Chaos dystrybucyjny na przestrzeniach zwartych

Piotr Oprocha

Faculty of Applied Mathematics
AGH University of Science and Technology
Kraków, Poland

Będlewo, 19-22 kwiecień 2007

Twierdzenie Li i Yorka

Twierdzenie (Li-Yorke)

Niech $F : I \to I$ będzie ciągłe. Gdy istnieje $a \in I$ takie, że

$$F^3(a) \leqslant a < F(a) < F^2(a) \qquad (\text{ew. } F^3(a) \geqslant a > F(a) > F^2(a))$$

to:

- T1 Dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ funkcja F posiada punkt okresowy o okresie k
- T2 ....

[T.-Y. Li, J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975) 985–992]

Twierdzenie Li i Yorka

Twierdzenie (Li-Yorke)

Niech $F : I \to I$ będzie ciągłe. Gdy istnieje $a \in I$ takie, że

$$F^3(a) \leqslant a < F(a) < F^2(a) \qquad (\text{ew. } F^3(a) \geqslant a > F(a) > F^2(a))$$

to:

- T1 Dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ funkcja F posiada punkt okresowy o okresie k
- T2 ....

[T.-Y. Li, J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975) 985–992]

Twierdzenie Li i Yorka

Twierdzenie (Li-Yorke)

Niech $F : I \to I$ będzie ciągłe. Gdy istnieje $a \in I$ takie, że

$$F^3(a) \leqslant a < F(a) < F^2(a) \qquad (\text{ew. } F^3(a) \geqslant a > F(a) > F^2(a))$$

to:

- T1 Dla każdego $k = 1, 2, \dots$ funkcja F posiada punkt okresowy o okresie k
- T2 ....

[T.-Y. Li, J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975) 985–992]

Twierdzenie Li i Yorka

Twierdzenie (Li-Yorke)

Niech $F : I \to I$ będzie ciągłe. Gdy istnieje $a \in I$ takie, że

$$F^3(a) \leqslant a < F(a) < F^2(a) \qquad (\text{ew. } F^3(a) \geqslant a > F(a) > F^2(a))$$

to:

- T1 Dla każdego $k = 1, 2, \dots$ funkcja F posiada punkt okresowy o okresie k
- T2 ....

[T.-Y. Li, J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975) 985–992]

Twierdzenie Li i Yorka

Twierdzenie (Li-Yorke)

Niech $F : I \to I$ będzie ciągłe. Gdy istnieje $a \in I$ takie, że

$$F^3(a) \leqslant a < F(a) < F^2(a) \qquad (\text{ew. } F^3(a) \geqslant a > F(a) > F^2(a))$$

to:

- T1 Dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ funkcja F posiada punkt okresowy o okresie k
- T2 ....

[T.-Y. Li, J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975) 985–992]

Twierdzenie Szarkowskiego

Twierdzenie (Sharkovsky)

W zbiorze $\mathbb{N}$ wprowadzamy porządek $\lhd$ według zasady:

$$\begin{array}{ccccccccc}
3 & \lhd & 5 & \lhd & 7 & \lhd & 9 & \lhd & \cdots \\
3\cdot 2 & \lhd & 5\cdot 2 & \lhd & 7\cdot 2 & \lhd & 9\cdot 2 & \lhd & \cdots \\
3\cdot 2^2 & \lhd & 5\cdot 2^2 & \lhd & 7\cdot 2^2 & \lhd & 9\cdot 2^2 & \lhd & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \lhd & 2^3 & \lhd & 2^2 & \lhd & 2 & \lhd & 1
\end{array}$$

Jeśli $F : I \to I$ ma w punkt o okresie k oraz $k \lhd l$ to F ma także punkt o okresie l.

[O. M. Šarkovs′kiĭ, *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*, (Russian) Ukrain. Mat. Ž, **16** (1964) 61–71]

Twierdzenie Szarkowskiego

Twierdzenie (Sharkovsky)

W zbiorze $\mathbb{N}$ wprowadzamy porządek $\lhd$ według zasady:

$$\begin{array}{ccccccccc}
3 & \lhd & 5 & \lhd & 7 & \lhd & 9 & \lhd & \cdots \\
3\cdot 2 & \lhd & 5\cdot 2 & \lhd & 7\cdot 2 & \lhd & 9\cdot 2 & \lhd & \cdots \\
3\cdot 2^2 & \lhd & 5\cdot 2^2 & \lhd & 7\cdot 2^2 & \lhd & 9\cdot 2^2 & \lhd & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \lhd & 2^3 & \lhd & 2^2 & \lhd & 2 & \lhd & 1
\end{array}$$

Jeśli $F: I \to I$ ma w punkt o okresie k oraz $k \lhd l$ to F ma także punkt o okresie l.

