7.5. [83] *Преобразование $T \in Sp(2n, R)$ является сильно устойчивым тогда и только тогда, когда существует линейная комбинация n квадратичных первых интегралов f_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, которая является невырожденной дефинитной квадратичной формой.*

В главе 3 мы приводим обобщение результата М.Вуйтковского для случая линейных симплектических действий группы Z^m.

1.8. Бигамильтоновы системы и линейные действия Пуассона

Наряду с выше указанными результатами о сильной устойчивости линейных гамильтоновых систем, большое влияние на нашу работу имели также исследования по линейным действиям Пуассона. Остановимся подробнее на этих исследованиях.

Пусть N будет гладким многообразием и пусть G будет группой Ли. Гладкое преобразование $h : G \times N \to N$ назовём [59] (левым) действием этой группы на данном многообразии, если для любого $g \in G$ отображение $h(g, \cdot) = h_g$ - это диффеоморфизм $h_g : N \to N$ такой, что:

1.$h_e = \mathrm{id}_N$, где e - единичный элемент группы;

2.$h_{g_1 g_2} = h_{g_2} \circ h_{g_1}$;

3.$h_{g^{-1}} = h_g^{-1}$.

Действие Ψ соответствующей группы Ли G на симплектическим многообразии M называем действием Пуассона [1], если выполнены следующие дополнительные условия:

1.для всех $g \in G$ диффеоморфизмы Ψ_g являются симплектическими;

2.для любого ξ из алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G действие однопараметрической подгруппы $\exp(t\xi)$ имеет функцию Гамильтона H_ξ, которая линейно зависит от ξ;

3.$H_{[\xi,\eta]} = \{H_\xi, H_\eta\}$, где $[\xi, \eta]$ - коммутатор элементов ξ и η в алгебре Ли $\mathcal{G}$, а $\{\ ,\ \}$ – соответствующая скобка Пуассона на алгебре функций

на M.

В частном случае, когда многообразие – это $2n$-мерное линейное симплектическое пространство V с косо-симметрическим внутренним произведением $[\cdot,\cdot]$, а группа Ли $\mathcal{G}$ совпадает с аддитивной группой R^m, получаем следующее определение. Пусть $\Psi : R^m \times V \to V$ будет непрерывным действием группы R^m на V таким, что для любого постоянного $t \in R^m$ отображение $\Psi^t = \Psi(t,\cdot)$ является линейным симплектическим преобразованием пространства V. Действие этого типа названо [59] линейным действием Пуассона(ЛДП) группы R^m. Аналогично можно определить линейное дискретное действие группы Z^m на V с помощью семейства m попарно коммутирующих линейных симплектических преобразований.

Линейные действия Пуассона группы R^m порождены линейной вполне разрешимой системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial t_j} = A_j x \quad (x \in R^{2n},\ t_j \in R,\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

где $A_j = JH_j$ попарно коммутирующие матрицы, H_j – симметрические матрицы, а матрица J имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Операторы $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ порождают коммутативную алгебру Ли $\overline{\mathcal{A}}$.

Линейное действие Пуассона называется невырожденным [59], если алгебра $\overline{\mathcal{A}}$ как векторное пространство, имеет максимальную размерность, т.е. m. В этом случае векторные поля $A_1x, A_2x, \ldots, A_mx$ линейно независимы.

Линейное действие Пуассона $\bar{\Psi}$ называется простым, если алгебра $\overline{\mathcal{A}}$ содержит оператор с простым спектром.

Фундаментальная матрица $\exp(A_1t_1 + \ldots + A_mt_m)$ определяет коммутативную m-параметрическую группу Ли симплектических преобразований.

Нелинейные действия Пуассона на четырехмерных многообразиях, порождённые гамильтоновым векторным полем с дополнительным первым интегралом изучались Л.М.Лерманом и Я.Л.Уманским [59]. Такие действия иногда называют ещё бигамильтоновыми системами.

Линеаризуя действие Пуассона в окрестности точки покоя, они предложили классификацию этих точек аналогичную предложенной А.Пуанкаре для обыкновенных дифференциальных уравнений. А именно, показали, что существуют четыре типа особых точек простых линейных действий Пуассона на R^4: центр–центр, седло–центр, седло–седло и фокус–фокус. Л.М.Лерман и Я.Л.Уманский определяют также линей-

ную эквивалентность двух ЛДП и вводят понятие так называемой линейной устойчивости ЛДП. Кроме того они дают характеристику ЛДП с помощью структурной линейной устойчивости относительно возмущений в этом классе ЛДП.

Эти результаты ещё раз указывают на актуальность задачи распространения теории сильной устойчивости на линейные системы Гамильтона с многомерным временем.

1.9. Основные понятия теории спектра линейных полиоператоров

Спектральная теория гамильтоновых матриц, наряду с теорией нормальных форм Вильямсона, имеют существенное влияние на исследование линейных систем Гамильтона. Эта теория аналогична теории нормальных форм Жордана общей матрицы.

К сожалению, не существует теория нормальных форм семейств матриц. Классическая задача о одновременной приводимости к нормальной форме семейства матриц, названная ещё "дикой классификационной задачей", оказывается неразрешимой [10]. Это одно из многих препятствий на пути распространения теории параметрического резонанса на линейные гамильтоновы системы с многомерным временем.

К счастью, имеется достаточно хорошо развитая "многопараметрическая спектральная теория" для семейств попарно коммутирующих линейных операторов. Ниже, следуя [7, 61], приводим некоторые понятия и факты, касающиеся этой теории и необходимые для наших целей.

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ означает кортеж m ограниченных линейных операторов в пространстве Гильберта H. Будем говорить [61], что точка $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in C^{m^*}$ принадлежит *левому общему спектру* $\sigma_l(\mathcal{A})$ (соотв., *правому общему спектру* $\sigma_r(\mathcal{A})$), если не существует m-кортеж $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_m\}$ линейных ограниченных операторов в H такой, что $\sum\limits_{k=1}^{m} R_k(A_k - \lambda_k I) = I$, (соотв., $\sum\limits_{k=1}^{m}(A_k - \lambda_k I)R_k = I$). *Общий спектр* полиоператора $\mathcal{A}$ определяется как сумма его левого и правого общего спектра. Обозначим его через $\sigma(\mathcal{A})$. Доказывается, что $\sigma(\mathcal{A})$ – компактное непустое множество, которое проектируется на спектр каждого оператора семейства.

В случае $n = 1$ выше упомянутое определение эквивалентно обыкновенному определению спектра оператора. (В конечномерном случае понятия левого и правого общего спектра совпадают.)

Другой способ определения общего спектра в конечномерным пространстве опирается на известном из линейной алгебры факте, что любое семейство попарно коммутирующих комплексных линейных операторов обладает *общим собственным вектором*, т.е. для любого $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $A_i \circ A_j = A_j \circ A_i$, существует вектор $h \neq 0$ такой что для всех $j = 1, \ldots, m$ и некоторого $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in C^{m^*}$ имеет место $A_j h = \lambda_j h$. В этом случае $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ называется *собственным функционалом*, соответствующим общему собственному вектору h. Множество всех собственных функционалов составляет общий спектр $\sigma(\mathcal{A})$. Некоторые подробности, касающееся свойств общего спектра можно найти в [7, 61].

Заметим, что для кортежа m коммутирующих гамильтоновых (соотв. симплектических) матриц общий спектр обладает свойствами симметрии, аналогичных свойствам одной гамильтоновой (соответственно симплектической) матрицы. (Подробности см. ниже.)

1.10. Комплексная структура и устойчивость линейных вещественных симплектических отображений. Комплексный росток В.П.Маслова

Важно заметить, что понятие устойчивости линейных обыкновенных систем Гамильтона сильно связано с понятием так называемой комплексной структуры, которой определение напомним ниже.

Установим в симплектическим пространстве систему координат $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и возьмём в нем скалярное произведение

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} (p_i^2 + q_i^2),$$

где $x = \sum_{i=1}^{n} (p_i e_{p_i} + q_i e_{q_i})$.

Таким образом мы ввели в симплектическом пространстве структуру Евклида, в которой симплектический базис $e_{\mathbf{p}}$, $e_{\mathbf{q}}$ является ортонормальным.

Оказывается, что с помощью так определённого скалярного произведения можно записать кососкалярное произведение $[\cdot, \cdot]$ в виде

$$[\xi, \eta] = (J\xi, \eta),$$

где $J : R^{2n} \to R^{2n}$ – антисимметрический оператор, который в симплектическим базисе e_{p_i}, e_{q_i} имеет форму

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что оператор J – симплектический и что $J^2 = -I_{2n}$. Таким образом в пространстве R^{2n} можно, кроме симплектической структуры $[\cdot,\cdot]$ и структуры Евклида $(\cdot,\cdot)$, ввести дополнительную комплексную структуру. Именно, надо для этого определить умножение на $i = \sqrt{-1}$ в качестве действия оператора J. Благодаря этому можно отождествить пространство R^{2n} с комплексным пространством C^n.

Напомним, что:

а) линейные преобразования пространства R^{2n} сохраняющие скалярное произведение образуют ортогональную группу $O(2n)$;

б) линейные преобразования пространства R^{2n} сохраняющие кососкалярное произведение образуют симплектическую группу $Sp(2n, R)$;

в) линейные преобразования пространства R^{2n} сохраняющие комплексную структуру образуют комплексную линейную группу $GL(n, C)$.

Можно доказать, что пересечение любых двух из этих групп равняется пересечению всех трёх, иначе говоря:

$$O(2n) \cap Sp(2n, R) = Sp(2n, R) \cap GL(n, C) = GL(n, C) \cap O(2n). \quad (1.17)$$

Это пересечение обозначается через $U(n)$ и называется унитарной группой. Преобразования принадлежащие этой группе сохраняют скалярное произведение Эрмита $(\xi, \eta) + i[\xi, \eta]$.

Среди методов решения различных задач математической физики, наиболее распространённые – асимптотические, а особенно квазиклассические, методы. В.П.Маслов разработал метод построения квазиклассических приближений собственных функции и значений. Он сделал это с помощью некоторой конструкции в фазовом пространстве системы, названной им комплексным ростком. Исходный объект этой конструкции – это инвариантное изотропное многообразие. Затем, в каждой точке этого подмногообразия строится линейное лагранжево подпространство, для которого выполнены некоторые условия диссипативности и инвариантности. Эта конструкция и называется комплексным ростком. С ее помощью находится квазиклассические приближения собственных функции.

В этой главе формулируем некоторые обобщения этих результатов на линейные автономные системы Гамильтона с многомерным временем. Приводятся условия существования комплексного ростка Маслова и его

связь с условиями устойчивости линейных симплектических действий некоторых абелевых групп.

Подпространство симплектического пространства называется нулевым, если оно косоортогонально себе, то есть если косое произведение любых двух векторов этого подпространства равно нулю. Например, нулевым является координатное подпространство $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ в симплектическом пространстве координат p, q.

Нулевые подпространства называются также изотропными. Иначе говоря, U будет изотропным, если $U \subset U^{\perp}$. Поскольку $\dim U^{\perp} = 2n - \dim U$, где $2n$ - размерность всего пространства, то размерность изотропного подпространства не превосходит n. Изотропное подпространство размерности n называем лагранжевым.

Напомним (см. [28]), что подпространство L симплектического линейного пространства $C^{2n} =^{C} R^{2n}$ с кососкалярным произведением $[\cdot, \cdot]$ называют положительным (соотв. отрицательным), если для всякого ненулевого вектора $\xi \in L$, имеет место неравенство $(1/2i)[\xi, \bar{\xi}] > 0$ (соотв. $(1/2i)[\xi, \bar{\xi}] < 0$). Подпространство L, являющееся либо положительным, либо отрицательным, называют определённым.

Следуя [20], назовём комплексным ростком системы (1.16) подпространство комплексной размерности n пространства $C^{2n} =^{C} R^{2n}$ которое:

а) изотропно относительно комплексификации симплектической формы $[\cdot, \cdot]$;

б) инвариантно относительно комплексификации системы (1.16);

в) положительно определено.

В.П.Маслов сформулировал вопросы об условиях существования и единственности комплексного ростка и о методах построения этого ростка на инвариантном изотропном многообразии Λ^k.

Оказывается, что условия существования ростка в точке равновесия совпадают с условиями устойчивости системы, линеаризованной в точке. Н.Н.Нехорошев и А.Б.Валиньо [3] построили комплексные ростки в точке равновесия, на замкнутой траектории и на специального типа k - мерных изотропных торах в системах с k циклическими переменными. Они нашли необходимые и достаточные условия единственности таких ростков.

Кроме того, Н.Нехорошев и А.Б.Валиньо [3] доказали, что сильная устойчивость линейных обыкновенных систем Гамильтона с постоянными или периодическими коэффициентами эквивалентна наличию единственного комплексного ростка Маслова. Они дают также условия суще-

ствования и единственности комплексного ростка для некоторых линейных квазипериодических систем. Таким образом задачу о существованию и единственности инвариантного комплексного ростка можно считать обобщением задачи сильной устойчивости на квазипериодический случай. Теория комплексного ростка имеет многие приложения в разных областях физики и квантовой механики.

В данной диссертации предлагаются некоторые обобщения этих результатов на Гамильтоновы системы с многомерным временем.

Ниже сформулируем в удобной для нас форме утверждение объединяющие известные результаты.

Предложение 1.10.1. *Следующие условия являются равносильными:*

1) система (1.16) устойчива;

2) все собственные значения матрицы A чисто мнимые и она диагонализуема;

3) существует инвариантна комплексная структура $J : J^2 = -id$, $AJ = JA$;

4) существует комплексный росток.

Равносильность условий 2) и 4) доказана в [3], равносильность условий 1) и 3) вытекает из равенства (1.17) (см. [1]), равносильность условий 1) и 2) общеизвестна.
Приведённый ниже результат доказан в [3].

Теорема 1.10.1. [3] *Следующие условия равносильны:*

1) система (1.16) сильно устойчива;

2) существует единственный комплексный росток;

3) все собственные значения оператора A дефинитны.

Таким образом теорема 1.10.1 проложила мост между разными, на первый взгляд, теориями параметрического резонанса М.Г.Крейна и комплексного ростка В.П.Маслова как эффективного инструмента в исследовании квазиклассических асимптотик собственных функций некоторых дифференциальных операторов математической физики.

Выводы к главе 1

В первой главе приводится основные понятия и важные классические результаты, касающееся тематики данной диссертационной работой. Одновременно делается и обзор литературы.

Г Л А В А 2

СИЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ВПОЛНЕ РАЗРЕШИМЫХ СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА

2.1. Нормальные формы линейных гамильтоновых полиоператоров

Попытки решения проблемы приведения обыкновенной линейной системы Гамильтона к самому простому виду начались с фундаментальных работ Дж.Вильямсона, см. [80–82]. В этих публикациях Дж.Вильямсон дал необходимые и достаточные условия подобия двух матриц Гамильтона размерности 4×4. Эти результаты сначала получили свое развитие в работах, в которых вырожденные случаи не были рассмотрены, здесь напомним таких авторов как: J.Moser [67], A.Deprit [42], R.C.Robinson [69], J.Roels и G.Louterman [70], C.L.Siegel и J.Moser [78].

В конце двадцатого века появились многие публикации, представляющие разные нормальные формы систем Гамильтона высших размерности, исследующие также вырожденные случаи, см. [33,34,40,41,52–56,58]. Работы касающиеся проблемы нормальных форм линейных систем Гамильтона появляются и в настоящее время, например: [12,35,38,66]. Аналогичная задача рассматривается и для симплектических матриц (см., например [58, 63, 66]).

Задача построения нормальных форм для семейств линейных гамильтоновых матриц (соотв. для семейств линейных симплектических матриц) очень сложная и до сих пор не решена. Парам и тройкам коммутирующих матриц посвящена работа [51].

Как упомянуто в Общей концепции работы, основной целью настоящей диссертации является изучение условий устойчивости и сильной устойчивости линейных вполне разрешимых систем Гамильтона

$$\frac{\partial x}{\partial t_j} = A_j x, \quad (x \in R^{2n},\ t_j \in R,\ j = 1, \ldots, m) \tag{2.1}$$

где A_j – попарно коммутирующие гамильтоновы матрицы. Для исследования асимптотических свойств решений этой системы, таких как устойчивость, очень важной является теория характеристических функционалов. Дело в тем, что для определения решений системы (2.1) надо уметь найти ее фундаментальный оператор, который определяется в виде экс-

поненты

$$W(t) = \exp(\mathcal{A}, t) := \exp(A_1 t_1 + \cdots + A_m t_m). \tag{2.2}$$

Итак, для нахождения фундаментальной матрицы системы (2.1) надо уметь построить оператор $\exp(\mathcal{A}, t)$, определяемый формулой (2.2).

Как известно [7, 8], вид этой экспоненты непосредственно зависит от общего спектра полиоператора $\mathcal{A}$, а также от вида его корневых подпространств. Поэтому, в исследовании свойств решений системы (2.1), полезным оказывается представление кортежа $\mathcal{A}$ в наиболее простой (например, диагональной) форме. В связи с этим в данном параграфе формулируются и доказываются леммы, которые позволяют найти нормальные формы для некоторых классов семейств линейных гамильтоновых матриц.

Напомним, что если A – матрица Гамильтона и T –симплектическая матрица, то $B = T^{-1}AT$ – также матрица Гамильтона. В этом случае A и B называются *симплектически подобными.*

Сначала приведём некоторые свойства общего спектра семейства попарно коммутирующих гамильтоновых матриц. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \in (sp(2n, R))^m$ будет кортежем m попарно коммутирующих операторов Гамильтона (т.е. для $i, j = 1, \ldots, m$ $A_i \circ A_j = A_j \circ A_i$).

Лемма 2.1.1. *Если $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in C^{m^*}$ – элемент общего спектра полиоператора $\mathcal{A}$, то $-\Lambda$ также принадлежит этому спектру.*

Доказательство. Введём следующие обозначения: $t = \{t_1, \ldots, t_m\} \in R^m$, $(\Lambda, t) := \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_m t_m$, $(\mathcal{A}, t) := A_1 t_1 + \cdots + A_m t_m$. Предположим, что $\Lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Известно (см., например, [61], Т. 6.2.2), что $\Lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда для всех $t \in R^m$ $(\Lambda, t) \in \sigma((\mathcal{A}, t))$. Очевидно, что тогда для всех $t \in R^m$ $-(\Lambda, t) \in \sigma((\mathcal{A}, t))$. Учитывая вновь Теорему 6.2.2 получаем, что $-\Lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Лемма доказана. □

Лемма 2.1.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ и $M = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ будут двумя собственными функционалами полиоператора $\mathcal{A}$ с соответствующими собственными векторами x и y. Тогда либо $\lambda_j + \mu_j = 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$, либо $[x, y] = 0$.*

Доказательство. Поскольку Λ и M – собственные функционалы полиоператора $\mathcal{A}$, то существуют ненулевые векторы x и y такие, что для всех $j = 1, \ldots, m$ $A_j x = \lambda_j x$, $A_j y = \mu_j y$. Итак, для всех $j = 1, \ldots, m$ получаем $\lambda_j [x, y] = [\lambda_j x, y] = [A_j x, y] = -[x, A_j y] = -[x, \mu_j y] = -\mu_j [x, y]$, или $(\lambda_j + \mu_j)[x, y] = 0$. □

Следствие 2.1.1. *Пусть* $\sigma(\mathcal{A}) = \{\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)}, -\Lambda^{(1)}, \dots, -\Lambda^{(n)}\}$ *состоит из попарно различных собственных функционалов. (Здесь* $\Lambda^{(i)} = \{\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_m^{(i)}\}$, $i = 1, \dots, n$.*) Тогда существует симплектическая матрица* S *(допускается комплексная) такая, что для всех* $j = 1, \dots, m$

$$S^{-1} A_j S = \mathrm{diag}(\lambda_{\mathrm{j}}^{(1)}, \dots, \lambda_{\mathrm{j}}^{(\mathrm{n})}, -\lambda_{\mathrm{j}}^{(1)}, \dots, -\lambda_{\mathrm{j}}^{(\mathrm{n})}).$$

Доказательство. Общий спектр $\sigma(\mathcal{A})$ – простой тогда и только тогда, когда $\exists t \in R^m$ такое, что спектр

$$\sigma((\mathcal{A}, t)) = \{(\Lambda^{(1)}, t), \dots, (\Lambda^{(n)}, t), -(\Lambda^{(1)}, t), \dots, -(\Lambda^{(n)}, t)\}$$

оператора Гамильтона $(\mathcal{A}, t)$ является простым.

Обозначим через

$$\sigma((\mathcal{A}, t)) = \{\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)}, -\theta^{(1)}, \dots, -\theta^{(n)}\}.$$

Тогда существует такая матрица S зависящая от t, что

$$S^{-1}(\mathcal{A}, t) S = \mathrm{diag}(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)}, -\theta^{(1)}, \dots, -\theta^{(n)}).$$

Обозначим $B_j = S^{-1} A_j S$. Тогда $B_r \circ B_s = B_s \circ B_r$, для $r, s \in \{1, \dots, m\}$. Кроме того,

$$B_j \circ S^{-1}(\mathcal{A}, t) S = S^{-1}(\mathcal{A}, t) S \circ B_j, \tag{2.3}$$

что можно переписать в следующей, более подробной, форме:

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} & b_{1,n+1} & \dots & b_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} & b_{n,n+1} & \dots & b_{n,2n} \\ b_{n+1,1} & \dots & b_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} & \dots & b_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \dots & b_{2n,n} & b_{2n,n+1} & \dots & b_{2n,2n} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \theta^{(1)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \theta^{(n)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\theta^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\theta^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \theta^{(1)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \theta^{(n)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\theta^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\theta^{(n)} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} & b_{1,n+1} & \dots & b_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} & b_{n,n+1} & \dots & b_{n,2n} \\ b_{n+1,1} & \dots & b_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} & \dots & b_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \dots & b_{2n,n} & b_{2n,n+1} & \dots & b_{2n,2n} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}\theta^{(1)} & \dots & b_{1,n}\theta^{(n)} & -b_{1,n+1}\theta^{(1)} & \dots & -b_{1,2n}\theta^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}\theta^{(1)} & \dots & b_{n,n}\theta^{(n)} & -b_{n,n+1}\theta^{(1)} & \dots & -b_{n,2n}\theta^{(n)} \\ b_{n+1,1}\theta^{(1)} & \dots & b_{n+1,n}\theta^{(n)} & -b_{n+1,n+1}\theta^{(1)} & \dots & -b_{n+1,2n}\theta^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1}\theta^{(1)} & \dots & b_{2n,n}\theta^{(n)} & -b_{2n,n+1}\theta^{(1)} & \dots & -b_{2n,2n}\theta^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \theta^{(1)}b_{1,1} & \dots & \theta^{(1)}b_{1,n} & \theta^{(1)}b_{1,n+1} & \dots & \theta^{(1)}b_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^{(n)}b_{n,1} & \dots & \theta^{(n)}b_{n,n} & \theta^{(n)}b_{n,n+1} & \dots & \theta^{(n)}b_{n,2n} \\ -\theta^{(1)}b_{n+1,1} & \dots & -\theta^{(1)}b_{n+1,n} & -\theta^{(1)}b_{n+1,n+1} & \dots & -\theta^{(1)}b_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\theta^{(n)}b_{2n,1} & \dots & -\theta^{(n)}b_{2n,n} & -\theta^{(n)}b_{2n,n+1} & \dots & -\theta^{(n)}b_{2n,2n} \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $b_{ij}\theta^{(j)} = \theta^{(i)}b_{ij}$ для $i \neq j$, но поскольку знаем, что $\theta^{(i)} \neq \theta^{(j)}$ для $i \neq j$, поэтому необходимо чтобы $b_{ij} = 0$ для $i \neq j$.

Более того, матрицы B_j удовлетворяют условиям $B_j^T J + JB_j = 0$, (для всех $j = 1, 2, \dots, m$), т.е.

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_{n,n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{n+1,n+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{2n,2n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_{n,n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{n+1,n+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{2n,2n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{n,n} \\ -b_{n+1,n+1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -b_{2n,2n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{n+1,n+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{n,n} \\ -b_{1,1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -b_{n,n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Сумма последних двух матриц равна нулевой матрице размера $2n \times 2n$ тогда и только тогда, когда $b_{1,1} = -b_{n+1,n+1}, \dots, b_{n,n} = -b_{2n,2n}$.

Кроме того, заметим, что матрицы A_j и B_j подобны и поэтому обладают одним и тем же спектром. Итак,

$$B_j = \mathrm{diag}(\lambda_j^{(1)}, \dots, \lambda_j^{(n)}, -\lambda_j^{(1)}, \dots, -\lambda_j^{(n)}).$$

□

Пусть теперь $\mathcal{A}$ означает вещественный полиоператор Гамильтона с попарно различными собственными функционалами. В этом случае $\sigma(\mathcal{A}) = \{\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)}, -\Lambda^{(1)}, \dots, -\Lambda^{(n)}\}$. Собственные функционалы полиоператора $\mathcal{A}$ разделяются на следующие три группы:

1) вещественные собственные функционалы $\pm L^{(1)}, \dots, \pm L^{(s)} \in (R^m)^*$, где $L^{(i_1)} = \{\alpha_1^{(i_1)}, \dots, \alpha_m^{(i_1)}\}$ для $i_1 = 1, \dots, s$;

2) чисто мнимые $\pm iB^{(1)}, \dots, \pm iB^{(r)} \in i(R^m)^*$, где $B^{(i_2)} = \{\beta_1^{(i_2)}, \dots, \beta_m^{(i_2)}\}$ для $i_2 = 1, \dots, r$;

3) комплексные $\pm\Gamma^{(1)} \pm i\Delta^{(1)}, \dots, \pm\Gamma^{(t)} \pm i\Delta^{(t)}$, где $\pm\Gamma^{(i_3)} \pm i\Delta^{(i_3)} = \{\pm\gamma_1^{(i_3)} \pm \delta_1^{(i_3)}, \dots, \pm\gamma_m^{(i_3)} \pm \delta_m^{(i_3)}\}$ $(i_3 = 1, \dots, t)$ и для всех $i_3 = 1, \dots, t$: $\gamma_{j_1}^{(i_3)} \neq 0$ и $\delta_{j_2}^{(i_3)} \neq 0$ для некоторых j_1 и j_2 из $\{1, \dots, m\}$.

Такое разложение общего спектра полиоператора $\mathcal{A}$ определяет разложение пространства V в прямую сумму

$$V = (\oplus_{i_1=1}^{s} U^{i_1}) \oplus (\oplus_{i_2=1}^{r} W^{i_2}) \oplus (\oplus_{i_3=1}^{t} Z^{i_3}),$$

где $U^{i_1} = \eta(L^{(i_1)}) \oplus \eta(-L^{(i_1)})$, $W^{i_2} = \eta(iB^{(i_2)}) \oplus \eta(-iB^{(i_2)})$ и
$Z^{(i_3)} = [\eta(\Gamma^{(i_3)} + i\Delta^{(i_3)}) \oplus \eta(\Gamma^{(i_3)} - i\Delta^{(i_3)})] \oplus [\eta(-\Gamma^{(i_3)} - i\Delta^{(i_3)}) \oplus \eta(-\Gamma^{(i_3)} + i\Delta^{(i_3)})]$.
Нетрудно заметить, что каждое из вышеуказанных слагаемых является инвариантным подпространством относительно $\mathcal{A}$.

В силу Леммы 2.1.2 эти пространства попарно J-ортогональные, поэтому каждое из них – симплектическое. Более того, каждое из них является также комплексификацией вещественного пространства и следовательно, инвариантно относительно комплексного сопряжения. Отсюда следует, что для всех указанных выше случаев существуют такие симплектические координаты, относительно которых $\mathcal{A}$ принимает блочно–диагональную форму. В силу этого, в дальнейшим будем обсуждать каждое из этих подпространств отдельно.

Лемма 2.1.3. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ будет полиоператором Гамильтона размера 2×2 и пусть $\sigma(\mathcal{A}) = \{\Lambda, -\Lambda\}$, $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ - вещественные, где $\lambda_i \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда существует такая вещественная 2×2 симплектическая матрица S, что для всех $j = 1, \ldots, m$*

$$S^{-1} A_j S = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & -\lambda_j \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть x и y будут общими собственными векторами соответствующими попарно различным собственным функционалам. Это означает, что для всех $j = 1, \ldots, m$ имеют место равенства:

$$A_j x = \lambda_j x, \quad A_j y = -\lambda_j y.$$

Следовательно, x и y – линейно независимы, причём $[x, y] \neq 0$. Положим $u = [x, y]^{-1} y$. Итак $x,\ y$ является вещественным, симплектическим базисом, а $S = (x, u)$ – искомая вещественная симплектическая матрица.

□

Лемма 2.1.4. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ будет вещественным 2×2 полиоператором Гамильтона с ненулевыми собственными функционалами $\{i\beta_1, \ldots, i\beta_m\}$ и $\{-i\beta_1, \ldots, -i\beta_m\}$. Тогда существует такая вещественная 2×2 симплектическая матрица S, что для всех $j = 1, \ldots, m$*

либо

$$S^{-1}A_jS = \begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ -\beta_j & 0 \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad S^{-1}A_jS = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть для всех $j = 1, \ldots, m$ $A_jx = i\beta_jx$, где $x = u+iv \neq 0$. Следовательно, для всех $j = 1, \ldots, m$ $A_ju = -\beta_jv$ и $A_jv = \beta_ju$. Поскольку $u + iv$ и $u - iv$ C–линейно независимы, то u и v R–линейно независимы. Отсюда следует, что $[u, v] = \Delta \neq 0$. Предположим, что $\Delta = \gamma^2 > 0$ и положим $S = (\gamma^{-1}u, \gamma^{-1}v)$. Легко проверить, что S удовлетворяет первому условию из (2.4). Если же $\Delta = -\gamma^2 < 0$ то положим $S = (\gamma^{-1}v, \gamma^{-1}u)$. Так определённая матрица S удовлетворяет второму условию из (2.4). □

Иногда более полезной чем вещественная (недиагональная) форма может оказаться комплексная диагональная форма полиоператора.

Лемма 2.1.5. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ будет вещественным 2×2 полиоператором Гамильтона с ненулевыми собственными функционалами $\{i\beta_1, \ldots, i\beta_m\}$, $\{-i\beta_1, \ldots, -i\beta_m\}$. Тогда существует такая 2×2 симплектическая матрица S, что для всех $j = 1, \ldots, m$*

$$S^{-1}A_jS = \begin{pmatrix} i\beta_j & 0 \\ 0 & -i\beta_j \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $x = u + iv$ будет ненулевым вектором, таким что для всех $j = 1, \ldots, m$ $A_jx = i\beta_jx$. Тогда $[x, \overline{x}] = [u + iv, u - iv] = 2i[v, u] \neq 0$. Обозначим $\gamma = 1/|[v, u]|$ и положим $S = (\gamma x, \gamma\overline{x})$. Построенная таким образом матрица S удовлетворяет требуемому равенству.

□

Лемма 2.1.6. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ будет 4×4 полиоператором Гамильтона с собственными функционалами $\{\Gamma + i\Delta, -\Gamma - i\Delta, \Gamma - i\Delta, -\Gamma + i\Delta\}$, где $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$, $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, причём $\gamma_{j_1} \neq 0$, $\delta_{j_2} \neq 0$ для некоторых $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда существует вещественная 4×4 симплектическая матрица S, такая что для всех $j = 1, \ldots, m$*

$$S^{-1}A_jS = \begin{pmatrix} B_j^T & 0 \\ 0 & -B_j \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ является вещественным 2×2 полиоператором с комплексно-сопряжёнными собственными функционалами $\{\Gamma + i\Delta, \Gamma - i\Delta\}$.

Доказательство. Поскольку общий спектр полиоператора $\mathcal{A}$ состоит из попарно различных собственных функционалов, то существует такое ненулевое $t \in R^m$, что спектр $\sigma((\mathcal{A},t)) = \{(\Gamma + i\Delta, t), (-\Gamma - i\Delta, t), (\Gamma - i\Delta, t), (-\Gamma + i\Delta, t)\}$ оператора $(\mathcal{A}, t)$ является простым. С другой стороны
$\sigma((\mathcal{A},t)) = \{(\Gamma,t) + i(\Delta,t), -(\Gamma,t) - i(\Delta,t), (\Gamma,t) - i(\Delta,t), -(\Gamma,t) + i(\Delta,t)\}$.

Обозначим $\gamma = (\Gamma, t)$ и $\delta = (\Delta, t)$. Итак $\sigma((\mathcal{A},t)) = \{\gamma + i\delta, -\gamma - i\delta, \gamma - i\delta, -\gamma + i\delta\}$. Заметим, что, в силу предположений, $\gamma \neq 0$ и $\delta \neq 0$. В силу ([66], Лемма C7), существует такая вещественная 4×4 симплектическая матрица S (вообще говоря, зависящая от t), что

$$S^{-1}(\mathcal{A},t)S = \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix},$$

где B – вещественная 2×2 матрица с собственными значениями $\gamma \pm i\delta$.

Положим $C_j = S^{-1}A_jS$ $(j = 1, \ldots, m)$. Тогда $C_r \circ C_s = C_s \circ C_r$ $(r, s = 1, 2, \ldots, m)$. Учитывая, что A_j – попарно коммутирующие, получаем

$$C_j \circ \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \circ C_j \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Определим $C_j = \begin{pmatrix} C^{(1)} & C^{(2)} \\ C^{(3)} & C^{(4)} \end{pmatrix}$, где $C^{(i)}$ обозначает блочную матрицу размерности 2×2. Тогда вышеуказанное равенство можно переписать в виде следующей системы уравнений:

$$C^{(1)}B^T = B^TC^{(1)}, \tag{2.5}$$
$$-C^{(2)}B = B^TC^{(2)}, \tag{2.6}$$
$$C^{(3)}B^T = -BC^{(3)}, \tag{2.7}$$
$$-C^{(4)}B = -BC^{(4)}. \tag{2.8}$$

Кроме того, каждое C_j – это матрица Гамильтона, то есть $C_j^TJ + JC_j = 0$. Другими словами, $C^{(3)} = (C^{(3)})^T$, $C^{(2)} = (C^{(2)})^T$ и $(C^{(1)})^T = -C^{(4)}$. Следовательно, условия (2.5) и (2.8) эквивалентны.

Напомним (см. [8]), что матричное уравнение вида $\overline{A}X = X\overline{B}$, где матрицы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ не обладают общими собственными значениями, имеет только тривиальное решение. Заметим также, что матрицы B^T и $-B$ не обладают общими собственными значениями. Предположим, что $\lambda \in \sigma(B^T)$. Итак $\lambda \in \sigma(-B)$ тогда и только тогда, когда $-\lambda \in \sigma(B^T)$, так как $\det(-B - \lambda I) = \det(-B - \lambda I)^T = \det((-B)^T - (\lambda I)^T) = \det(-B^T - \lambda I) =$

$-\det(B^T+\lambda I) = -\det(B^T-(-\lambda)I)$. Собственные значения матрицы B – это $\gamma \pm i\delta$ ($\gamma \neq 0$ и $\delta \neq 0$), отсюда следует, что условия $\lambda \in \sigma(B^T)$ и $-\lambda \in \sigma(B^T)$ не могут иметь места одновременно. Итак, решения уравнений (2.6) и (2.7) это $C^{(2)} = C^{(3)} = 0$. Окончательно, матрица C_j принимает вид

$$C_j = \begin{pmatrix} -(C^{(4)})^T & 0 \\ 0 & C^{(4)} \end{pmatrix},$$

или, обозначая $C^{(4)}$ через $-C$,

$$C_j = \begin{pmatrix} C^T & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}.$$

Матрицы A_j и C_j подобны, поэтому они обладают одинаковым спектром для всех $j = 1, \ldots, m$. Отсюда следует, что спектр матрицы C – это $\{\gamma_j + i\delta_j, \gamma_j - i\delta_j\}$. □

Выше мы рассмотрели случай, когда $\mathcal{A}$ обладает простым общим спектром. Рассмотрим теперь случай кратного общего спектра.

Для того, чтобы найти нормальные формы для некоторых полиоператоров Гамильтона в случае кратного общего спектра, воспользуемся спектральной теорией операторов $A \in L(E; L(F; F))$, удовлетворяющих равенству $A_iA_j = A_jA_i$, построенной А.И.Перовым [21, 22].

Рассмотрим полиоператор $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, где $A_j \in L(E; L(F; F))$ $\forall j = 1, 2, \ldots, m$. Ненулевой вектор $x \in F$ называется общим собственным вектором полиоператора $\mathcal{A}$, если можно указать линейный функционал $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$, $\Lambda : E \to C$, для которого при всех $j = 1, 2, \ldots, m$ имеет место равенство $A_jx = \lambda_jx$.
Функционал Λ, удовлетворяющий этому равенству, назовём общим собственным функционалом полиоператора $\mathcal{A}$. Вектор x называется общим собственным вектором полиоператора $\mathcal{A}$, соответствующим общему собственному функционалу Λ. Совокупность всех собственных функционалов полиоператора $\mathcal{A}$ называется его спектром и обозначается $\sigma(\mathcal{A})$.

Подпространство $\eta(\mathcal{A}) \subset F$ называется инвариантным относительно полиоператора $\mathcal{A} \in (L(E; L(F; F)))^m$, если оно инвариантно для любого оператора A_j ($j = 1, 2, \ldots, m$), т.е. если $A_j(\eta(\mathcal{A})) \subset \eta(\mathcal{A})$ при любом $j = 1, 2, \ldots, m$.

Для каждого $\Lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ и произвольного неотрицательного целого p определим подпространство $\eta_p(\Lambda) \subset F$ как совокупность всех векторов $x \in F$, удовлетворяющих соотношению $(A_{j_1} - \lambda_{j_1}I) \ldots (A_{j_p} - \lambda_{j_p}I)x = 0$ при любых $j_1, \ldots, j_p \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Очевидно, что $0 \subset \eta_1(\Lambda) \subset \ldots \subset$

$\eta_p(\Lambda) \subset \ldots$, и что, в силу конечномерности пространства F, число собственных включений конечно.