[O. M. Šarkovs′kiĭ, *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*, (Russian) Ukrain. Mat. Ž, **16** (1964) 61–71]

Twierdzenie Szarkowskiego

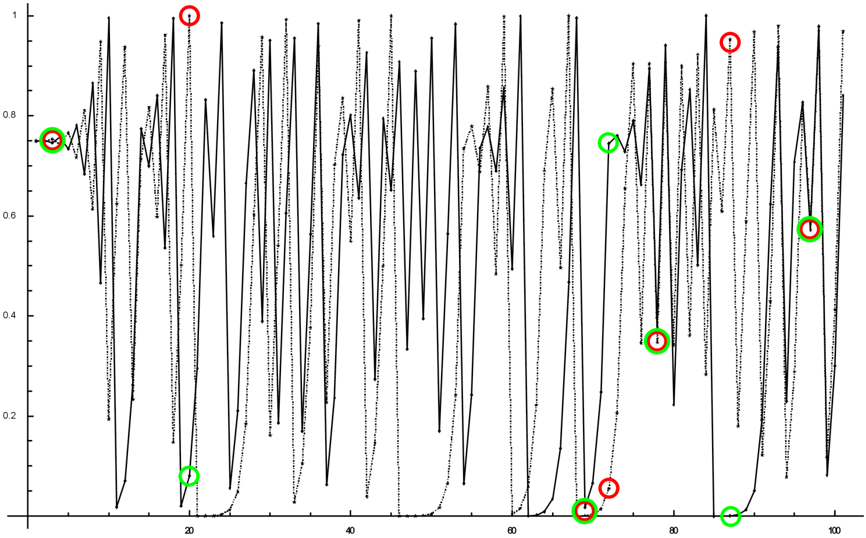
Twierdzenie (Sharkovsky)

W zbiorze $\mathbb{N}$ wprowadzamy porządek $\lhd$ według zasady:

$$\begin{array}{ccccccccc}
3 & \lhd & 5 & \lhd & 7 & \lhd & 9 & \lhd & \cdots \\
3\cdot 2 & \lhd & 5\cdot 2 & \lhd & 7\cdot 2 & \lhd & 9\cdot 2 & \lhd & \cdots \\
3\cdot 2^2 & \lhd & 5\cdot 2^2 & \lhd & 7\cdot 2^2 & \lhd & 9\cdot 2^2 & \lhd & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \lhd & 2^3 & \lhd & 2^2 & \lhd & 2 & \lhd & 1
\end{array}$$

Jeśli $F : I \to I$ ma w punkt o okresie k oraz $k \lhd l$ to F ma także punkt o okresie l.

[A. N. Sharkovsky, *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*, (Russian) Ukrain. Mat. Ž, **16** (1964) 61–71]



$$F(x) = 4x(1-x), \qquad x_1 = 0,749,\ x_2 = 0,751$$

Twierdzenie Li i Yorka

Twierdzenie (Li-Yorke) c.d.

T1 ....

T2 Istnieje nieprzeliczalny zbiór S (bez punktów okresowych) spełniający warunki:

1. Dla dowolnych $x, y \in S$ jeśli $x \neq y$ to

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| &> 0, \\ \liminf_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| &= 0. \end{aligned}$$

2. Dla dowolnego $x \in S$ oraz $p \in \mathrm{Per}(F)$ zachodzi:

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(p)| > 0$$

(tzn. S nie zawiera punktów asymptotycznie okresowych).

Twierdzenie Li i Yorka

Twierdzenie (Li-Yorke) c.d.

T1 ....

T2 Istnieje nieprzeliczalny zbiór S (bez punktów okresowych) spełniający warunki:

1. Dla dowolnych $x, y \in S$ jeśli $x \neq y$ to

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| &> 0, \\ \liminf_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| &= 0. \end{aligned}$$

2. Dla dowolnego $x \in S$ oraz $p \in \mathrm{Per}(F)$ zachodzi:

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(p)| > 0$$

(tzn. S nie zawiera punktów asymptotycznie okresowych).