Наименьшее неотрицательное число p, для которого $\eta_p(\Lambda) = \eta_{p+1}(\Lambda)$ называется индексом общего собственного функционала Λ и обозначается $n(\Lambda)$. Подпространство $\eta(\Lambda) = \eta_{n(\Lambda)}(\Lambda)$ называется общим корневым подпространством полиоператора $\mathcal{A}$, отвечающим общему собственному функционалу Λ. Нетрудно видеть, что общее корневое подпространство инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Теорема 2.1.1. [7] *Пусть пространство F комплексно, полиоператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию $A_iA_j = A_jA_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ и $\sigma(\mathcal{A}) = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s\}$. Тогда пространство F есть прямая сумма корневых подпространств полиоператора $\mathcal{A}$:*

$$F = \eta(\Lambda_1) \oplus \ldots \oplus \eta(\Lambda_s)$$

Каждое из корневых подпространств инвариантно относительно полиоператора $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}$ будет вещественным полиоператором Гамильтона. Каждый собственный функционал полиоператора $\mathcal{A}$ принадлежит к одной из следующих групп:

1) собственный функционал

$$\{0, \ldots, 0\},$$

2) вещественные собственные функционалы

$$\{\pm\alpha_1^1, \ldots, \pm\alpha_m^1\}, \ldots, \{\pm\alpha_1^s, \ldots, \pm\alpha_m^s\},$$

3) чисто мнимые собственные функционалы

$$\{\pm\beta_1^1 i, \ldots, \pm\beta_m^1 i\}, \ldots, \{\pm\beta_1^s i, \ldots, \pm\beta_m^s i\},$$

4) комплексные не чисто мнимые собственные функционалы

$$\{\pm\gamma_1^1 \pm \delta_1^1 i, \ldots, \pm\gamma_m^1 \pm \delta_m^1 i\}, \ldots, \{\pm\gamma_1^t + \delta_1^t i, \ldots, \pm\gamma_m^t + \delta_m^t i\},$$

где для каждого $k = 1, 2, \ldots, t$ существует $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ такое, что $\gamma_j^k \neq 0$. Итак, получаем разложение пространства V в прямую сумму

$$V = X \oplus (\bigoplus_j U_j) \oplus (\bigoplus_j W_j) \oplus (\bigoplus_j Z_j).$$

Здесь X, U_j,W_j и Z_j обозначают следующие подпространства пространства V:

$X = \eta(\{0, \ldots, 0\})$,
$U_j = \eta(\{\pm\alpha_1^1, \ldots, \pm\alpha_m^1\}) \oplus \eta(\{\mp\alpha_1^1, \ldots, \mp\alpha_m^1\})$,
$W_j = \eta(\{\pm\beta_1^1 i, \ldots, \pm\beta_m^1 i\}) \oplus \eta(\{\mp\beta_1^1 i, \ldots, \mp\beta_m^1 i\})$,
$Z_j = \{\eta(\{\gamma_1^1 + \delta_1^1 i, \ldots, \gamma_m^1 + \delta_m^1 i\}) \oplus \eta(\{\gamma_1^1 - \delta_1^1 i, \ldots, \gamma_m^1 - \delta_m^1 i\})\} \oplus$
$\{\eta(\{-\gamma_1^1 - \delta_1^1 i, \ldots, -\gamma_m^1 - \delta_m^1 i\}) \oplus \eta(\{-\gamma_1^1 + \delta_1^1 i, \ldots, -\gamma_m^1 + \delta_m^1 i\})\}$.

Каждое из этих подпространств пространства V инвариантно относительно $\mathcal{A}$. В силу Леммы 2.1.2 все они J–ортогональные между собой, поэтому каждое из них является симплектическим подпространством. Кроме того, каждое из этих подпространств инвариантно относительно комплексного сопряжения, поэтому каждое из них представляет собой комплексификацию вещественного пространства. Итак, для каждого из этих пространств существуют такие симплектические координаты, в которых $\mathcal{A}$ принимает блочно диагональную форму. Кроме того, некоторые из этих пространств можно объединить, чтобы не рассматривать так много случаев. Именно, пусть

$I = X \oplus (\bigoplus_j W_j)$,
$N = \{\bigoplus_i \eta(\{-\alpha_1^1, \ldots, -\alpha_m^1\})\} \oplus \{\bigoplus_j [\eta(\{-\gamma_1^1 - \delta_1^1 i, \ldots, -\gamma_m^1 - \delta_m^1 i\}) \oplus$
$\eta(\{-\gamma_1^1 + \delta_1^1 i, \ldots, -\gamma_m^1 + \delta_m^1 i\})]\}$,
$P = \{\bigoplus_i \eta(\{\alpha_1^1, \ldots, \alpha_m^1\})\} \oplus \{\bigoplus_j [\eta(\{\gamma_1^1 - \delta_1^1 i, \ldots, \gamma_m^1 - \delta_m^1 i\}) \oplus$
$\eta(\{\gamma_1^1 + \delta_1^1 i, \ldots, \gamma_m^1 + \delta_m^1 i\})]\}$.

Лемма 2.1.7. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ означает вещественный $2n \times 2n$ полиоператор Гамильтона и пусть все его собственные функционалы обладают ненулевыми вещественными частями. Тогда существует такая вещественная $2n \times 2n$ симплектическая матрица P, что для любого $j = 1, \ldots, m$:*

$$P^{-1} A_j P = diag(B_j^T, -B_j).$$

Доказательство: Предположим, что все собственные функционалы полиоператора $\mathcal{A}$ обладают ненулевыми вещественными частями, т.е. $\Lambda_k = \{\alpha_1^k + \beta_1^k i, \ldots, \alpha_m^k + \beta_m^k i\}$, при чем для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ $\{\alpha_1^k, \ldots, \alpha_m^k\} \neq \{0, 0, \ldots, 0\}$. Тогда $\Lambda_k \in \sigma(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $(\Lambda_k, t) \in \sigma((\mathcal{A}, t))$ для всех $t \in R^m$. В частности, существует такое ненулевое $t \in R^m$, что (Λ_k, t) имеет ненулевую вещественную часть. В силу [66], Лемма D2, существует такая вещественная $2n \times 2n$ симплектическая матрица P, что

$$P^{-1}(\mathcal{A}, t) P = diag(B^T, -B),$$

где B – $n\times n$ матрица, у которой все собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Обозначим $C_j = P^{-1}A_jP$ ($j \in \{1,\dots,m\}$). Тогда $C_r \circ C_s = C_s \circ C_r$ ($r,s = 1,2,\dots,m$). Кроме того, матрицы A_j попарно коммутируют, так что для $j = 1,\dots,m$ имеем также

$$C_j \circ \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \circ C_j.$$

Поскольку C_j–матрица Гамильтона, то она удовлетворяет условию $C_j^TJ + JC_j = 0$. Учитывая два выше указанные равенства приходим к заключению, что C_j имеет требуемую форму. Кроме того, матрицы A_j и C_j подобны и отсюда следует, что у них одинаковые спектры. $\square$

2.2. Разрешимость и приводимость систем линейных однородных уравнений с периодическими коэффициентами

Рассмотрим ещё раз систему (1.1), которая обсуждалась в параграфе 1.1 первой главы. Представим эту систему и условия ее разрешимости в удобной для нас форме. Сформулируем также теорему Флоке-Ляпунова о приводимости этой системы (в случае периодических коэффициентов) к системе с постоянными коэффициентами.

Предположим, что $A_j(t)x$ – это непрерывно дифференцируемые отображения множества $R^m \times R^{2n}$ в $L(R^m; R^{2n})$ и рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial x}{\partial t_j} = A_j(t)x, \quad j = 1,2,\dots,m. \tag{2.9}$$

Напомним (см. [7]), что система (2.9) называется вполне разрешимой на множестве $R^m \times R^{2n}$, если для любой точки $(t_0, x_0) \in R^m \times R^{2n}$ существует единственное решение x этой системы определённое в некоторой окрестности S точки $t_0 \in R^m$, принимающие значение в R^{2n} и удовлетворяющие начальному условию

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.10}$$

Другими словами, система (2.9) вполне разрешима тогда и только тогда, когда однозначно разрешима задача Коши (2.9), (2.10). Согласно [7], имеет место следующая

Теорема 2.2.1. *Система (2.9) вполне разрешима в $R^m \times R^{2n}$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $(t,x) \in R^m \times R^{2n}$ выполняются*

равенства:

$$\frac{\partial A_i(t)}{\partial t_j} + A_i(t)A_j(t) = \frac{\partial A_j(t)}{\partial t_i} + A_j(t)A_i(t), \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.11)$$

$\forall t \in R^m$.

Напомним, что матрицантом системы уравнений (2.9) называется матрица $X(t)$ порядка $n \times n$, удовлетворяющая системе уравнений

$$\tfrac{\partial x}{\partial t_j} = A_j(t)x,$$

$$x(0) = I_n,$$

где I_n-единичная матрица порядка $n \times n$.

Предположим, что дифференциальная система (2.9) – вполне разрешима и что для некоторых $T_1, T_2, \ldots, T_m > 0$ и всех $j = 1, 2, \ldots, m$ коэффициенты $A_j(t) = A_j(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ этой системы уравнений суть периодические отображения переменных t_k периодов T_k, т.е. что для любых $j, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ выполняется равенство:

$$A_j(t_1, t_2, \ldots, t_k + T_k, \ldots, t_m) = A_j(t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_m). \qquad (2.12)$$

(Напомним, что совокупность периодов T_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, образует дискретную группу периодов $\Omega = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\} \subset R^m$ ранга m и что отображение A_j, удовлетворяющее для любых $k = 1, 2, \ldots, m$ равенству (2.12) называется Ω-периодической функцией.)

В этом случае, матрицант системы линейных дифференциальных уравнений (2.9) выполняет для всех $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ равенства вида:

$$X(t_1, \ldots, t_k + T_k, \ldots, t_m) = X(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_m)X(0, \ldots, T_k, \ldots, 0), \qquad (2.13)$$

где $t = (t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_m) \in R^m$, $T_k \in \Omega$.
В частности,

$$X(\omega + \sigma) = X(\omega)X(\sigma) = X(\sigma)X(\omega), \qquad (2.14)$$

для $\omega, \sigma \in \Omega$. Легко проверить, что каждая часть равенства (2.13) удовлетворяет уравнению (2.9) и что они совпадают при $t = (0, \ldots, 0)$. Кроме того, из единственности решения системы (2.9) следует тождественность обеих частей равенства (2.13).

Справедливо и обратное утверждение, т.е. если $X(t)$ - некоторая определённая на параллелепипеде о сторонах $[0, T_k]$, $T_k > 0$, неособая непрерывно дифференцируемая матрица-функция порядка $n \times n$, $X(t)$ такая,

что $X(0) = I_n$, и если одновременно $X(t)$ удовлетворяет для всех t тождеству (2.13), то $X(t)$ является матрицантом некоторого уравнения (2.9) с периодическими коэффициентами периода T. Именно, определим $A_j(t) := \frac{\partial x}{\partial t_j} X^{-1}(t)$. Поскольку матрица-функция $X^{-1}(t)$ - непрерывна и, следовательно, ограничена на определённом выше параллелепипеде, то $A_j(t)$ – непрерывные матрицы-функции. Очевидно, что для так определённых $A_j(t)$ матрица $X(t)$ выполняет равенства:

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t_j} = A_j(t)X(t).$$

Отсюда, по определению матрицанта матрица $X(t)$ является матрицантом системы уравнений вида (2.9). Кроме того, матрицы $A_j(t)$ удовлетворяют тождеству (2.12). Действительно, из равенства (2.13) вытекает:

$$A_j(t_1, \ldots, t_k + T_k, \ldots, t_m) =$$
$$= \frac{\partial X(t_1, \ldots, t_k + T_k, \ldots, t_m)}{\partial t_j} \cdot X^{-1}(t_1, \ldots, t_k + T_k, \ldots, t_m) =$$
$$= \frac{\partial X(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_m)}{\partial t_j} \cdot X(0, \ldots, T_k, \ldots, 0) \cdot [X(0, \ldots, T_k, \ldots, 0)]^{-1} \cdot$$
$$\cdot [X(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_m)]^{-1} = \frac{\partial X(t)}{\partial t_j} \cdot X^{-1}(t) = A_j(t).$$

Следовательно, $X(t)$ – матрицант некоторой системы (2.9) с периодическими коэффициентами.

Ниже приведём теорему, которая является аналогом теоремы Флоке–Ляпунова и которая встречается в работах [24, 43, 68]. Для полноты изложения напомним также доказательство этой теоремы.

Рассмотрим многомерное вполне разрешимое дифференциальное уравнение

$$X'(t)h = A(t)hX(t), \tag{2.15}$$

где $A(t)$ – это Ω–периодическая операторная функция со значениями в $L(R^m; R^{2n})$. В этим отношению систему уравнений (2.9) можно рассматривать в качестве по-координатной формы уравнения (2.15). Пусть, как и выше, $X(t)$ обозначает решение уравнения (2.15) с начальным условием $X(0) = I$.

Теорема 2.2.2. [24] *Существует пермутабельный оператор $K \in L(R^m, R^{2n})$ и непрерывно дифференцируемая Ω–периодическая операторная функция $F(t)$ такие, что*

$$X(t) = F(t)\mathrm{e}^{Kt}.$$

Доказательство. Пусть $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ будет базисом группы Ω. Рассмотрим в комплексной плоскости спектры операторов $X(\omega_1), \ldots, X(\omega_m)$. Проведём из начала координат такой луч, который не пересекается с объединением указанных спектров. Теперь выберем некоторую однозначную ветвь $\ln z$ и определим оператор K на элементах вышеуказанного базиса:

$$K\omega_j = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \ln z (z - X(\omega_j))^{-1} dz$$

для $j = 1, 2, \ldots, m$. Здесь Γ обозначает спрямляемый контур, содержащий внутри себя объединение спектров и лежащий в плоскости с разрезом.

В силу (2.14) операторы $X(\omega_j)$ – попарно перестановочны, из чего следует, что операторы $K\omega_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ также попарно перестановочны.

Продолжив оператор K (по линейному закону) на все пространство R^m, нетрудно видеть, что $K \in (L(R^m; R^{2n}))$ и что операторы $K\omega_j$ являются пермутабельными. Кроме того, в силу свойств операторной функции $X(t)$ для произвольных $a^1, \ldots, a^m \in Z$, выполнено равенство

$$X(a^1\omega_1 + \ldots + a^m\omega_m) = [X(\omega_1)]^{a^1} \ldots [X(\omega_m)]^{a^m}. \tag{2.16}$$

Так как $X(\omega_j) = \exp(K\omega_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$, то из (2.16) следует

$$X(\omega) = \mathrm{e}^{K\omega}, \quad \omega \in \Omega.$$

В силу этого, для $\omega \in \Omega$ выполнено равенство:

$$F(t + \omega) = X(t + \omega)\mathrm{e}^{-Kt - K\omega} = X(t)X(\omega)\mathrm{e}^{-K\omega - Kt} = X(t)\mathrm{e}^{-Kt} = F(t).$$

Отсюда операторная функция $F(t) = X(t)\mathrm{e}^{-Kt}$ является Ω–периодической. $\square$

Известно (см., например, [24]), что можно расширить на случай системы (2.15) такие понятия как: оператор монодромии, мультипликаторы, характеристические показатели. Именно, оператором полидромии (обозн. X_Ω) называется операторную функцию $X(t)$, рассматриваемую только на группе периодов Ω. Собственные функционалы оператора X_Ω называются мультипликаторами уравнения (2.15), а собственные линейные функционалы оператора K – называются характеристическими показателями этого уравнения.

Отметим, что мультипликаторы определяются однозначно уравнением (2.15). В то же время характеристические показатели, в силу неоднозначной определённости оператора K, определяются неоднозначно.

Легко доказать (см. [24]), что соотношения между мультипликаторами $\lambda \in \sigma(X_\Omega)$ и характеристическими показателями $\mu \in \sigma(K)$ имеют вид следующих равенств:

$$\lambda(\omega) = \mathrm{e}^{\mu\omega}, \quad \omega \in \Omega.$$

Отметим также, что приведеную выше теорему Флоке – Ляпунова можно обобщить некоторым специальным образом. Именно, функцию $F(t)$ можно выбрать так, чтобы ее группа периодов совпадала с группой периодов функции $A(t)$. Доказательство этого факта можно найти в работе [24].

2.3. Устойчивость и сильная устойчивость в линейных вполне разрешимых системах Гамильтона

Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ означает полиоператор Гамильтона, т.е. кортеж попарно коммутирующих матриц Гамильтона. Напомним, что для линейной вполне разрешимой системы (2.1) фундаментальной матрицей является $\exp(\mathcal{A}, t) := \exp(A_1 t_1 + \cdots + A_m t_m)$. Система (2.1) называется *устойчивой*, если $\exists M > 0$ такое, что $\|\exp(\mathcal{A}, t)\| < M$ для всех $t \in R^m$. Она называется *сильно устойчивой*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого полиоператора $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\} \in (sp(2n, R))^m$, $B_i \circ B_j = B_j \circ B_i$, $\|B_i - A_i\| < \varepsilon$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, неравенство $\|\exp(\mathcal{B}, t)\| < M$ выполняется для некоторого $M > 0$ и всех $t \in R^m$. Ниже будем отождествлять систему (2.1) с полиоператором правой части этой системы.

Следующий результат общеизвестен. Для полноты изложения приводим его доказательство здесь.

Теорема 2.3.1. [48] *Линейная постоянная вполне разрешимая система Гамильтона (2.1) является устойчивой тогда и только тогда, когда для любого $j = 1, 2, \ldots, m$ система Гамильтона*

$$\frac{dx}{ds} = A_j x \quad (x \in R^{2n}, s \in R) \tag{2.17}$$

устойчива.

Доказательство. Предположим, что системы (2.17) устойчивы для всех $j = 1, \ldots, m$. Отсюда, для каждого зафиксированного j существует $M_j > 0$ такое что $\|\exp(A_j t_j)\| < M_j$ $(t_j \in R)$. Положим $M = M_1 \cdot \cdots \cdot M_m > 0$. Тогда, для всех $(t_1, \ldots, t_m) \in R^m$ имеет место неравенство:

$$\|\exp(A_1 t_1 + \cdots + A_m t_m)\| = \|\exp(A_1 t_1) \cdot \cdots \cdot \exp(A_m t_m)\| < M.$$

Пусть система (2.1) устойчива, т.е. существует $M > 0$, такое, что

$$\|\exp(A_1 t_1 + \cdots + A_m t_m)\| < M \quad ((t_1, \ldots, t_m) \in R^m).$$

В частности, это неравенство выполнено для всех $(t_1, 0, \ldots, 0)$, $(0, t_2, 0, \ldots, 0)$ и так далее. Итак, получаем $\|\exp(A_j t_j)\| < M$ для $j = 1, \ldots, m$. Отсюда следует, что все системы (2.17)–устойчивы. □

Теорема 2.3.2. [48]*Пусть (2.1) будет устойчивой системой и предположим, что существует сильно устойчивый элемент* $\exp(\mathcal{A}, t_0)$ *для некоторого* $t_0 \in R^m$. *Тогда система (2.1) является сильно устойчивой.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – такое, что для каждого $B \in sp(2n, R)$ удовлетворяющего $\|B - (\mathcal{A}, t_0)\| < \varepsilon$, имеет место неравенство $\|\exp B\tau\| < \infty$ $(\tau \in R)$. Пусть $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ будет полиоператором Гамильтона ε–близким к $\mathcal{A}$, т.е. $\|B_i - A_i\| < \varepsilon$ и $B_i \circ B_j = B_j \circ B_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда $\|(\mathcal{B}, t_0) - (\mathcal{A}, t_0)\| = \|(\mathcal{B} - \mathcal{A}, t_0)\| \leq \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| \cdot \|t_0\| < \varepsilon$ и обыкновенная система дифференциальных уравнений с матрицей $(\mathcal{B}, t_0)$–сильно устойчива, если $\|\mathcal{B}\| = \frac{\varepsilon}{\|t_0\|}$. С другой стороны, $B_j \in C((\mathcal{B}, t_0))$, поэтому, в силу критерия Кушмана – Келли [39], для каждого $j = 1, 2, \ldots$ система $\dot{x} = B_j x$ – устойчива, из чего следует, что $\mathcal{B}$ – также устойчива. □

Замечание 2.3.1. Следует заметить, что сильная устойчивость полиоператора слабее, чем условие существования сильно устойчивого элемента: окрестность точки в $sl(2n, R)^m$ "больше", чем окрестность полиоператора в подмногообразии m попарно коммутирующих операторов из $sl(2n, R)^m$.

Следующий результат сводит проблему сильной устойчивости линейной вполне разрешимой системы дифференциальных уравнений Гамильтона на всем фазовым пространстве к проблеме сильной устойчивости на инвариантных симплектических подпространствах.