Twierdzenie Li i Yorka

Twierdzenie (Li-Yorke) c.d.

T1 ....

T2 Istnieje nieprzeliczalny zbiór S (bez punktów okresowych) spełniający warunki:

1. Dla dowolnych $x, y \in S$ jeśli $x \neq y$ to

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| &> 0, \\ \liminf_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| &= 0. \end{aligned}$$

2. Dla dowolnego $x \in S$ oraz $p \in \mathrm{Per}(F)$ zachodzi:

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(p)| > 0$$

(tzn. S nie zawiera punktów asymptotycznie okresowych).

Twierdzenie Li i Yorka

Twierdzenie (Li-Yorke) c.d.

T1 ....

T2 Istnieje nieprzeliczalny zbiór S (bez punktów okresowych) spełniający warunki:

1. Dla dowolnych $x, y \in S$ jeśli $x \neq y$ to
$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| &> 0, \\ \liminf_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| &= 0. \end{aligned}$$
2. Dla dowolnego $x \in S$ oraz $p \in \mathrm{Per}(F)$ zachodzi:
$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(p)| > 0$$

(tzn. S nie zawiera punktów asymptotycznie okresowych).

Stałe założenia

1. (X, d) - przestrzeń metryczna zwarta,
2. $f : X \longrightarrow X$ - odwzorowanie ciągłe,

Stałe założenia

1. (X, d) - przestrzeń metryczna zwarta,
2. $f : X \longrightarrow X$ - odwzorowanie ciągłe,

Chaos Li-Yorka

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **chaotyczną w sensie Li i Yorka** gdy:
   1. punkty x, y są proksymalne (proximal), tzn.

      $$\liminf_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f^n}(\mathbf{x}), \mathbf{f^n}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$$

   2. ale nie asymptotyczne, tzn.

      $$\limsup_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f^n}(\mathbf{x}), \mathbf{f^n}(\mathbf{y})) > \mathbf{0}$$

2. Odwzorowanie f jest **chaotyczne w sensie Li i Yorka** (LY-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór chaotycznie splątany - scrambled set)
   2. taki, że dowolna para różnych punktów zbioru S jest chaotyczna w sensie Li i Yorka.

Chaos Li-Yorka

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **chaotyczną w sensie Li i Yorka** gdy:
   1. punkty x, y są proksymalne (proximal), tzn.

   $$\liminf_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f^n}(\mathbf{x}), \mathbf{f^n}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$$

   2. ale nie asymptotyczne, tzn.

   $$\limsup_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f^n}(\mathbf{x}), \mathbf{f^n}(\mathbf{y})) > \mathbf{0}$$

2. Odwzorowanie f jest **chaotyczne w sensie Li i Yorka** (LY-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór chaotycznie splątany - scrambled set)
   2. taki, że dowolna para różnych punktów zbioru S jest chaotyczna w sensie Li i Yorka.

Chaos Li-Yorka

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **chaotyczną w sensie Li i Yorka** gdy:
    1. punkty x, y są proksymalne (proximal), tzn.
    $$\liminf_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f^n}(\mathbf{x}), \mathbf{f^n}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$$
    2. ale nie asymptotyczne, tzn.
    $$\limsup_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f^n}(\mathbf{x}), \mathbf{f^n}(\mathbf{y})) > \mathbf{0}$$
2. Odwzorowanie f jest **chaotyczne w sensie Li i Yorka** (LY-chaotyczne) gdy
    1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór chaotycznie splątany - scrambled set)
    2. taki, że dowolna para różnych punktów zbioru S jest chaotyczna w sensie Li i Yorka.

Chaos Li-Yorka

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **chaotyczną w sensie Li i Yorka** gdy:
   1. punkty x, y są proksymalne (proximal), tzn.

   $$\liminf_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$$

   2. ale nie asymptotyczne, tzn.

   $$\limsup_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{y})) > \mathbf{0}$$

2. Odwzorowanie f jest **chaotyczne w sensie Li i Yorka** (LY-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór chaotycznie splątany - scrambled set)
   2. taki, że dowolna para różnych punktów zbioru S jest chaotyczna w sensie Li i Yorka.