Теорема 2.3.3. [46, 48]*Пусть* $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ *– полиоператор Гамильтона с кратными собственными функционалами*

$$\Lambda_1 = \{i\lambda_1^1, \ldots, i\lambda_m^1\}, -\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k = \{i\lambda_1^k, \ldots, i\lambda_m^k\}, -\Lambda_k,$$

$m_1, \ldots, m_k$*–соответствующие кратности, а* V_r*–подпространство пространства* $(R^{2n})^m$ *соответствующее собственным функционалам* Λ_r *и* $-\Lambda_r$ *кратности* m_r. *Кроме того, пусть* $\mathcal{A}/V_r$ *обозначает полиоператор* $\mathcal{A}$ *ограниченный на это подпространство. Тогда* $\mathcal{A}$ *является сильно устойчивым тогда и только тогда, когда для всех* r $\mathcal{A}/V_r$*–сильно устойчив.*

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{A}$ – сильно устойчив, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого полиоператора $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$, такого, что $\|B_j - A_j\| < \varepsilon$, неравенство:

$$\|\exp(B_1 t_1 + \cdots + B_m t_m)\| < M$$

выполнено для некоторого $M > 0$ и для всех $(t_1, \ldots, t_m) \in R^m$. Докажем, что операторы $\mathcal{A}/V_r$–сильно устойчивы для $r = 1, \ldots, k$.

Напомним, что подпространство U симплектического пространства (V, ω) называется [66] симплектическим, если сужение симплектической формы ω на это подпространство является невырожденным. (Очевидно, что U имеет чётную размерность, следовательно $(U, \omega/U)$ – симплектическое пространство.) Пусть $\mathcal{B}_r = \{B_1^r, \ldots, B_m^r\}$ – полиоператор на симплектическим подпространстве V_r такой, что $\|\mathcal{A}/V_r - \mathcal{B}_r\| \leq \varepsilon$. Рассмотрим полиоператор $\mathcal{B} = \oplus_{s \neq r} \mathcal{A}/V_s \oplus \mathcal{B}_r$ на R^{2n} (здесь $\oplus$ обозначает прямую сумму операторов). Тогда $\|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| = \|\mathcal{B}_r - \mathcal{A}/V_r\| \leq \varepsilon$, поскольку $\mathcal{B}/V_s = \mathcal{A}/V_s$ для $s \neq r$.
Отсюда имеем: $\exp(\mathcal{B}, t) = \oplus_{s \neq r} \exp(\mathcal{A}/V_s, t) \oplus \exp(\mathcal{B}_r, t)$ и

$$M \geq \|\exp(\mathcal{B}, t)\| = \prod_{s \neq r} \|\exp(\mathcal{A}/V_s, t)\| \, \|\exp(\mathcal{B}_r, t)\| \, . \tag{2.18}$$

В силу теоремы Банаха–Штейнхауза имеет место неравенство

$$p = \inf_{t \in R^m} \prod_{s \neq r} \|\exp(\mathcal{A}/V_s, t)\| > 0.$$

Учитывая (2.18) получаем

$$\|\exp(\mathcal{B}_r, t)\| \leq \frac{M}{p}.$$

Итак, $\mathcal{A}/V_r$ является сильно устойчивым.

Пусть теперь операторы $\mathcal{A}/V_s$ будут сильно устойчивыми для $s = 1, \ldots, k$ и предположим, что $\mathcal{A}$ не является сильно устойчивым. Это означает, что существует последовательность $\{\mathcal{B}_k\}_{k=1}^{\infty} \to \mathcal{B}$ неустойчивых полиоператоров. В силу полунепрерывности сверху общего спектра, $\{\mathcal{B}_k\}$ имеют спектральное разложение $\{U_r^k\}$ близкое к V_r, причём $\left\|\mathcal{B}_r/U_r^{(k)} - \mathcal{A}/V_r\right\| \to 0$, при $k \to \infty$. Следовательно, существует r такое, что $\mathcal{A}/V_r$ не является сильно устойчивым. Это противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Следуя [18, 32], назовём собственный функционал $\Lambda \in C^{m*}$ определённым, если существует элемент $t_0 \in R^m$ такой, что $\exp(\Lambda, t_0)$–положительно определённое собственное значение симплектического оператора $\exp(\mathcal{A}, t_0)$.

Замечание 2.3.2. Важно заметить, что простой чисто мнимый собственный функционал является определённым и что, в этом случае, система (2.1)–сильно устойчива.

Теорема 2.3.4. [45, 46, 48] *Если общий спектр полиоператора $\mathcal{A}$ является чисто мнимым и определённым, то дифференциальная система (2.1) сильно устойчива.*

Доказательство. В силу теоремы 2.18, достаточно рассмотреть случай, когда общий спектр полиоператора $\mathcal{A}$ – это единственная точка

$$\Lambda = \{i\omega_1, i\omega_2, \ldots, i\omega_n, -i\omega_1, -i\omega_2, \ldots, -i\omega_n\}$$

некоторой кратности s.

Пусть Λ будет определённым и пусть $t_0 \in R^m$ – такой вектор, что собственное число $\exp(\Lambda, t_0)$ определено. Тогда элемент $(\mathcal{A}, t_0) \in sp(2n, R)$ является сильно устойчивым, поскольку он обладает положительно определённым первым интегралом. В силу Теоремы 2.3.2, система (2.1) является сильно устойчивой. □

В дальнейшем обобщаем некоторые критерии сильной устойчивости, сформулированные в обыкновенным случае и доказанные Р. Кушманом и А. Келли [39], М. Леви [60] и М. Вуйтковским [83].

Напомним, что для данного $A \in sp(2n, R)$, $C(A)$ обозначает централизатор матрицы A в пространстве $sp(2n, R)$, т.е. $C(A) = \{X \in sp(2n, R) : AX = XA\}$.

Теорема 2.3.5. [46, 48] *Если $\bigcup_{j=1}^m C(A_j)$ состоит из устойчивых линейных операторов Гамильтона, то система* (2.1) *сильно устойчива.*

Доказательство. Пусть $\bigcup_{j=1}^m C(A_j)$ содержит только устойчивые операторы и пусть $\{B_1, \ldots, B_m\}$ будет достаточно близким к $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$. В силу [60], каждая матрица B_j может быть представлена в виде $B_j = \exp(-T_j) \circ (A_j + D_j) \circ \exp(T_j)$ для некоторых $D_j \in C(A_j)$ и $T_j \in sp(2n, R)$. Поскольку A_j – устойчивы и $D_j \in C(A_j)$, то матрицы D_j, а следовательно и $A_j + D_j$, являются устойчивыми. Будучи подобной с устойчивой матрицей, B_j также устойчивая матрица, т.е. $\exists M > 0$ такое,

что $\|\exp(B\tau)\| \leq M$ для всех $\tau \in R$.

Если дополнительно, $B_i \circ B_j = B_j \circ B_i$, то

$$\|\exp(B_1 t_1 + B_2 t_2 + \cdots + B_m t_m)\| < M^m$$

для всех $(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in R^m$. □

Следующий результат дает необходимые условия сильной устойчивости.

Теорема 2.3.6. [46, 48] *Если система* (2.1) *сильно устойчива, то* $\bigcap_{j=1}^m C(A_j)$ *содержит только устойчивые операторы.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ будет сильно устойчивым и пусть $B_1 \in \bigcap_{j=1}^m C(A_j)$. Для $\mathcal{B} := \{B_1, 0, \ldots, 0\} \in sp(2n, R)^m$ возьмём $\varepsilon > 0$ достаточно малым, чтобы гарантировать устойчивость полиоператора $\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{B}$. Итак имеем: $\|\exp(\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{B}, t)\| < M$, $\|\exp(-\mathcal{A}, t)\| < M$ для некоторого $M > 0$ и для всех $t \in R^m$. Поскольку $B_1 \in \bigcap_{j=1}^m C(A_j)$, то $\|\exp(\varepsilon B_1 t_1)\| = \|\exp(-\mathcal{A}, t)\exp(\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{B}, t)\| \leq M^2 \quad (t \in R^m)$. □

Замечание 2.3.3. Из теорем 2.3.5 и 2.3.6 следует, что если $\bigcup_{j=1}^m C(A_j)$ содержит только устойчивые линейные операторы Гамильтона, то $\bigcap_{j=1}^m C(A_j)$ также содержит только устойчивые операторы. Возникает естественный вопрос, имеет ли место обратное утверждение. Ниже приводим контрпример к этой гипотезе.

Утверждение 2.3.1. [48] *Существуют полиоператоры* $\mathcal{A}$*, такие, что* $\bigcap_{j=1}^m C(A_j)$ *содержит только устойчивые операторы, а* $\bigcup_{j=1}^m C(A_j)$ *содержит и неустойчивые операторы.*

Доказательство. В работе [59] приведён список нормальных форм квадратичных функций Гамильтона в случае двух степеней свободы, а также квадратичных функций – дополнительных первых интегралов соответствующей линейной системы Гамильтона. Точнее, доказано, что существуют 15 различных возможных случаев. Воспользуемся этой классификацией, чтобы найти нужный нам контрпример.

Рассмотрим случай, определённый следующими условиями:
собственные значения это: $(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$, $\omega_1, \omega_2 \in R$, $\omega_1, \omega_2 \neq 0$,

$$H = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2),$$

$$K = \frac{\nu_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\nu_2}{2}(p_2^2 + q_2^2).$$

Условие гарантирующие, что размерность алгебры равняется двум, это: $\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1 \neq 0$. В этом случае для фиксированных ν_1 и ν_2 централизатор C совпадает с алгеброй порождённой интегралами H и K.

Положим $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 0$. Получаем особый случай, с $H = p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2$, $K = p_1^2 + q_1^2$ и условие $\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1 \neq 0$ выполнено. Очевидно, что для $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 1$, линейная комбинация $\alpha_1 H + \alpha_2 K = 2p_1^2 + p_2^2 + 2q_1^2 + q_2^2$ является положительно определённой квадратичной формой. Итак, полиоператор $\{A_1, A_2\}$ является сильно устойчивым.

В этом случае матрицы соответствующие интегралам H и K принимают вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следующие вычисления сделаны с помощью Компьютерной Системы Алгебраических Вычислений *"Mathematica"*. Централизаторы матриц A_1 и A_2 имеют вид:

$$C(A_1) = \{C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & -n_1 & -n_2 \\ k_3 & 0 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & n_2 & 0 & -k_3 \\ n_2 & n_3 & k_3 & 0 \end{pmatrix} : k_3, n_1, n_2, n_3 \in R\},$$

$$C(A_2) = \{C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t_1 & 0 \\ 0 & r_4 & 0 & s_3 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_3 & 0 & -r_4 \end{pmatrix} : r_4, s_3, t_1, t_3 \in R\}.$$

Следовательно,

$$C(A_1) \cap C(A_2) = \{C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} : r_4, s_3, t_1, t_3 \in R\},$$

причём нормальные формы Жордана этих матриц имеют вид:

$$JordanForm(C_3) = \begin{pmatrix} -is_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & is_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -it_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & it_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $C(A_1) \cap C(A_2)$ состоит только из устойчивых операторов. Заметим, что некоторые матрицы из $C(A_2)$ обладают вещественными собственными значениями. Пусть, на пример, $t_1 = 3$, $r_4 = 2\sqrt{2}$, $s_3 = 4$ и $t_3 = 2$. Тогда получаем $C_2 \in C(A_2)$ с собственными значениями ± 4, $\pm 3i$. Итак, $C(A_1) \cup C(A_2)$ содержит по крайней мере один неустойчивый оператор. $\square$

Вышеуказанные результаты и примеры имеют место в случае, когда размерность алгебры порождённой первыми интегралами системы максимальна, и равна m.

Возникает вопрос, что случается в ситуации, когда ранг правой части системы (2.1) падает. Следующее предложение следует из теоремы 2.3.2.

Предложение 2.3.1. [11] *Если в линейном пространстве операторов, порождённым операторами $A_1, A_2, \ldots, A_m$, существует сильно устойчивый элемент, то система (2.1) сильно устойчива.*

Ниже через $lin\{A, B, \ldots\}$ будет обозначать линейное пространство операторов, порождённое $A, B, \ldots$

Предложение 2.3.2. [11] *Если $lin\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} = lin\{A_1\}$, то система (2.1) сильно устойчива тогда и только тогда, когда A_1 сильно устойчиво.*

Доказательство. Пусть линейная вполне разрешимая система дифференциальных уравнений с полиоператором $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ сильно устойчива и пусть B_1 будет гамильтоновым оператором, близким к A_1. В силу условий предложения, существуют ненулевые числа $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ такие, что $A_2 = \alpha_2 A_1$, $A_3 = \alpha_3 A_1$, $\ldots$, $A_m = \alpha_m A_1$. В качестве возмущённого полиоператора возьмём $\mathcal{B} = \{B_1, \alpha_2 B_1, \ldots, \alpha_m B_1\}$. Очевидно, что элементы $\mathcal{B}$ попарно коммутируют, причём $\mathcal{B}$ достаточно близок к $\mathcal{A}$, поэтому устойчив. Следовательно, B_1 устойчив, что доказывает сильную устойчивость матрицы A_1. Обратное утверждение следует из теоремы 2.3.1. $\square$

2.4. Метод орбит и сильная устойчивость в линейных вполне разрешимых системах Гамильтона

Ниже мы приводим общий критерий сильной устойчивости системы (2.1) опирающийся на методе орбит (см. [1, 17, 60]). С этой целью рассмотрим подмногообразие $\mathcal{M} \subset sp(2n, R)^m$ определённое равенствами

$[A_i, A_j] = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Будем предполагать, что точка $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ является регулярной точкой многообразия $\mathcal{M}$, т.е. предположим, что существует касательное пространство $T_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$ в этой точке. Для устойчивого элемента $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ строим такую окрестность кортежа $\mathcal{A}$ в $\mathcal{M}$, которая является "почти четырёхугольником". "Горизонтальная сторона" этого четырёхугольника находится на орбите кортежа $\mathcal{A}$ под диагональным присоединённым действием группы Ли $Sp(2n, R)$ на $sp(2n, R)^m$, вторая "сторона" является ортогональной к орбите. Ортогональность определяется с помощью скалярного произведения $\mathrm{tr}AB$ на $sp(2n, R)$.

Если $\mathcal{A}$ – устойчив, то каждый генератор A_j – также устойчив, поэтому A_j является полупростым. В силу коммутативности кортеж $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ – одновременно диагонализуемый. То же самое верно и для кортежа $\{\mathrm{ad}_{A_1}, \mathrm{ad}_{A_2}, \ldots, \mathrm{ad}_{A_m}\}$, рассматриваемого в качестве линейного оператора из $sp(2n, R)$ в $sp(2n, R)^m$; обозначим его через $\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}$. (Напомним, что $\mathrm{ad}_A B = [A, B]$; последнее равно $AB - BA$, поскольку $Sp(2n, R)$ – матричная алгебра Ли.) Если $\mathcal{A}$ устойчив, то устойчивы также все элементы $\mathcal{B} \in \mathrm{orb}(\mathcal{A})$. Таким образом, необходимым и достаточным условием сильной устойчивости $\mathcal{A}$ является устойчивость всех кортежей $\{C_1, C_2, \ldots, C_m\} \in \mathcal{M}$, достаточно близких к $\mathcal{A}$ и ортогональных к орбите в точке $\mathcal{A}$. Это главный результат данной главы. В его доказательстве следуем [39] и [60].

Рассмотрим систему (2.1) с кортежем $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}^T$. Группа $Sp(2n, R)$ действует "диагонально" на $sp(2n, R)^m$:

$$\pi(g; \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}) = \{gA_1g^{-1}, gA_2g^{-1}, \ldots, gA_mg^{-1}\}.$$

Стабилизатор точки $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}^T$ – это подгруппа Ли $\mathrm{Stab}(\mathcal{A}) = \{g \in Sp(2n, R) : [A_i, g] = 0, j = 1, 2, \ldots, m\}$. Пусть $\mathrm{stab}(\mathcal{A})$ обозначает соответствующую подалгебру Ли алгебры $Sp(2n, R)$.

Утверждение 2.4.1. [11, 75] *Частная производная D_1 действия*

$$\pi : Sp(2n, R) \times sp(2n, R)^m \longrightarrow sp(2n, R)^m$$

в точке $(e, \mathcal{A})$ равняется

$$D_1\pi(e, \mathcal{A})U = \{\mathrm{ad}_{A_1}U, \mathrm{ad}_{A_2}U, \ldots, \mathrm{ad}_{A_m}U\} \quad (U \in sp(2n, R)).$$

Достаточно рассмотреть производную в единице e каждой "координатной функции" $g \longmapsto gAg^{-1}$. Известно (см., например, [1]), что эта производная равна $U \longmapsto \mathrm{ad}_A U$. $\square$

Другими словами, "вектор скорости" действия π в точке $\mathcal{A}$ и в "момент времени" $U \in sp(2n, R)$ имеет "координаты" $(\mathrm{ad}_{A_1}U, \mathrm{ad}_{A_2}U, \ldots, \mathrm{ad}_{A_m}U)$.

Следствие 2.4.1. [11, 75] *Если все $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – полупросты, то орбита*

$$orb(\mathcal{A}) = \{\pi(g; \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} : g \in Sp(2n, R)\}$$

– замкнута и касательное пространстве к этой орбите в точке $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}^T$ изоморфно (как векторное пространство) фактор-пространству

$$\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}/\mathrm{stab}(\mathcal{A})^m := (\{\mathrm{ad}_{A_1}U, \ldots, \mathrm{ad}_{A_m}U\} + \mathrm{stab}(\mathcal{A})^m \ : \ U \in sp(2n, R)).$$

Замечание 2.4.1. В обыкновенном случае $m = 1$, для полупростого линейного оператора A имеет место равенство: $\mathrm{im}\ \mathrm{ad}_A \oplus \mathrm{stab}(A) = sp(2n, R)$. В случае $m > 1$ с условием коммутативности ситуация намного более сложная.

Легко проверить, что подмножество $\mathcal{M}$ инвариантно под действием π.

Утверждение 2.4.2. [11, 75] *Касательное пространство к $\mathcal{M}$ в точке $\mathcal{A}$ равно*

$$T_{\mathcal{A}}\mathcal{M} = \{\{C_1, \ldots, C_m\} \in sp(2n, R)^m : \mathrm{ad}_{A_i}C_j = \mathrm{ad}_{A_j}C_i; i, j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Имеем

$$[A_i + \varepsilon C_i, A_j + \varepsilon C_j] = [A_i, A_j] + \varepsilon([A_i, C_j] - [A_j, C_i]) + \varepsilon^2[C_i, C_j].$$

Поскольку $[A_i, A_j] = 0$, то линейные уравнения определяющие касательное пространство суть $[A_i, C_j] - [A_j, C_i] = 0$, $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$.

Замечание 2.4.2. [11, 75] В силу инвариантности многообразия $\mathcal{M}$, условие принадлежности вектора $\mathcal{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_m)^T$ касательному пространству к орбите влечёт касание $\mathcal{C}$ с многообразием $\mathcal{M}$ в точке $\mathcal{A}$.

Другими словами, необходимым условием разрешимости переопределённой линейной системы уравнений

$$\mathrm{ad}_{A_j}U = C_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.19}$$

с попарно коммутирующими операторами левой части ("точность") является условие

$$\mathrm{ad}_{A_i}C_j = \mathrm{ad}_{A_j}C_i \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.20}$$

(т.е. "замкнутость").

Напомним (см., например [1]), что $\langle A, B\rangle := Tr(AB)$ определяет скалярное произведение на $sp(2n, R)$. Расширим его до покоординатного скалярного произведения на $sp(2n, R)^m$ следующим образом: для $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}^T$, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}^T$, определим

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle A_i, B_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{tr} A_i B_i.$$

Используя свойства следа матрицы, показываем, что для любых $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\} \in Sp(2n, R)^m$ и $U \in Sp(2n, R)\backslash \operatorname{stab}(\mathcal{A})$ имеет место серия равенств:

$$\langle \operatorname{ad}_{\mathcal{A}} U, \mathcal{C}\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle \operatorname{ad}_{A_i} U, C_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle [A_i, U], C_i\rangle =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \langle U, [A_i, C_i]\rangle = -\left\langle U, \sum_{i=1}^{m} [A_i, C_i]\right\rangle.$$

Из этого получаем следующее условие ортогональности:

Утверждение 2.4.3. [11, 75] *Кортеж* $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}^T \in sp(2n, R)^m$ *ортогонален к орбите в точке* $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}^T$ *тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{i=1}^{m} [A_i, C_i] = 0$.

Действительно, в силу следствия 2.4.1, для всех $U \in Sp(2n, R)\backslash \operatorname{stab}(\mathcal{A})$ вектор $\operatorname{ad}_{\mathcal{A}} U$ не равен нулю и касается орбиты в точке $\mathcal{A}$. С другой стороны, доказанные выше равенства показывают, что тождество $\langle \operatorname{ad}_{\mathcal{A}} U, C\rangle = 0$ ($U \in Sp(2n, R)\backslash \operatorname{stab}(\mathcal{A})$) имеет место тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{m} [A_i, C_i] = 0$.

Если обозначить через $\operatorname{ad}_{\mathcal{A}^*}$ линейный оператор–строку

$$\{\operatorname{ad}_{A_1}, \operatorname{ad}_{A_2}, \ldots, \operatorname{ad}_{A_m}\},$$

то можем отождествить касательное пространство в точке $\mathcal{A} \in sp(2n, R)^m$ с $\operatorname{im} \operatorname{ad}_{\mathcal{A}}/\operatorname{stab}(\mathcal{A})^m \oplus \ker \operatorname{ad}_{\mathcal{A}^*}$, где $\operatorname{im} \operatorname{ad}_{\mathcal{A}}/\operatorname{stab}(\mathcal{A})^m$ – это касательное пространство к орбите в точке $\mathcal{A}$, а $\ker \operatorname{ad}_{\mathcal{A}^*}$ – ортогональное дополнение.

Лемма 2.4.1 (О трубчатой окрестности). [75] *Пусть полиоператор Гамильтона* $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \in sp(2n, R)^m$ *– полупростой. Тогда существует диффеоморфизм окрестности* $\mathcal{A} \in sp(2n, R)^m$ *на окрестность нуля в* $Sp(2n, R)/\operatorname{stab}(\mathcal{A}) \oplus \ker \operatorname{ad}_{\mathcal{A}^*}$.

Доказательство. Ниже мы отождествляем касательное пространство к орбите в точке $\mathcal{A}$ с $\operatorname{im}\operatorname{ad}_{\mathcal{A}}$, а последнее – с $sp(2n,R)/\mathrm{stab}(\mathcal{A})$.

Рассмотрим отображение

$$\Psi : Sp(2n,R)/\mathrm{stab}(\mathcal{A}) \oplus \ker \operatorname{ad}_{\mathcal{A}^*} \to Sp(2n,R)^m,$$

определённое равенством

$$\Psi(T; C_1, C_2, \ldots, C_m) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-T}(A_1 + C_1)\mathrm{e}^{T} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{-T}(A_m + C_m)\mathrm{e}^{T} \end{bmatrix}.$$

Производная в точке $(0; 0, \ldots, 0)$ этого отображения имеет вид:

$$\mathcal{D}(0;0)(T;\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} \operatorname{ad}_{A_1} T \\ \vdots \\ \operatorname{ad}_{A_m} T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix},$$

где $T \in Sp(2n,R)$, а $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\} \in sp(2n,R)^m$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{i=1}^{m}[A_i, C_i] = 0$. Поэтому правая часть принадлежит $\operatorname{im}\operatorname{ad}_{\mathcal{A}} \oplus \ker \operatorname{ad}_{\mathcal{A}^*}$.

В силу разложения $Sp(2n,R)^m = \operatorname{im}\operatorname{ad}_{\mathcal{A}} \oplus \ker \operatorname{ad}_{\mathcal{A}^*}$, линейный оператор $\mathcal{D}(0;0) : Sp(2n,R)/\mathrm{stab}(\mathcal{A}) \oplus \ker \operatorname{ad}_{\mathcal{A}^*} \to Sp(2n,R)^m$ является изоморфизмом. В силу теоремы об обратном отображении, функция Ψ является локальным диффеоморфизмом. □

Следствие 2.4.2. *Каждый кортеж $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\} \in sp(2n,R)^m$ достаточно близкий к полупростому кортежу $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ может быть представлен однозначно как сдвиг при диагональным присоединённым действии группы $Sp(2n,R)$ на $sp(2n,R)^m$ некоторого кортежа $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$, ортогонального к орбите элемента $\mathcal{A}$.*

Напомним, что многообразие $\mathcal{M}$ инвариантно при диагональным присоединённым действием, поэтому, если $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ и достаточно близкий к $\mathcal{A}$, то имеет место

Лемма 2.4.2 (Об адаптированной трубчатой окрестности)**.** [75] *Пусть полиоператор $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \in \mathcal{M}$ – полупростой. Тогда каждый полиоператор $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ достаточно близкий к $\mathcal{A}$ можно однозначно представить как сдвиг при диагональным присоединённым действии некоторого элемента $\mathcal{D} \in \mathcal{M}$ ортогонального к орбите.*

Доказательство. Действительно, в силу леммы о трубчатой окрестности, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ имеет вид $\pi^g(\mathcal{D})$ для некоторого $\mathcal{D} \in \ker \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^*}$. Поскольку $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$, а многообразие $\mathcal{M}$ инвариантно при диагональным присоединённым действии, то $\mathcal{D} \in \mathcal{M}$. $\square$

В качестве следствия из леммы об адаптированной трубчатой окрестности получаем основной результат этого параграфа:

Теорема 2.4.1. [75] *Полупростой гамильтонов полиоператор $\mathcal{A}$ является сильно устойчивым тогда и только тогда, когда каждый кортеж $\mathcal{D} \in \mathcal{M} \cap \ker \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^*}$, достаточно близкий к $\mathcal{A}$, является устойчивым.*

В качестве частных случаев получаем необходимые условия сильной устойчивости (Теоремы 2.3.5 и 2.3.6).

Действительно, пусть полиоператор $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \in \mathcal{M}$ сильно устойчив. Мы должны показать, что любая гамильтонова матрица $C \in \bigcap_{j=1}^m C(A_j)$ является устойчивой. Для этого рассмотрим полиоператор $\mathcal{C} = \{C, 0, 0, \ldots, 0\} \in \mathcal{M}$. Поскольку $[A_j, C] = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, m$, то полиоператор $\mathcal{D} = \mathcal{A} + \mathcal{C}$ удовлетворяет условиям теоремы, т.е. $\mathcal{A} + \mathcal{C} \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{C} \in \ker \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^*}$. Действительно,

$$[A_i + C_i, A_j + C_j] = [A_i, A_j] + [A_i, C_j] + [A_j, C_i] + [C_i, C_j] = 0$$

в силу выбора $\mathcal{C}$ а также того факта, что $[A_i, A_j] = 0$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Второе включение равносильно равенству $\sum\limits_{j=1}^{m} [A_j, C_j] = 0$, которое в нашем случае, сводится к равенству $[A_1, C] = 0$.

Следовательно, кортеж $\mathcal{C} = \{C, 0, 0, \ldots, 0\}$ устойчив, а вместе с ним и матрица C тоже устойчива.

Замечание 2.4.3. Вместо кортежа $\{C, 0, 0, \ldots, 0\}$ можно было рассмотреть другой кортеж, а именно, $\{C, C, C, \ldots, C\}$.

2.5. Комплексный росток и сильная устойчивость для линейных вполне разрешимых систем Гамильтона с многомерным временем

Ниже обобщаем некоторые условия устойчивости на случай многомерного времени. Рассмотрим линейную гамильтонову многомерную систему (2.1). Тогда справедлива

Теорема 2.5.1. [50, 74] *Если система (2.1) обладает комплексным ростком то она устойчива.*

Доказательство. Пусть для системы (2.1) существует комплексный росток. Поскольку этот росток инвариантен при изменении времени в каждым одномерным направлению, то он инвариантен также для каждой обыкновенной системы $\frac{dx}{dt} = JA_jx$. Из этого следует (см. [3]), что все эти системы устойчивы, и следовательно, устойчива также система (2.1). □

Теорема 2.5.2. [50, 74] *Если система (2.1) устойчива и обладает простым общим спектром, то существует единственный комплексный росток.*

Доказательство. Условие устойчивости означает, что каждый из операторов $J^CA_1, J^CA_2, \ldots, J^CA_m$ является полупростым и обладает чисто мнимым спектром. Условие простоты общего спектра означает, что существует элемент $h \in R^m$, $h \neq 0$ такой, что собственные числа оператора $J\left\langle {}^CA, h\right\rangle$ попарно различны. Следовательно существует собственный базис для $J\left\langle {}^CA, h\right\rangle$, т.е. для $J\left\langle {}^CA, h\right\rangle$ существуют $2n$ спектрально разделённых инвариантных C - одномерных подпространств. В силу спектральной разделённости каждое такое порпространство инвариантно относительно всех операторов коммутирующих с ${}^CA$, поэтому указанный выше базис является собственным для всех операторов ${}^CA_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. В силу [3] подпространство $E \subset^C R^{2n}$ определённое системой уравнений $p_j - iq_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$ является единственным комплексным ростком для обыкновенной системы с матрицей $J\left\langle {}^CA, h\right\rangle$. Но тогда это же подпространство – единственный комплексный росток и исходной системы (2.1). □

Обозначим через $g^t := \exp(J\langle A, t\rangle)$ m-параметрическую группу линейных операторов, порождённую линейной системой (2.1).

Теорема 2.5.3. [50, 74] *Если существует сильно устойчивый элемент, то система (2.1) обладает единственным комплексным ростком.*

Доказательство. Пусть существует ненулевой вектор $h = (h_1, \ldots, h_m)$, $h \in R^m$ такой, что линейная обыкновенная система дифференциальных уравнений с матрицей правой части $J\langle A, h\rangle := JA_1h_1 + JA_2h_2 + \ldots + JA_mh_m \in sp(2n, R)$ сильно устойчива. Тогда в силу [3] линейная обыкновенная система Гамильтона

$$\dot{x} = J\langle A, h\rangle x \tag{2.21}$$

обладает единственным комплексным ростком E, т.е. E единственное лагранжево подпространство инвариантное относительно системы (2.21) и положительно определённое.

С другой стороны, поскольку $\exp(J\langle A,t\rangle)$ вещественное симплектическое преобразование, то подпространство $E_t := \exp(J\langle A,t\rangle)(E)$ также лагранжево и положительно определено.

Действительно, любые $\xi_t, \eta_t \in E_t$ имеют вид $\exp J\langle A,t\rangle\,\xi$ и соответственно $\exp(J\langle A,t\rangle)\eta$ для некоторых $\xi,\eta \in E$, поэтому $[\xi_t,\eta_t] = [\exp J\langle A,t\rangle\,\xi, \exp J\langle A,t\rangle\,\eta] \equiv [\xi,\eta] = 0$.

С другой стороны, в силу вещественности $\exp J\langle A,t\rangle$, имеет место тождество

$$\frac{1}{2i}[\xi_t,\bar{\xi}_t] = \frac{1}{2i}[\xi,\bar{\xi}] > 0 \quad (\forall t \in R^m, \xi \in E).$$

Кроме того

$$g^t(E) = g^t(g^h(E)) = g^h(g^t(E)), \tag{2.22}$$

для всех $t \in R^m$, т.е. $g^t(E)$ также инвариантно под действием оператора g^h. В силу единственности комплексного ростка E, из (2.22) получаем, что $g^t(E) = E$ для всех $t \in R^m$, т.е. E является комплексным ростком системы (2.1). □

Выводы к главе 2

В первом параграфе второй главы сформулированы и доказаны основные свойства общего спектра семейства попарно коммутирующих гамильтоновых матриц. Кроме того доказываются некоторые результаты теории нормальных форм семейств гамильтоновых матриц в полупростом случае.

Остальные параграфы второй главы посвящены исследованию условий устойчивости и сильной устойчивости линейных вполне разрешимых автономных систем Гамильтона. Следуя принадлежащей М.Г. Крейну теории знако-определённых собственных значений, вводится понятие знако-определённых собственных функционалов гамильтонова полиоператора. С помощью этого понятия сформулирован и доказан критерий сильной устойчивости рассматриваемых систем.

В этой же главе обобщаются известные критерии сильной устойчивости, полученные для обыкновенного случая Р. Кушманом и А. Келли, а также М. Леви и М. Вуйтковским. Именно, сформулированы и доказаны необходимые, а также некоторые достаточные условия сильной устойчивости, опирающиеся на понятии общего централизатора семейства матриц.

В теореме 2.4.1, в терминах метод орбит присоединённых действий группы Ли $Sp(2n, R)$, сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия сильной устойчивости линейной вполне разрешимой системы Гамильтона. Эта теорема является основным результатом третьей главы.

Г Л А В А 3

СИЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА И ЛИНЕЙНЫХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ ГРУППЫ Z^m

3.1. Линейные вполне разрешимые уравнения с Ω-периодическими коэффициентами и отображения за периоды

Рассмотрим систему уравнений вида (2.9), где

$$\mathcal{A}(t) = \{A_1(t), A_2(t), \ldots, A_m(t)\}$$

– это Ω-периодическая вектор-функция времени $t \in R^m$. Ω обозначает здесь множество периодов, $\Omega = \{T_j : j = 1, 2, \ldots, m\}$, т.е. множество таких значений T_j, для которых выполнены равенства вида $A(t_1, \ldots, t_j + T_j, \ldots, t_m) = A(t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_m)$.

Периодичность функций $A_j(t)$ влечёт за собой некоторые особые свойства фазового потока системы уравнений (2.9). Как следствие из свойств матрицанта, получаем следующие результаты:

Лемма 3.1.1. *Преобразование фазового пространства в течение времени от t_1 до t_2, $g_{t_1}^{t_2} : F \to F$ не изменяется при одновременным увеличении t_1 и t_2 на вектор периода $T_j \in \Omega$ правой части системы (2.9).*

Обозначим через $g^t : F \to F$ преобразование, которое точке $x \in F$ приписывает значение $g^t x = \varphi(t)$, которое принимает в точке t решение системы (2.9) определённое начальным условием $\varphi(0) = x$. В частности, рассмотрим преобразования $g_0^{T_j}$, порождённые фазовым потоком за время одного периода $T_j \in \Omega$. Это преобразование назовём отображением за период T_j и обозначим через $\bar{A}_j$, $\bar{A}_j : F \to F$, $\bar{A}_j x(0) = x(T_j)$.

Лемма 3.1.2. *Преобразования $\{g_0^{n_1 T_1} \circ g_0^{n_2 T_2} \circ \ldots \circ g_0^{n_m T_m} : (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in Z^m\}$ образуют коммутативную группу.*

Следующая теорема сводит задачу об устойчивости и сильной устойчивости для линейных периодических систем к соответствующей задаче для дискретных действий группы Z^m, группы порождённой полиоператором Пуанкаре $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_m\}$.

Теорема 3.1.1. *Система (2.9) является устойчивой (сильно устойчивой) тогда и только тогда, когда соответствующий ей полиоператор Пуанкаре – устойчив (сильно устойчив).*

Доказательство: Согласно определению система (2.9) является устойчивой, если её решения ограничены. Поскольку известно (см. параграф 1.1 первой главы), что это решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$ представимое в виде $g_{t_0}^t = W(t)W^{-1}(t_0)$, $x(t, t_0, x_0) = g_{t_0}^t x_0$, то проблема устойчивости рассматриваемой системы сводится к проблеме устойчивости соответствующего её полиоператора Пуанкаре. □

В силу этого в дальнейшем будем исследовать сильную устойчивость для дискретных действий полиоператора Пуанкаре $\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_m\}$ (в дальнейшей части данной главы будем обозначать этот полиоператор через $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$).

3.2. Нормальные формы некоторых симплектических полиоператоров

Поскольку в данной главе, изучаются условия устойчивости линейных "дискретных" симплектических систем, то ее первый параграф посвящен проблеме построения нормальных форм некоторых симплектических полиоператоров.

Пусть $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\} \in (Sp(2n.R))^m$ – означает полиоператор, т.е. кортеж попарно коммутирующих, симплектических операторов $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

Предложение 3.2.1. [71]*Если $M = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\} \in \sigma(\mathcal{T})$ – точка общего спектра полиоператора $\mathcal{T}$, то функционалы $M^{-1} = \{\mu_1^{-1}, \ldots, \mu_m^{-1}\}$, $\overline{M} = \{\overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_m\}$ и $\overline{M}^{-1} = \{(\overline{\mu}_1)^{-1}, \ldots, (\overline{\mu}_m)^{-1}\}$ также принадлежат общему спектру полиоператора $\mathcal{T}$.*

Доказательство: Если $\mathcal{T} \in (Sp(2n, R))^m$, то $\mathcal{T}$ может быть представлен в виде $\exp \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \in (sp(2n, R))^m$. Так как $M \in \sigma(\mathcal{T})$ тогда и только когда, когда $M \in \sigma(\exp \mathcal{A})$, то $\ln M = \{\ln \mu_1, \ln \mu_2, \ldots, \ln \mu_m\} \in \sigma(\mathcal{A})$. В силу леммы 2.1.1 для $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ выполняется условие: $\Lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \to -\Lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ и потому получаем, что $-\ln M \in \sigma(\mathcal{A})$. Отсюда $\exp(\ln M^{-1}) \in \exp(\sigma(\mathcal{A}))$ и следовательно $M^{-1} \in \sigma(\mathcal{T})$.

Обозначим $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$, $(\Xi, M) = (\xi_1\mu_1 + \cdots + \xi_m\mu_m)$, и так далее.

В силу теоремы 6.2.2 (см. [61]) $M \in \sigma(\mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда $(\Xi, M) \in \sigma((\Xi, \mathcal{T}))$ для всех Ξ in R^m. Согласно лемме A29.1 (см. [1]) $\overline{(\Xi, M)} \in \sigma((\Xi, \mathcal{T}))$, или, что равносильно, $(\Xi, \overline{M}) \in \sigma((\Xi, \mathcal{T}))$ для всех $\Xi \in R^m$. Используя вышеупомянутую теорему 6.2.2, получаем, что $\overline{M} \in \sigma(\mathcal{T})$.