Chaos Li-Yorka

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **chaotyczną w sensie Li i Yorka** gdy:
   1. punkty x, y są proksymalne (proximal), tzn.

$$\liminf_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$$

   2. ale nie asymptotyczne, tzn.

$$\limsup_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{y})) > \mathbf{0}$$

2. Odwzorowanie f jest **chaotyczne w sensie Li i Yorka** (LY-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór chaotycznie splątany - scrambled set)
   2. taki, że dowolna para różnych punktów zbioru S jest chaotyczna w sensie Li i Yorka.

Chaos Li-Yorka

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **chaotyczną w sensie Li i Yorka** gdy:
   1. punkty x, y są proksymalne (proximal), tzn.

      $$\liminf_{\mathbf{n}\longrightarrow\infty} \mathbf{d}(\mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$$

   2. ale nie asymptotyczne, tzn.

      $$\limsup_{\mathbf{n}\longrightarrow\infty} \mathbf{d}(\mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \mathbf{f}^{\mathbf{n}}(\mathbf{y})) > \mathbf{0}$$

2. Odwzorowanie f jest **chaotyczne w sensie Li i Yorka** (LY-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór chaotycznie splątany - scrambled set)
   2. taki, że dowolna para różnych punktów zbioru S jest chaotyczna w sensie Li i Yorka.

Chaos Li-Yorka

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **chaotyczną w sensie Li i Yorka** gdy:
   1. punkty x, y są proksymalne (proximal), tzn.

      $$\liminf_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f^n}(\mathbf{x}), \mathbf{f^n}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$$

   2. ale nie asymptotyczne, tzn.

      $$\limsup_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f^n}(\mathbf{x}), \mathbf{f^n}(\mathbf{y})) > \mathbf{0}$$

2. Odwzorowanie f jest **chaotyczne w sensie Li i Yorka** (LY-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór chaotycznie splątany - scrambled set)
   2. taki, że dowolna para różnych punktów zbioru S jest chaotyczna w sensie Li i Yorka.

Chaos Li-Yorka

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **chaotyczną w sensie Li i Yorka** gdy:
   1. punkty x, y są proksymalne (proximal), tzn.

$$\liminf_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f^n}(\mathbf{x}), \mathbf{f^n}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$$

   2. ale nie asymptotyczne, tzn.

$$\limsup_{\mathbf{n} \longrightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{f^n}(\mathbf{x}), \mathbf{f^n}(\mathbf{y})) > \mathbf{0}$$

2. Odwzorowanie f jest **chaotyczne w sensie Li i Yorka** (LY-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór chaotycznie splątany - scrambled set)
   2. taki, że dowolna para różnych punktów zbioru S jest chaotyczna w sensie Li i Yorka.

Dodatkowe założenia o zbiorze chaotycznym

1. S gęsty - gęsty chaos (dense chaos)
2. S residualny - nie możliwe dla odcinka
3. $\{(x, y) : x, y\text{- para Li-Yorka}\}$ - residualny w $X \times X$ - generic chaos.
4. $S \subset I$ pełnej miary - chaos a.e.

[Ľ. Snoha, *Generic chaos*, Comment. Math. Univ. Carolin., **31** (1990) 793–810]

Dodatkowe założenia o zbiorze chaotycznym

1. S gęsty - gęsty chaos (dense chaos)
2. S residualny - nie możliwe dla odcinka
3. $\{(x,y)\ :\ x,y\text{- para Li-Yorka}\}$ - residualny w $X \times X$ - generic chaos.
4. $S \subset I$ pełnej miary - chaos a.e.

Dodatkowe założenia o zbiorze chaotycznym

1. S gęsty - gęsty chaos (dense chaos)
2. S residualny - nie możliwe dla odcinka
3. $\{(x, y) \ : \ x, y\text{- para Li-Yorka}\}$ - residualny w $X \times X$ - generic chaos.
4. $S \subset I$ pełnej miary - chaos a.e.

[A. M. Bruckner, T. Hu, *On scrambled sets for chaotic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **301** (1987) 289–297]
[T. Gedeon, *There are no chaotic mappings with residual scrambled sets*, Bull. Austral. Math. Soc., **36** (1987) 411–416]

Dodatkowe założenia o zbiorze chaotycznym

1. S gęsty - gęsty chaos (dense chaos)
2. S residualny - nie możliwe dla odcinka
3. $\{(x, y)\ :\ x, y\text{- para Li-Yorka}\}$ - residualny w $X \times X$ - generic chaos.
4. $S \subset I$ pełnej miary - chaos a.e.