Из предыдущих рассуждений следует также, что

$$\{(\overline{\mu}_1)^{-1}, (\overline{\mu}_2)^{-1}, \ldots, (\overline{\mu}_m)^{-1}\} \in \sigma(\mathcal{T}).$$

Если $T_i \in M_{2\times 2}$ для $i = 1, 2, \ldots, m$, то теорема 3.2.1 может быть доказана непосредственно. Для такого доказательства нужно сделать несколько алгебраических вычислений. Именно:
Пусть $T_i = \begin{pmatrix} t_{11}^i & t_{12}^i \\ t_{21}^i & t_{22}^i \end{pmatrix}$ для $i = 1, 2, \ldots, m$.
Тогда, учитывая что

$$\forall \eta_1', \ldots, \eta_m' \in R \ \det(\eta_1' T_1 + \cdots + \eta_m' T_m - (\eta_1' \lambda_1 + \cdots + \eta_m' \lambda_m) E) = 0$$

и $\forall i = 1, \ldots, m \ \det(T_i - \lambda_i E) = 0$ нетрудно установить результат:
$\forall \eta_1, \ldots, \eta_m \in R \ \det(\eta_1 T_1 + \cdots + \eta_m T_m - (\eta_1 \lambda_1^{-1} + \cdots + \eta_m \lambda_m^{-1}) E) = 0.$
Предложение доказано. □

Лемма 3.2.1. [71]*Пусть $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ и $M = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ – характеристические функционалы симплектического полиоператора $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$. Предположим, что существует $j \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что $\lambda_j \mu_j \neq 1$. Тогда $[x, y] = 0$. Другими словами, общие собственные векторы соответствующие общим собственным функционалам Λ и M являются J-ортогональными.*

Доказательство: Поскольку: $T_j x = \lambda_j x$ и $T_j y = \mu_j y$ $\forall j = 1, \ldots, m$, получаем, что: $\lambda_j \mu_j [x, y] = [\lambda_j x, \mu_j y] = [T_j x, T_j y] = [x, y]$ $\forall j = 1, \ldots, m$. Так как $\lambda_j \mu_j \neq 1$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$, и $(\lambda_j \mu_j - 1)[x, y] = 0$ $\forall j = 1, \ldots, m$, то $[x, y] = 0$. Лемма доказана. □

Следствие 3.2.1. *Пусть $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$ – симплектический полиоператор размерности $2n \times 2n$ с попарно различными собственными функционалами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n, \Lambda_1^{-1}, \ldots, \Lambda_n^{-1}$. Тогда существует симплектическая матрица S, такая, что*

$$S^{-1} T_j S = \mathrm{diag}(\lambda_1^{(j)}, \ldots, \lambda_n^{(j)}, (\lambda_1^{(j)})^{-1}, \ldots, (\lambda_n^{(j)})^{-1}) \ \ \forall j = 1, \ldots, m.$$

Доказательство: Общий спектр $\sigma(\mathcal{T})$ является простым тогда и только тогда, когда существует $t \in R^m$, такое, что спектр $\sigma((\mathcal{T}, t))$ симплектического оператора $(\mathcal{T}, t)$ простой, т.е.

$$\sigma((\mathcal{T}, t)) = \{(\Lambda_1, t), \ldots, (\Lambda_n, t), (\Lambda_1, t)^{-1}, \ldots, (\Lambda_n, t)^{-1}\}$$

– простой. (Пусть $\sigma((\mathcal{T},t)) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_1^{-1},\dots,\lambda_n^{-1}\}$.) Тогда существует такая матрица S (зависящая от t), что

$$S^{-1}(\mathcal{T},t)S = diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_1^{-1},\dots,\lambda_n^{-1}).$$

Докажем, что матрица S – искомая.
Пусть $B_j = S^{-1}T_jS$. Тогда $B_r \circ B_s = B_s \circ B_r$, для всех $r,s \in \{1,2,\dots,m\}$. Кроме того:

$$B_j \circ \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_1^{(-1)},\dots,\lambda_n^{(-1)}) = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_1^{(-1)},\dots,\lambda_n^{(-1)}) \circ B_j.$$

Последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $b_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$. Кроме того, учитывая что B_j – симплектическая матрица, имеем $B_j^T J B_j = J$. Это эквивалентно тому, что $b_{1,1}b_{n+1,n+1} = 1,\dots,b_{n,n}b_{2n,2n} = 1$. Заметим ещё, что матрицы T_j и B_j подобны, потому они обладают одинаковым спектром. Следовательно $B_j = \mathrm{diag}(\lambda_1^{(\mathrm{j})},\dots,\lambda_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{j})},(\lambda_1^{(\mathrm{j})})^{-1},\dots,(\lambda_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{j})})^{-1})$. □

Пусть теперь $\mathcal{T}$ будет вещественной симплектической полиматрицей с попарно различными собственными функционалами $\sigma(\mathcal{T}) = (\Lambda_1,\dots,\Lambda_n,\Lambda_1^{-1},\dots,\Lambda_n^{-1})$. Собственные функционалы оператора $\mathcal{T}$ разделяются на следующие три группы:

1) вещественные собственные функционалы $M_1^{\pm 1},\dots,M_s^{\pm 1} \in (R^m)^*$,

2) собственные функционалы $A_1 \pm B_1 i,\dots,A_r \pm B_r i$, такие, что $|A_j \pm iB_j| = 1$, $j = 1,2,\dots,m$,

3) комплексные функционалы с модулем неравным единице $\pm\Gamma_1 \pm \Delta_1 i,\dots,\pm\Gamma_t \pm \Delta_t i$, такие, что $|\pm\Gamma_j \pm \Delta_j i| \neq 1$ для некоторых j.

Это распределение спектра определяет разложение пространства V в прямую сумму

$$V = (\oplus_j U_j) \oplus (\oplus_l W_l) \oplus (\oplus_k Z_k),$$

где

$U_j = \eta(M_j) \oplus \eta(M_j^{-1})$,

$W_l = \eta(A_l + B_l i) \oplus \eta(A_l - B_l i)$,

$Z_k = \{\eta(\Gamma_k + \Delta_k i) \oplus \eta(\Gamma_k - \Delta_k i)\} \oplus \{\eta(\Gamma_k + \Delta_k i)^{-1} \oplus \eta(\Gamma_k - \Delta_k i)^{-1}\}$.

Каждая составная является инвариантным подпространством относительно оператора $\mathcal{T}$. В силу Леммы 3.2.1 эти пространства являются J–ортогональными между собой и следовательно симплектическими подпространствами. Кроме того, каждое из этих трёх подпространств – это комплексификация вещественного пространства, поэтому является инвариантным при комплексном сопряжении. Отсюда следует, что существуют такие симплектические координаты, относительно которых $\mathcal{T}$

принимает блочно диагональную форму. В силу этого дальше мы будем рассматривать каждое из этих пространств отдельно.

Лемма 3.2.2. [71]*Пусть* $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$ *будет* 2×2 *симплектическим полиоператором с вещественными собственными функционалами* $M = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ *и* $M^{-1} = \{\mu_1^{-1}, \ldots, \mu_m^{-1}\}$, $M \neq \{1, \ldots, 1\}$. *Тогда существует вещественная* 2×2 *симплектическая матрица* S *такая, что:*

$$S^{-1}T_jS = \begin{pmatrix} \mu_j & 0 \\ 0 & \mu_j^{-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство: Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ будут ненулевыми общими собственными векторами соответствующими попарно различным собственным функционалам $M = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ and $M^{-1} = \{\mu_1^{-1}, \ldots, \mu_m^{-1}\}$. Тогда получаем $\forall j = 1, \ldots, m : T_jX = \mu_jX$ и $T_jY = \mu_j^{-1}Y$. Итак X и Y являются линейно независимыми и $[X, Y] \neq 0$.

Вторая часть доказательства следует [61], Lemma C10. Пусть $U = [X, Y]^{-1}Y$, итак векторы X, U составляют вещественную симплектическую базу, $S = (X, U)$ является вещественной симплектической матрицей, а S это матрица данной леммы. □

Лемма 3.2.3. [71]*Пусть* $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$ *будет вещественным* 2×2 *симплектическим полиоператором с собственными функционалами* $A \pm Bi$, $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ *и* $\forall j = 1, \ldots, m$ $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$, $\beta_j \neq 0$. *Тогда существует вещественная* 2×2 *симплектическая матрица* S *такая, что имеет место в точности одно из следующих равенство:*
$S^{-1}T_jS = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, *или* $S^{-1}T_jS = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$.

Доказательство: Пусть $\forall j = 1, \ldots, m$: $T_jX = (\alpha_j + i\beta_j)X$ и пусть $X = U + Vi \neq 0$. Итак, $\forall j = 1, \ldots, m$: $T_jU = \alpha_jU - \beta_jV$ а также $T_jV = \alpha_jV + \beta_jU$. Поскольку $U + iV$ и $U - iV$ являются C–линейно независимыми, то U и V также являются R–линейно независимыми. Отсюда $[U, V] = Z \neq 0$. В случае, когда $Z = \gamma^2 > 0$, определим $S = (\gamma^{-1}U, \gamma^{-1}V)$ для получения первой формы; для $Z = -\gamma^2 < 0$, определим $S = (\gamma^{-1}V, \gamma^{-1}U)$, чтобы получить второю. □

Лемма 3.2.4. [71]*Пусть* $\mathcal{T}$ *будет вещественным* 2×2 *симплектическим полиоператором с собственными функционалами* $A \pm Bi$ *и* $\forall j =$

$1,\dots,m$ $\alpha_j^2+\beta_j^2=1$, $\beta_j\neq 0$. *Тогда существует* 2×2 *матрица* S *такая, что*

$$S^{-1}T_jS=\begin{pmatrix}\alpha_j+i\beta_j & 0\\ 0 & \alpha_j-i\beta_j\end{pmatrix}.$$

Доказательство: Пусть $\forall j=1,\dots,m$: $T_jX=(\alpha_j+i\beta_j)X$ и пусть $X=U+Vi\neq 0$. Тогда получаем: $[X,\overline{X}]=[U+iV,U-iV]=[U,U]+[U,-iV]+[iV,U]+[iV,-iV]=-i[U,V]+i[V,U]=2i[V,U]\neq 0$. Пусть $\gamma=1/|[V,U]|$. Тогда $S=(\gamma X,\gamma\overline{X})$ – искомая матрица. □

Лемма 3.2.5. [71] *Пусть* $\mathcal{T}$ *будет* 4×4 *симплектическим полиоператором с собственными функционалами* $(\Gamma\pm\Delta i)^{-1}$, $\delta_j\neq 0$ $\gamma_j^2+\delta_j^2\neq 1$. *Тогда существует вещественная* 4×4 *симплектическая матрица* S *такая, что* $\forall j=1,\dots,m$

$$S^{-1}T_jS=\begin{pmatrix}B_j^T & 0\\ 0 & B_j^{-1}\end{pmatrix},$$

где B_j *– вещественная* 2×2 *матрица с собственными значениями* $\gamma_j\pm\delta_j i$.

Доказательство: Поскольку общий спектр полиоператора $\mathcal{T}$ является простым, то существует ненулевой вектор $t\in R^m$, такой, что:$\sigma((\mathcal{T},t))=\{(\Gamma+\Delta i,t),(\Gamma-\Delta i,t),(\Gamma+\Delta i,t)^{-1},(\Gamma-\Delta i,t)^{-1}\}$. Итак, получаем: $\sigma((\mathcal{T},t))=\{\gamma+\delta i,\gamma-\delta i,(\gamma+\delta i)^{-1},(\gamma-\delta i)^{-1}\}$, где $\gamma=(\Gamma,t)$, а также $\delta=(\Delta,t)$. Заметим, что при наших предположениях $\gamma\neq 0$ и $\delta\neq 0$. Тогда в силу [66], Лемма C12 существует вещественная 4×4 симплектическая матрица S (вообще говоря, зависящая от t) такая, что

$$S^{-1}(\mathcal{T},t)S=\begin{pmatrix}B^T & 0\\ 0 & B^{-1}\end{pmatrix},$$

где B – вещественная 2×2 матрица с собственными значениями $\gamma\pm\delta i$. Докажем, что S – искомая матрица. Положим $C_j=S^{-1}T_jS$ ($j=1,\dots,m$). Тогда $C_r\circ C_s=C_s\circ C_r$. Кроме того, в предположении, что T_j – попарно коммутируют, получаем $\forall j=1,\dots,m$:

$$C_j\begin{pmatrix}B^T & 0\\ 0 & B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^T & 0\\ 0 & B^{-1}\end{pmatrix}C_j.$$

Учитывая выше указанное равенство, а также тот факт, что каждое C_j это симплектическая матрица (то есть $C_j^TJC_j=J$) приходим к равенству

$$C_j=\begin{pmatrix}B_j^T & 0\\ 0 & B_j^{-1}\end{pmatrix}.$$

Кроме того, матрицы T_j и C_j $(j = 1, \ldots, m)$ подобны и следовательно их спектры совпадают, то есть $\{\gamma+\delta i, \gamma-\delta i, (\gamma+\delta i)^{-1}, (\gamma-\delta i)^{-1}\}$. Лемма доказана. $\square$

3.3. Устойчивость и сильная устойчивость линейных симплектических полиоператоров

Определение 3.3.1. [71] *Будем говорить, что оператор A – полупростой если он диагонализуемый.*

Замечание 3.3.1. Легко заметить, что оператор является полупростым тогда и только тогда, когда для любого инвариантного подпространства существует дополнительное инвариантное подпространство.

Определение 3.3.2. [71]*Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ будет полиоператором. Говорим, что подпространство V $\mathcal{A}$–инвариантное, если оно инвариантное под действием A_j, $\forall j = 1, \ldots, m$.*

Определение 3.3.3. [71] *Будем говорить, что полиоператор $\mathcal{A}$ – полупростой, если для каждого $\mathcal{A}$–инвариантного подпространства U существует дополнительное подпространство W, которое также является $\mathcal{A}$–инвариантным.*

Докажем вспомогательную теорему:

Теорема 3.3.1. [72] *Симплектический полиоператор $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$ является устойчивым тогда и только тогда, когда для любого $j = 1, 2, \ldots, m$ симплектический оператор T_j–устойчив.*

Доказательство. Предположим, что операторы T_j – устойчивы для $j = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда, для каждого фиксированного j существует $M_j > 0$ такое, что $\left\|T_j^{k_j}\right\| < M_j$ $(k_j \in Z)$. Положим $M = M_1 \cdot M_2 \cdot \cdots \cdot M_m > 0$. Тогда для всех $(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in Z^m$ имеют место неравенства:

$$\left\|T_1^{k_1} \circ T_2^{k_2} \circ \cdots \circ T_m^{k_m}\right\| \leq \left\|T_1^{k_1}\right\| \cdot \left\|T_2^{k_2}\right\| \cdot \cdots \cdot \left\|T_m^{k_m}\right\| < M.$$

Пусть $\mathcal{T}$ будет устойчивым. Это означает, что существует $M > 0$, такое, что

$$\left\|T_1^{k_1} \circ T_2^{k_2} \circ \cdots \circ T_m^{k_m}\right\| \leq M, \quad (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in Z^m.$$

В частности, это неравенство имеет место для всех $(k_1, 0, \ldots, 0)$, $(0, k_2, 0, \ldots, 0)$ и так далее. Итак, имеем $\left\|T_j^{k_j}\right\| < M$ для всех $k_j \in Z$ и всех $j = 1, 2, \ldots, m$. Следовательно все операторы T_j являются устойчивыми. $\square$

Определение 3.3.4. *Множество* $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in C^n$ *такое, что* $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$ *называем единичным тором в* C^n.

Теорема 3.3.2. [49, 71] *Симплектический полиоператор* $\mathcal{T}$ *является устойчивым тогда и только тогда, когда все его собственные функционалы лежат на единичным торе и* $\mathcal{T}$ *– полупростой.*

Доказательство: Пусть все собственные функционалы полиоператора $\mathcal{T}$ лежат на единичном торе, $\mathcal{T}$ – полупростой, но в то же время, полиоператор $\mathcal{T}$ – неустойчив. В силу теоремы 3.3.1 существует $j \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что последовательность итераций оператора T_j – неограниченна по норме. Но тогда либо оператор T_j имеет собственные значения по модулю больше единицы, либо существует клетка Жордана. Оба эти предположения противоречат исходным данным.

Обратно, пусть $\mathcal{T}$ будет устойчивым симплектическим полиоператором и предположим, что либо $\mathcal{T}$ – не полупростой, либо существует собственный функционал полиоператора $\mathcal{T}$, который не лежит на единичным торе. Можно легко заметить, что в каждом из этих двух случаев существует $j \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что T_j – неограниченный, из чего следует неустойчивость полиоператора $\mathcal{T}$. □

Теорема 3.3.3. [72] *Пусть* $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\} \in (Sp(2n, R))^m$ *будет устойчивым и пусть существует сильно устойчивый элемент* $\mathcal{T}^{k_0} = T_1^{k_1^0} \cdot T_2^{k_2^0} \cdot \ldots \cdot T_m^{k_m^0}$ *для некоторого* $k_0 = (k_1^0, k_2^0, \ldots, k_m^0) \in Z^m$. *Тогда* $\mathcal{T}$ *является сильно устойчивым.*

Доказательство. Допустим, что существует k_0 такое, что $\mathcal{T}^{k_0}$–сильно устойчив. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $R \in Sp(2n, R)$, удовлетворяющего неравенству $\left\|R - \mathcal{T}^{k_0}\right\| < \varepsilon$, имеет место неравенство $\left\|R^k\right\| < \infty$ $(\forall k \in Z)$.

Пусть $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ будет симплектическим полиоператором таким, что $R_i \circ R_j = R_j \circ R_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ и пусть $\mathcal{R}$ будет достаточно близким к $\mathcal{T}$, чтобы гарантировать, что $\left\|\mathcal{R}^{k_0} - \mathcal{T}^{k_0}\right\| < \varepsilon$. Тогда, существует $\varepsilon_1 = \min(\left\|\mathcal{R}^{k_0} - \mathcal{T}^{k_0}\right\|, \varepsilon - \left\|\mathcal{R}^{k_0} - \mathcal{T}^{k_0}\right\|)$ такое, что все операторы ε_1–близкие к $\mathcal{R}^{k_0}$, являются устойчивыми. Отсюда следует, что $\mathcal{R}^{k_0}$ является сильно устойчивым. С другой стороны, $R_j \in C(\mathcal{R}^{k_0})$, поэтому, в силу Теоремы 1.7.3, R_j являются устойчивыми (для $j = 1, 2, \ldots, m$). В силу Теоремы 3.3.1, $\mathcal{R}$ – устойчив, и следовательно, $\mathcal{T}$ – сильно устойчив. □

Следующая теорема показывает, что проблему сильной устойчивости симплектического полиоператора на всем пространстве можно свести к

проблеме такой устойчивости на инвариантных симплектических подпространствах.

Теорема 3.3.4. [72] *Пусть* $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ *будет симплектическим полиоператором с кратными собственными функционалами*

$$\Lambda_1 = \{\cos\lambda_1^1 + i\sin\lambda_1^1, \ldots, \cos\lambda_m^1 + i\sin\lambda_m^1\}, \Lambda_1^{-1}, \ldots,$$

$$\Lambda_k = \{\cos\lambda_1^k + i\sin\lambda_1^k, \ldots, \cos\lambda_m^k + i\sin\lambda_m^k\}, \Lambda_k^{-1},$$

и пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *означают соответствующие кратности, а* V_r*— подпространство пространства* R^{2n} *соответствующего собственным функционалам* Λ_r *и* Λ_r^{-1} *кратности* m_r*. Кроме того, пусть* $\mathcal{T}/V_r$ *обозначает полиоператор* $\mathcal{T}$ *ограниченный на этом подпространстве. Тогда* $\mathcal{T}$ *является сильно устойчивым тогда и только тогда, когда* $\mathcal{T}/V_r$*–сильно устойчивы для всех* r*.*

Доказательство. Пусть все вышеуказанные предположения будут выполнены и пусть полиоператор $\mathcal{T}$ будет сильно устойчивым. Тогда $\mathcal{T} = \{\exp(A_1), \exp(A_2), \ldots, \exp(A_m)\}$, где $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$–сильно устойчивый полиоператор Гамильтона. Такое $\mathcal{A}$ имеет кратные собственные функционалы

$$\tilde{\Lambda}_1 = \{i\lambda_1^1, \ldots, i\lambda_m^1\}, -\tilde{\Lambda}_1, \ldots, \tilde{\Lambda}_k = \{i\lambda_1^k, \ldots, i\lambda_m^k\}, -\tilde{\Lambda}_k$$

соответствующей кратности $m_1, \ldots, m_k$. V_r–подпространство соответствующие собственным функционалам $\tilde{\Lambda}_r$ и $-\tilde{\Lambda}_r$. Итак, в силу Теоремы 2.3.3 $\mathcal{A}/V_r$ является сильно устойчивым для всех r и $\mathcal{T}/V_r = \exp(\mathcal{A})/V_r$ является сильно устойчивым для всех r. □

Определение 3.3.5. [72] *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ *будет собственным функционалом симплектического полиоператора* $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$*. Если существует* $k = \{k_1, \ldots, k_m\} \in Z^m$ *такое, что* (Λ, k) *является положительно (соотв. отрицательно) определённым собственным значением симплектического преобразования* $T_1^{k_1} \circ T_2^{k_2} \circ \cdots \circ T_m^{k_m}$*, то будем говорить, что* Λ *положительно (соотв. отрицательно) определённый собственный функционал полиоператора* $\mathcal{T}$*.*

Следующие результаты являются дискретными аналогами результатов из второго параграфа второй главы. Их доказательства аналогичны, потому приводим их в сокращении.

Теорема 3.3.5. [49, 72] *Если общий спектр полиоператора* $\mathcal{T}$ *лежит на единичным торе и является определённым, то* $\mathcal{T}$*–сильно устойчив.*

Доказательство. В силу Теоремы 3.3.4, достаточно рассмотреть случай, когда общим спектр полиоператора $\mathcal{T}$–это единственная точка $\Lambda =$

$$= \{\cos\omega_1 + i\sin\omega_1, \ldots, \cos\omega_n + i\sin\omega_n, \cos\omega_1 - i\sin\omega_1, \ldots, \cos\omega_n - i\sin\omega_n\}$$

кратности s. Пусть Λ будет определённым и пусть $k_0 = (k_1^0, k_2^0, \ldots, k_m^0) \in Z^m$ будет таким, что (Λ, k_0) – определено.

Тогда элемент $\mathcal{T}^{k_0} = T_1^{k_1^0} \cdot T_2^{k_2^0} \cdot \cdots \cdot T_m^{k_m^0} \in Sp(2n, R)$ является сильно устойчивым, поскольку он обладает положительно определённым первым интегралом. Из Теоремы 3.3.3 следует, что $\mathcal{T}$–сильно устойчив. □

Для $T \in Sp(2n, R)$ пусть $C(T)$ обозначает централизатор оператора T в $Sp(2n, R)$.

Теорема 3.3.6. [49,72] *Если* $\bigcup_{j=1}^m C(T_j)$ *состоит из устойчивых линейных симплектических операторов, то* $\mathcal{T}$ *является сильно устойчивым.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ будет симплектическим полиоператором и пусть $\bigcup_{j=1}^m C(T_j)$ содержит только устойчивые операторы. Следовательно, для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ централизатор $C(T_j)$ состоит из устойчивых операторов и отсюда, в силу Теоремы 1.7.3, каждый оператор T_j является сильно устойчивым. Тогда $T_j = \exp(A_j)$, где $A_j \in sp(2n, R)$ – сильно устойчив.

Пусть теперь $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ будет достаточно близким к $\mathcal{T}$, чтобы гарантировать сильную устойчивость каждого R_j. Тогда $R_j = \exp(B_j)$, $B_j \in sp(2n, R)$, B_j – сильно устойчивая матрица. В силу [60] B_j может быть представлена в виде $B_j = \exp(-T_j)(A_j + D_j)\exp(T_j)$, где $D_j \in C(A_j)$ и $T_j \in sp(2n, R)$, поскольку B_j является достаточно близким к устойчивой матрицы A_j. Далее, получаем $R_j = \exp(B_j) = \exp(-T_j)\exp(A_j + D_j)\exp(T_j)$, и $R_j = \exp(B_j) = \exp(-T_j)\exp(A_j)\exp(D_j)\exp(T_j)$. Поскольку $\exp(A_j)$–устойчива и $\exp(D_j)$–устойчива, то таковой будет также матрица $\exp(A_j + D_j)$. Отсюда следует, что $\exists M > 0$ такое, что $\left\| R_j^{k_j} \right\| \leq M$ для всех $k_j \in Z$. Если дополнительно, $R_i \circ R_j = R_j \circ R_i$, то $\left\| R_1^{k_1} \cdot R_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot R_m^{k_m} \right\| < M^m$ для всех $(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in Z^m$. □

Теорема 3.3.7. [49, 72] *Если* $\mathcal{T}$ *является сильно устойчивым, то* $\bigcap_{j=1}^m C(T_j)$ *состоит из устойчивых операторов.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ будет сильно устойчивым симплектическим полиоператором. Так как

$$\mathcal{T} = \{\exp(A_1), \exp(A_2), \ldots, \exp(A_m)\},$$

для некоторого сильно устойчивого полиоператора Гамильтона $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, то $\bigcap_{j=1}^m C(A_j)$ является устойчивым для всех $j = 1, 2, \ldots, m$. Кроме того, имеем

$$T \in \bigcap_{j=1}^m C(T_j) \Leftrightarrow \forall j : T \cdot \exp(A_j) = \exp(A_j) \cdot T \Leftrightarrow \forall j : TA_j = A_jT \Leftrightarrow$$

$T \in \bigcap_{j=1}^m C(A_j)$.

Итак, T является устойчивым. □

Замечание 3.3.2. Если $\bigcup_{j=1}^m C(T_j)$ состоит из устойчивых линейных симплектических операторов, то $\bigcap_{j=1}^m C(T_j)$ содержит также только устойчивые операторы. Возникает естественный вопрос, является ли верным обратное утверждение. Ниже приводим контрпример к этой гипотезе.

Утверждение 3.3.1. [49, 72] *Существуют полиоператоры $\mathcal{T}$ такие, что $\bigcap_{j=1}^m C(T_j)$ состоит из устойчивых операторов, но $\bigcup_{j=1}^m C(T_j)$ содержит неустойчивые операторы.*

Доказательство. Для доказательства используем классификацию пар гамильтоновых матриц, проведенную в , соответствующих гамильтониану H и "дополнительному" интегралу K, где

$$H = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2),$$

$$K = \frac{\nu_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\nu_2}{2}(p_2^2 + q_2^2).$$

Условие гарантирующие, что размерность алгебры первых интегралов равняется двум, это: $\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1 \neq 0$. В этом случае для фиксированных ν_1 и ν_2 централизатор C совпадает с алгеброй порождённой интегралами H и K.

Положим $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 0$. Тогда получаем частный случай, где $H = p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2$, $K = p_1^2 + q_1^2$ и условие $\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1 \neq 0$ выполнено. Очевидно, что для $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 1$ линейная комбинация $\alpha_1 H + \alpha_2 K = 2p_1^2 + p_2^2 + 2q_1^2 + q_2^2$ является положительно определённой квадратичной формой. В силу теоремы 2.3.4, полиоператор $\{A_1, A_2\}$ является сильно устойчивым.

В этом случае матрицы соответствующие интегралам H и K принимают вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следующие вычисления сделано с помощью Компьютерной Системы Алгебраических Вычислений *"Mathematica"*.

Рассмотрим симплектические преобразования

$$T_1 = \exp(A_1) = \begin{pmatrix} \cos(2) & 0 & -\sin(2) & 0 \\ 0 & \cos(2) & 0 & -\sin(2) \\ \sin(2) & 0 & \cos(2) & 0 \\ 0 & \sin(2) & 0 & \cos(2) \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \exp(A_2) = \begin{pmatrix} \cos(2) & 0 & -\sin(2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(2) & 0 & \cos(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Их собственные значения это: $\cos(2) - i\sin(2)$, $\cos(2) - i\sin(2)$, $\cos(2) + i\sin(2)$, $\cos(2) + i\sin(2)$ для матрицы T_1 и 1, 1, $\cos(2) - i\sin(2)$, $\cos(2) + i\sin(2)$ для T_2.

Централизаторы матриц T_1 и T_2 имеют вид:

$$C(T_1) = \{C_1 = \exp \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & -n_1 & -n_2 \\ k_3 & 0 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & n_2 & 0 & -k_3 \\ n_2 & n_3 & k_3 & 0 \end{pmatrix} : k_3, n_1, n_2, n_3 \in R\},$$

$$C(T_2) = \{C_2 = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t_1 & 0 \\ 0 & r_4 & 0 & s_3 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_3 & 0 & -r_4 \end{pmatrix} : r_4, s_3, t_1, t_3 \in R\}.$$

Итак,

$$C(T_1) \cap C(T_2) = \{C_3 = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} : r_4, s_3, t_1, t_3 \in R\},$$

$$JordanForm(C_3) = \begin{pmatrix} \exp(-is_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(is_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-it_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(it_1) \end{pmatrix}.$$

Отсюда, $C(T_1) \cap C(T_2)$ состоит из устойчивых операторов. Заметим, что некоторые матрицы из $C(T_2)$ обладают вещественными собственными значениями. Пусть, на пример, $t_1 = 3$, $r_4 = 2\sqrt{2}$, $s_3 = 4$ и $t_3 = 2$. Тогда получаем $C_2 \in C(T_2)$ с собственными значениями $\exp(\pm 4)$, $\exp(\pm 3i)$. Итак, $C(T_1) \cup C(T_2)$ содержит по крайней мере один неустойчивый оператор. $\square$

Выводы к главе 3

Третья глава посвящена симплектическим действиям группы Z^m. Во втором разделе сформулированы и доказаны основные свойства общего спектра симплектического полиоператора, а также некоторые результаты относительно нормальных форм семейств симплектических операторов в полупростом случае.

В этой же главе формулируются и доказываются необходимые и достаточные условия сильной устойчивости для линейных вполне разрешимых систем Гамильтона с многопериодическими коэффициентами на языке семейств попарно коммутирующих симплектических операторов полидромии. Основные результаты третьей главы являются дискретным аналогом соответствующих теорем из главы второй.

Используя методы компьютерной алгебры автор приводит примеры семейств симплектических матриц с теми, или иными свойствами устойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены:

— Необходимые и достаточные условия сильной устойчивости линейных автономных вполне разрешимых систем дифференциальных уравнений Гамильтона [11, 45, 46, 48, 50].

— Необходимые и достаточные условия сильной устойчивости дискретных линейных автономных вполне разрешимых симплектических систем и линейных действий Пуассона группы Z^m [49, 72].

— Критерий сильной устойчивости линейных многопериодических систем Гамильтона с многомерным временем [75].

— Условия существования комплексного ростка Маслова и его связь с условиями устойчивости линейных симплектических действий абелевых групп [74].

— Нормальные формы линейных Гамильтоновых и симплектических полиоператоров в полупростом случае [71].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 432 с.

2. *Арнольд В.И., Гивенталь А.Б.* Симплектическая геометрия. — Ижевск: НИЦ "РХД", 2000. — 168 с.

3. *Валиньо А.Б., Доброхотов С.Ю., Нехорошев Н.Н.* Комплексный росток в системах с одной циклической переменной // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, № 3(237). — С. 233–234.

4. *Гайшун И.В.* К теории Флоке–Ляпунова уравнений в полных производных // Доклады Акад. наук БССР. — 1978. — Т. 22, № 8. — С. 690–693.

5. *Гайшун И.В.* Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами // Доклады Акад. наук БССР. — 1979. — Т. 23, № 8. — С. 684–686.

6. *Гайшун И.В.* Представление Флоке для уравнений в полных производных // Дифференц. уравнения. — 1979. — Т. 15, № 12. — С. 2125–2129.

7. *Гайшун И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. — Минск: Наука и техника, 1983. — 272 с.

8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

9. *Гельфанд И.М., Лидский В.Б.* О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // УМН. — 1955. — Т. 10, вып. 1(63). — С. 3–40.

10. *Гельфанд И.М., Пономарев В.А.* Замечание о классификации пар коммутирующих линейных операторов в конечномерном пространстве // Функциональный анализ и его приложения. — 1969. — Т. 3, № 4. — С. 81–82.

11. *Главан В.А., Жешутко З.* Сильная устойчивость линейных гамильтоновых систем с многомерным временем // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: В 2 ч. Ч.1: Материалы

международной конференции. / Мин-во образования РБ; Белорусский гос. ун-т; Ин-т математики НАН Беларуси; Ин-т математики НАН Украины; Брестский гос. ун-т им. А.С.Пушкина; Отв. за вып. Чичурин А.В. — Минск: БГПУ, 2005. — Ч. 1. — С. 82–86.

12. *Годунов С.К., Садкане М.* Численное определение канонической формы симплектической матрицы // Сибирский математический журнал. — 2001. — Том 42, № 4. — С. 749–770. — Режим доступа: http://www.emis.de/journals/SMZ/2001/04/749.pdf

13. *Годунов С.К.* Устойчивость итераций симплектических преобразований // Сиб. мат. журн. — 1989. — Т. 30, № 1. — С. 54–63.

14. *Грудо Э.И.* О решениях периодической системы уравнений в полных дифференциалах // Изв. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1970. — № 3. — С. 35–44.

15. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. — 1951. — Т. 21, вып. 5. — С. 588–598.

16. *Карклинь И.П.* Приведение линейного уравнения Пфаффа с периодическими коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами // Латв. мат. ежегодник. — 1975. — Вып. 16. — С. 208–211.

17. *Кириллов А.А.* Лекции по методу орбит. — Новосибирск: Научная книга, 2002. — 290 с.

18. *Крейн М.Г.* Обобщение некоторых исследований А.М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами // Доклады Акад. наук СССР. — 1950. — Т. 73, № 3. — С. 445–448.

19. *Мартынюк Д.И., Солодко В.Э.* Теория Флоке–Ляпунова для систем линейных многомерных уравнений // Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. і мех. — 1970. — № 12. — С. 74–75.

20. *Маслов В.Р.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, 1977. — 384 с.

21. *Перов А.И.* О многомерных линейных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами // Доклады Акад. наук СССР. — 1964. — Т. 154, № 6. — С. 1266–1269.

22. *Перов А.И.* О топологических характеристиках решений многомерных дифференциальных уравнений // Доклады Акад. наук СССР. — 1964. — Т. 157, № 4. — С. 791–794.

23. *Перов А.И., Задорожный В.Г.* К теории линейных многомерных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. — 1970. — Т. 22, № 2. — С. 182–188.

24. *Перов А.И., Задорожный В.Г.* О многомерных линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами // Изв. вузов. Математика. — 1970. — № 5. — С. 64–73.

25. *Стрыгин В.В.* Малые периодические решения систем Гамильтона с векторным временем // Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та. — 1970. — Вып. 2. — С. 27–31.

26. *Фоменко А.Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 413 с.

27. *Цегельник В.В.* Гамильтонианы, связанные с первым уравнением Пенлеве // Доклады НАН Беларуси. — 2001. — Т. 45, № 5. — С. 45–47.

28. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.

29. *Яцкин Н.И.* Вопросы приводимости линейных дифференциальных уравнений на многообразиях к специальному виду // Доклады Акад. наук СССР. — 1975. — Т. 220, № 4. — С. 792–794.

30. *Яцкин Н.И.* Теория Ляпунова–Флоке и аффинные отображения // Укр. мат. журн. — 1979. — Т. 31, № 5. — С. 604–606.

31. *Audin M., Cannas da Silva A., Lerman E.* Symplectic geometry of integrable Hamiltonian systems. — Barcelona: A Birkhäuser book: Advanced Courses in Mathematics, 2003. — 235 p.

32. *Arnold V.I., Avez A.* Problemes ergodiques de la mecanique classique — Paris: Gauthier-Villars, 1967. — 243 p.

33. *Burgoyne N., Cushman R.* Normal forms for real linear Hamiltonian systems with purely imaginary eigenvalues // Celest. Mech. — 1979. — № 8. — P. 435–443.

34. *Burgoyne N., Cushman R.* Normal forms for real linear Hamiltonian systems // The 1976 Ames Research Center (NASA) Conf. Geometric Control Theory. — Brookline: Math. Sci. Press, 1977. — P. 483–529.

35. *Butcher E.A., Sinha S.C.* On the construction of transformations of linear Hamiltonian systems to real normal forms // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2000. — Vol. 10, № 9. — P. 2177–2191.

36. *Cannas da Silva, A.* Lectures on symplectic geometry. // Lecture Notes in Mathematics. — Berlin: Springer-Verlag, 2004. — Vol. 1764. — 217 p.

37. *Cannas da Silva, A.* Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry. — Lecture notes for the IMPA (Rio de Janeiro) short course delivered in February of 2002, Publicaзo es Matematicas do IMPA, 2003. — Режим доступа: http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/Books/impa.pdf

38. *Churchill R.C., Kummer M.* A unified approach to linear and nonlinear normal forms for Hamiltonian systems // J. Symbolic Computation. — 1999. — Vol. 27. — P. 49–131.

39. *Cushman R., Kelly A.* Strongly stable real infinitesimal symplectic mappings // J.Diff.Eq. — 1979. — № 31(2). — P. 200–223.

40. *Cushman R., Sanders J.A.* Nilpotent normal forms and representation theory of $sl(2, R)$ // Multi-parameter Bifurcation Theory, Contemporary Mathematics. — Providence: AMS, 1986. — № 56. — P. 31–51.

41. *Cushman R., Sanders J.A.* Invariant theory and normal form of Hamiltonian vectorfields with nilpotent linear part // Proc. 1986 Canadian Mathematical Society Annual Seminar on Oscillation, Bifurcation, and Chaos. — Providence: AMS, 1987. — Vol. 8. — P. 353–371.

42. *Deprit A.* Lectures in Applied Mathematics // American Mathematical Society. — Providence, 1966. — Vol. 6. — P. 9–14.

43. *Gérard R.* Le théorème de Floquet pour les systémes de la forme $dX = (\sum\limits_{k=1}^{n} P_k(t_1, t_2, \ldots, t_n)dt_k)X$ // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat. — 1966. — Vol. 20, № 3. — P. 537–541.

44. *Glavan V.* Strong stability criteria for the linear Hamilton-Pfaff systems // "*Mathematica*" system in teaching and research: Proceedings of the international workshop on "*Mathematica*" system in teaching and research. / Russian Academy of Sciences, Computing Center; University of Podlasie, Poland, Institute of Mathematics and Physics. — Moscow, 2000. — P. 70–72.

45. *Glavan V., Rzeszótko Z.* On strongly stable linear Poisson actions // Третьи научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвящённые 80-летию со дня рождения Ю.С.Богданова: Тез. докл. международ. конф., Минск, 26 февраля – 1 марта 2001 г. / Белорусский гос. ун-т; Ин-т математики НАН Беларуси; Госкомитет по науке и технологиям. — Ин-т математики НАН Белоруси, 2001. — С. 87.

46. *Glavan V., Rzeszótko Z.* On strong stability of Hamiltonian polyoperators // Боголюбовские чтения V: Тез. международ. матем. конф., Каменец-Подольский, май 2002 г. — Каменец-Подольский, 2002.

47. *Glavan V., Rzeszótko Z.* Solving linear integral – differential equations with CAS *Mathematica* // Еругинские чтения – VIII: Тез. докл. международ. матем. конф., Брест, 20–23 мая 2002 г. / Белорусский гос. ун-т; Ин-т математики НАН Беларуси; Учрежд. образования "Брестский гос. ун-т им. А.С.Пушкина". — Брест: Издатель С.Б.Лавров, 2002. — С. 37.

48. *Glavan V., Rzeszótko Z.* On strong stability of linear Poisson actions // Buletin. Acad. Ştiinţe Republ. Moldova. Matematica. — 2003. — № 2(42) — P. 5–12.

49. *Glavan V., Rzeszótko Z.* On strong stability of symplectic polyoperators // Еругинские чтения – IX: Тез. докл. международ. матем. конф., Витебск, 20–22 мая 2003 г. / Мин-во образования РБ; Ин-т математики НАН Беларуси; Учрежд. образования "Витебский гос. ун-т им. П.М.Машерова"; Учрежд. образования "Белорусский гос. ун-т". — Витебск: Издательство УО "ВГУ им. П.М.Машерова", 2003. — С. 99–100.

50. *Glavan V., Rzeszótko Z.* Stability and reducibility conditions for linear completely integrable systems // IX Белорусская математическая конференция: В 3 ч. Ч.1: Тезисы докладов, Гродно, 3–6 ноября 2004

г. / Мин-во образования РБ; Белорусское математич. общество; Ин-т математики НАН Беларуси; БГУ; Гродненский гос. ун-т им. Я.Купалы. Отв. за вып. Пронько В.А. — Гродно: ГрГУ, 2004. — Ч. 1. — С. 95–96.

51. *Guralnick R.M., Sethuraman B.A.* Commuting pairs and triples of matrices and related varieties // Linear Algebra Appl. — 2000. — № 310. — P. 139–148.

52. *Ikramov Kh.D.* Indecomposable Hamiltonian matrices with a purely imaginary spectrum // Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. — 1988 — Vol. 28, № 12. — P. 1897–1902.

53. *Ikramov Kh.D.* Reducibility conditions and canonical forms of Hamiltonian matrices with purely imaginary eigenvalues // Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. — 1991. — Vol. 31, № 8. — P. 1123–1130.

54. *Koçak H.* Linear Hamiltonian systems are integrable with quadratics // J. Math. Phys. — 1982. — Vol. 23, № 12. — P. 2375–2380.

55. *Koçak H.* Normal forms and versal deformations of linear Hamiltonian systems // J. Diff. Eqns. — 1984. — Vol. 51. — P. 359–407.

56. *Koçak H.* Quadratic integrals of linear Hamiltonian systems // Monat. Math. — 1984. — Vol. 98. — P. 53–63.

57. *Lang S.* Undergraduate analysis. — New York: Springer Verlag, LLC, 1997. — 668 p.

58. *Laub A.J., Meyer K.R.* Canonical forms for symplectic and Hamiltonian matrices // Celest. Mech. — 1974. — Vol. 9. — P. 213–238.

59. *Lerman L.M., Umanskiy Ya.L.* Four-dimensional integrable Hamiltonian systems with simple singular points (Topological aspects) // American Mathematical Society: Translations of Mathematical Monographs. — Vol. 176. — Providence, 1998. — 177 p.

60. *Levi M.* On stability of symplectic maps // J.Diff.Eq. — 1983. — Vol. 50, № 3. — P. 441–443.

61. *Livšic M.S., Kravitsky N., Marcus A.S. and Vinnikov V.* Theory of commuting nonselfadjoint operators. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. — Vol. 332. — 340 p.

62. *Lukashevich N.A., Chichurin A.V.* On existence of the surfaces that are generated by nonlinear differential equations of the second order // Vestsi Akademii Navuk Belarusi. Series of phisical–mathematical sciences. — Minsk: Belaruskaya Navuka, 1997. — № 3. — P. 44–47.

63. *Maeda S.* Canonical structure and symmetries for discrete systems // Math. Japon. — 1980. — Vol. 25. — P. 405–420.

64. *Maeda S.* Completely integrable symplectic mapping // Proc. Japan. Acad. Ser. A. — 1987. — Vol. 63. — P. 198–200.

65. *Maeda S.* Quadratic conservatives of linear symplectic system // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1988. — Vol. 64, № 2. — P. 45–48.

66. *Meyer K.R., Hall G.R.* Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N - Body Problem. — New York: Springer-Verlag, 1992. — P. 312.

67. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // Commun. Pure Appl. Math. — 1958. — Vol. 11. — P. 81–114.

68. *Pini B.* Su certe di periodicita e asinticita per i sistemi lineari del primo ordine ai differenziali totali // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1951. — Vol. 20, № 2. — P. 249–277.

69. *Robinson R.C.* Lectures on Hamiltonian systems. — Guanabara: Instituto de Matematica Pura e Applicada, 1971. — 83 p.

70. *Roels J., Louterman G.* Normalisation des systèmes linéaires canoniques et application au problème restreint des trois corps // Celest. Mech. — 1970. — Vol. 3. — P. 129–140.

71. *Rzeszótko Z.* Stability of linear Poisson symplectic actions // The Third International Workshop on *Mathematica* System in Teaching and Research: Proceedings of the international conference. / University of Podlasie — Siedlce: Wydawnictwo Akademii Podlaskiej, 2001. — P. 155–162.

72. *Rzeszótko Z.* Stability and strong stability in linear symplectic Z^m - actions // Приложения системы "Mathematica" в социальных процессах и математической физике: Сб. трудов междунар. науч. семинара. / Учрежд. образования "Брестский гос. ун-т им. А.С.Пушкина"; Wyższa Szkola Finansów i Zarzadzania w Siedlcach,

Polska. — Брест: Изд-во БрГУ им. А.С.Пушкина, 2003. — С. 185–196.

73. *Rzeszótko Z.* Computer algebra system *Mathematica* and its application for solving differential – integral – shift equations // Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике: Сб. науч. ст. междунар. конф. / Редкол.: Н.Н.Труш (отв. ред.) и др. — Минск: БГУ, 2004. — С. 23–26.

74. *Rzeszótko Z.* Устойчивость и комплексный росток в линейных вполне интегрируемых системах Гамильтона // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітета імя Янкі Купалы. Сер.2. — 2005. — № 2. — С. 68–76.

75. *Rzeszótko Z.* Strong stability of linear symplectic actions and the orbit method // Buletin. Acad. Ştiinţe Republ. Moldova. Matematica. — 2005. — № 2(48). — P. 99–103.

76. *Shcherbacov B.A.* The principle of composition of multidimensional dynamical systems // Bull. AS RM. — 1994. — № 1(14). — P. 55–59.

77. *Shcherbacov B.A.* Multidimensional dynamical systems // Diff. Eq. — 1994. — Vol. 30, № 5. — P. 679–686.

78. *Siegel C.L., Moser J.* Lectures on celestial mechanics. // Die Grundlehren der Mathematische Wissenschaften in Einzeldarstellungen — New York: Springer-Verlag, 1971. — Band 187. — 97 p.

79. *Tabachnikov S.* Introduction to symplectic topology // Lecture notes. — Penn State, 2002. — Режим диступа: http://www.math.psu.edu/tabachni/courses/symplectic.pdf

80. *Williamson J.* On the algebraic problem conserning the normal forms of linear dynamical systems // Am. J. Math. — 1936. — Vol. 58. — P. 141–163.

81. *Williamson J.* On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics // Am. J. Math. — 1937. — Vol. 59. — P. 599–617.

82. *Williamson J.* The exponential representation of canonical matrices // Am. J. Math. — 1939. — Vol. 61. — P. 897–911.

83. *Wójtkowski M. P.* A remark on strong stability of linear Hamiltonian systems // J.Diff.Eq. — 1989. — № 81(2) — P. 313–316.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Применение компьютерной системы алгебраических вычислений *Mathematica* для определения сильной устойчивости линейных систем Гамильтона с двухмерным и трёхмерным временем

Пример 1. Рассмотрим пару гамильтоновых матриц $\{A_1, A_2\}$ соответствующих квадратичному гамильтониану H и дополнительному интегралу K, где

$$H = \frac{\omega}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \kappa\frac{\omega}{2}(p_2^2 + q_2^2),$$

$$K = \frac{d_{11}}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{d_{22}}{2}(p_2^2 + q_2^2) + d_{12}(p_2q_1 - \kappa p_1q_2) + d_{21}(\kappa p_1p_2 + q_1q_2).$$

$\kappa = \pm 1$.

Условие гарантирующие, что размерность алгебры первых интегралов, порожденной квадратичными формами H и K, равна двум имеет вид (см. [59], случай 8)

$$(d_{11} - \kappa d_{22})^2 + \omega d_{12}^2 + d_{21}^2 \neq 0.$$

Положим $\kappa = -1$, $\omega = 2$, $d_{11} = -2$, $d_{12} = 1$, $d_{21} = 0$, $d_{22} = 2$. Тогда получаем

$$H = p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2, \qquad K = -(p_1 - \frac{1}{2}q_2)^2 + \frac{5}{4}p_2^2 + \frac{5}{4}q_2^2 - (q_1 - \frac{1}{2}p_2)^2,$$

а также соответственные матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

с нормальными формами

$$J_1 = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} -1-2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2i \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица A_1 является устойчивой (но не сильно устойчивой, поскольку соответствующий ее гамильтониан не является определённым), а матрица A_2 - неустойчива. Отсюда следует, что и кортеж $\{A_1, A_2\}$

неустойчив.

Среди кортежей $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$ матриц Гамильтона выполняющих условия теоремы 2.4.1, т.е. $\mathcal{D} \in \mathcal{M} \cap \ker \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^*}$ (удовлетворяющих равенствам $A_1D_1 - D_1A_1 + A_2D_2 - D_2A_2 = 0$ и $D_1D_2 = D_2D_1$) находятся матрицы вида

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & c & 0 \\ a & 0 & 0 & -c \\ -c & 0 & 0 & -a \\ 0 & c & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & u & w & 0 \\ u & 0 & 0 & -w \\ -w & 0 & 0 & -u \\ 0 & w & -u & 0 \end{pmatrix}.$$

Хотя они диагонализуемые, но их собственные значения имеют вид $\pm(a + ic)$, $\pm(a - ic)$ $(a, c \in R)$, т.е. имеют ненулевые действительные части. Следовательно эти матрицы D_1, D_2 неустойчивы, что согласно с теоремой 2.4.1.

Пример 2. Следующий пример соответствует случаю 7 в классификации Л.М.Лермана и Я.Л.Уманского [59].

$$H = \frac{\kappa}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega(p_2q_1 - p_1q_2),$$

$$K = \frac{\tau}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \sigma(p_2q_1 - p_1q_2),$$

где $\kappa = \pm 1$.

Собственные значения кратности два матрицы A_1 – это: $(\pm i\omega, \pm i\omega)$, $\omega \in R$, $\omega \neq 0$. Матрица A_1 имеет два блоки Жордана размерности два.

Условие обеспечивающие, что размерность абелевой алгебры, порождённой функциями H и K, равняется двум, это:

$$\kappa\sigma - \tau\omega \neq 0.$$

Положим $\kappa = 1$, $\omega = 0,5$, $\tau = 2$, $\sigma = 0$. Тогда получаем следующие гамильтонианы:

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}(p_2q_1 - p_1q_2), \qquad K = q_1^2 + q_2^2,$$

причём соответственные матрицы имеют вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нормальные формы Жордана этих матриц это, соответственно,

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицы A_1, A_2, а также кортеж $\{A_1, A_2\}$ - неустойчивы.

В этом случае существуют такие матрицы D_1, D_2, удовлетворяющие условиям определённым в теореме 2.4.1, собственные числа которых – чисто мнимые: $\pm ia$ $(a \in R)$, но их каноническая форма Жордана имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} -ia & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -ia & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ia & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ia \end{pmatrix}$$

и потому они неустойчивы, что согласно с условиями теоремы 2.4.1.

Пример 3. Рассмотрим такой кортеж $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$, равных между собой матриц Гамильтона размерности 4×4, которые имеют вид

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью так называемой "build-in" функции: JordanDecomposition[m] находим форму Жордана этих матриц:

$$J_1 = J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

Потом, используя стандартные функции системы $Mathematica$ находим функцию Гамильтона соответствующую данным матрицам

$$H_1 = H_2 = p_1^2 + q_1^2.$$

Так как матрицы A_1, A_2 можно диагонализовать и у них чисто мнимые собственные значения, то они устойчивы; в силу теоремы 2.3.1 устойчив также и кортеж $\mathcal{A}$. Поскольку не существует положительно (отрицательно) определённая линейная комбинация функции Гамильтона H_1

и H_2, поэтому данный кортеж матриц не является сильно устойчивым. Задача: Проверить, что выше указанный кортеж не обладает свойством сильной устойчивости, применяя критерии теоремы 2.4.1. Именно надо показать, что существуют такие матрицы Гамильтона D_1 и D_2, которые выполняют условия:

$$A_1D_1 - D_1A_1 + A_2D_2 - D_2A_2 = 0,$$

$$D_1D_2 = D_2D_1$$

и которые неустойчивы.

Более того, матрицы D_1 и D_2 должны быть достаточно близкими матрицам A_1, A_2 соответственно, т.е. имеем

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & -2+b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_2 & b_3 \\ 2+c_1 & c_2 & -a_1 & -a_3 \\ c_2 & c_3 & -a_2 & -a_4 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & -2+v_1 & v_2 \\ u_3 & u_4 & v_2 & v_3 \\ 2+w_1 & w_2 & -u_1 & -u_3 \\ w_2 & w_3 & -u_2 & -u_4 \end{pmatrix},$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 – это достаточно малые действительные числа больше нуля.

Решений этой задачи очень много. На пример, матрицы D_1 и D_2 вида

$$D_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяют желаемым равенствам. Одновременно они обладают формой Жордана

$$J_1 = J_2 = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

и они неустойчивы, тат как они обладают действительными собственными значениями $\pm\varepsilon$. Из того, в силу теоремы 2.4.1 следует, что кортеж $\mathcal{A}$ не является сильно устойчивым.

Пример 4. Проверим сильную устойчивость следующего кортежа матриц Гамильтона размерности 6×6:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью системы $Mathematica$ найдены близкие к этим матрицам матрицы

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 3i & 0 & \beta_2 & \beta_4 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3 & \beta_5 & \beta_6 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & -2i & 0 & 0 \\ \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 & 0 & -3i & 0 \\ \xi_3 & \xi_5 & \xi_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 & -i & 0 & 0 \\ \chi_2 & \chi_4 & \chi_5 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_3 & \chi_5 & \chi_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

выполняющие равенства $A_1D_1 - D_1A_1 + A_2D_2 - D_2A_2 = 0$ и $D_1D_2 = D_2D_1$.

Эти уравнения выполнены например для матриц D_1, D_2 следующего вида:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & \xi_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_6\chi_6}{\xi_6} \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

формы Жордана которых это

$$J_1 = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\beta_6}\sqrt{\xi_6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta_6}\sqrt{\xi_6} \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\beta_6}\chi_6}{\sqrt{\xi_6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\beta_6}\chi_6}{\sqrt{\xi_6}} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что кортеж $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\}$ является неустойчивым, поскольку его спектр содержит вещественные собственные функционалы. Из этого, в силу теоремы 2.4.1, следует что кортеж $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ не обладает свойством сильной устойчивости.

Пример 5. Пусть теперь гамильтонов кортеж $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ состоит из следующих матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

Здесь, для сильной устойчивости кортежа $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ необходимо и достаточно, чтобы все матрицы Гамильтона D_1, D_2, D_3, достаточно близкие к матрицам A_1, A_2, A_3 и удовлетворяющие равенствам $A_1D_1 - D_1A_1 + A_2D_2 - D_2A_2 + A_3D_3 - D_3A_3 = 0$, $D_1D_2 = D_2D_1$, $D_1D_3 = D_3D_1$, $D_2D_3 = D_3D_2$ – являлись устойчивыми. Применение компьютерной системы алгебраических вычислений $Mathematica$ позволяет найти матрицы удовлетворяющие только что перечисленным условиям, на пример получаем следующий тип матриц:

$$D_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_4\xi_4}{\chi_4} & 0 \\ 0 & 0 & 3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & \xi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & \chi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_4\lambda_4}{\chi_4} & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix},$$

с формами Жордана вида

$$J_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\lambda_4}\xi_4}{\sqrt{\chi_4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\lambda_4}\xi_4}{\sqrt{\chi_4}} \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\lambda_4}\sqrt{\chi_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_4}\sqrt{\chi_4} \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_4\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\chi_4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_4\sqrt{\lambda_4}}{\sqrt{\chi_4}} \end{pmatrix};$$

Очевидно, что кортеж $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$ – неустойчив, так как его спектр не чисто мнимый. Следовательно кортеж $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ не является сильно устойчивым.

<u>Замечание.</u> Для того чтобы находить форму матриц A_1, A_2, соответ-

ствующих данным первым интегралам H и K для размерности четыре, автор построил следующую процедуру работающую в компьютерной системе *Mathematica*:

In[1] :=

$\mathrm{Procedura[H\_, K\_] := Module[\{\}, X = \{p_1, p_2, q_1, q_2\};}$

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{A_1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & -a_1 & -a_3 \\ c_2 & c_3 & -a_2 & -a_4 \end{pmatrix};$$

$\mathrm{Y_1 = Expand[\tfrac{1}{2}X.J.A_1.X];}$

$\mathrm{T_1 =}$

$\mathrm{Solve[\{Coefficient[H, p_1^2], Coefficient[H, q_1^2], Coefficient[H, p_2^2],}$
$\mathrm{Coefficient[H, q_2^2], Coefficient[H, p_1q_1], Coefficient[H, p_1p_2],}$
$\mathrm{Coefficient[H, p_1q_2], Coefficient[H, p_2q_1], Coefficient[H, p_2q_2],}$
$\mathrm{Coefficient[H, q_1q_2]\} == \{Coefficient[Y_1, p_1^2], Coefficient[Y_1, q_1^2],}$
$\mathrm{Coefficient[Y_1, p_2^2], Coefficient[Y_1, q_2^2], Coefficient[Y_1, p_1q_1],}$
$\mathrm{Coefficient[Y_1, p_1p_2], Coefficient[Y_1, p_1q_2], Coefficient[Y_1, p_2q_1],}$
$\mathrm{Coefficient[Y_1, p_2q_2], Coefficient[Y_1, q_1q_2]\},}$
$\mathrm{\{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}][[1]];}$

$\mathrm{A_1 = A_1/.T_1;}$

$$\mathrm{A_2} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & f_1 & f_2 \\ e_3 & e_4 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & -e_1 & -e_3 \\ g_2 & g_3 & -e_2 & -e_4 \end{pmatrix};$$

$\mathrm{Y_2 = Expand[\tfrac{1}{2}X.J.A_2.X];}$

$\mathrm{T_2 =}$

$\mathrm{Solve[\{Coefficient[K, p_1^2], Coefficient[K, q_1^2], Coefficient[K, p_2^2],}$
$\mathrm{Coefficient[K, q_2^2], Coefficient[K, p_1q_1], Coefficient[K, p_1p_2],}$
$\mathrm{Coefficient[K, p_1q_2], Coefficient[K, p_2q_1], Coefficient[K, p_2q_2],}$
$\mathrm{Coefficient[K, q_1q_2]\} == Coefficient[Y_2, p_1^2], Coefficient[Y_2, q_1^2],}$
$\mathrm{Coefficient[Y_2, p_2^2], Coefficient[Y_2, q_2^2], Coefficient[Y_2, p_1q_1],}$
$\mathrm{Coefficient[Y_2, p_1p_2], Coefficient[Y_2, p_1q_2], Coefficient[Y_2, p_2q_1],}$
$\mathrm{Coefficient[Y_2, p_2q_2], Coefficient[Y_2, q_1q_2]\},}$
$\mathrm{\{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\}][[1]];}$

$\mathrm{A_2 = A_2/.T_2;}$
$\mathrm{Print[''A_1 ='', A_1//MatrixForm,''\,and'',''\,A_2 ='',}$
$\mathrm{A_2//MatrixForm]]}$

С помощью данной процедуры можно быстро найти матрицы A_1, A_2, соответствующие данным первым интегралам H и K. Например, для гамильтонианов рассмотренных в первом примере достаточно сделать следующие процедуры:

In[2] :=
$\mathrm{H = p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2;}$
$\mathrm{K = Expand[(p_1 - q_2 + p_2)^2 + p_2^2 + q_2^2 + (q_1 + p_2 + q_2)^2];}$
$\mathrm{Procedura[H, K]}$
$\mathrm{JordanDecomposition[A_1][[2]]//MatrixForm}$
$\mathrm{JordanDecomposition[A_2][[2]]//MatrixForm}$

чтобы получить искомые матрицы

$$\mathrm{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

и их нормальные формы Жордана:

Out[5]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

Out[6]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} -2i\sqrt{3-2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i\sqrt{3-2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i\sqrt{3+2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i\sqrt{3+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы найти матрицы C_1, C_2, их нормальные формы Жордана и собственные числа, достаточно уже пользоваться готовыми функциями компьютерной программы *Mathematica*, т.е. функциями: Solve[eqns, vars], JordanDecomposition[m] и Eigenvalues[m].