[J. Piórek, *On the generic chaos in dynamical systems*, Univ. Iagel. Acta Math., **25** (1985) 293–298]

Dodatkowe założenia o zbiorze chaotycznym

1. S gęsty - gęsty chaos (dense chaos)
2. S residualny - nie możliwe dla odcinka
3. $\{(x, y) \ : \ x, y\text{- para Li-Yorka}\}$ - residualny w $X \times X$ - generic chaos.
4. $S \subset I$ pełnej miary - chaos a.e.

[M. Misiurewicz, *Chaos almost everywhere*, Iteration theory and its functional equations, Proc. Int. Symp., Schloß Hofen (Lochau)/Austria 1984, Lect. Notes Math., **1163** (1985) 125-130.]

Ważna obserwacja

1. Dodatnia entropia topologiczna
   1. Odcinek (graf)

      $$PTE \iff \text{podkowa topologiczna} \implies \text{zbiór chaotyczny}$$

      [J. Llibre, M. Misiurewicz,*Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology, **32** (1993) 649–664]
   2. a nawet na każdej przestrzeni zwartej....
      [F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, A. Maass, *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math, **547** (2002) 51–68]
2. Entropia topologiczna 0
   1. Istnieją odwzorowania odcinka chaotyczne w sensie Li i Yorka ale z entropią 0
      [J. Smítal, *Chaotic functions with zero topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986) 269-282.]
      [V. V. Fedorenko, A. N. Sharkovskij, J. Smítal, *Characterizations of weakly chaotic maps of the interval*, Proc. Am. Math. Soc., **110** (1990) 141-148.]

Ważna obserwacja

1. Dodatnia entropia topologiczna
   1. Odcinek (graf)

   $$PTE \iff \text{podkowa topologiczna} \implies \text{zbiór chaotyczny}$$

   [J. Llibre, M. Misiurewicz, *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology, **32** (1993) 649–664]

   2. a nawet na każdej przestrzeni zwartej....
   [F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, A. Maass, *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math, **547** (2002) 51–68]
2. Entropia topologiczna 0
   1. Istnieją odwzorowania odcinka chaotyczne w sensie Li i Yorka ale z entropią 0
   [J. Smítal, *Chaotic functions with zero topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986) 269-282.]
   [V. V. Fedorenko, A. N. Sharkovskij, J. Smítal, *Characterizations of weakly chaotic maps of the interval*, Proc. Am. Math. Soc., **110** (1990) 141-148.]

Ważna obserwacja

1. Dodatnia entropia topologiczna
   1. Odcinek (graf)

      $$PTE \Longleftrightarrow \text{podkowa topologiczna} \Longrightarrow \text{zbiór chaotyczny}$$

      [J. Llibre, M. Misiurewicz, *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology, **32** (1993) 649–664]
   2. a nawet na każdej przestrzeni zwartej....
      [F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, A. Maass, *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math, **547** (2002) 51–68]
2. Entropia topologiczna 0
   1. Istnieją odwzorowania odcinka chaotyczne w sensie Li i Yorka ale z entropią 0
      [J. Smítal, *Chaotic functions with zero topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986) 269-282.]
      [V. V. Fedorenko, A. N. Sharkovskij, J. Smítal, *Characterizations of weakly chaotic maps of the interval*, Proc. Am. Math. Soc., **110** (1990) 141-148.]

Ważna obserwacja

1. Dodatnia entropia topologiczna
   1. Odcinek (graf)

      $$\mathit{PTE} \Longleftrightarrow \text{podkowa topologiczna} \Longrightarrow \text{zbiór chaotyczny}$$

      [J. Llibre, M. Misiurewicz,*Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology, **32** (1993) 649–664]
   2. a nawet na każdej przestrzeni zwartej....
      [F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, A. Maass, *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math, **547** (2002) 51–68]
2. Entropia topologiczna 0
   1. Istnieją odwzorowania odcinka chaotyczne w sensie Li i Yorka ale z entropią 0
      [J. Smítal, *Chaotic functions with zero topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986) 269-282.]
      [V. V. Fedorenko, A. N. Sharkovskij, J. Smítal, *Characterizations of weakly chaotic maps of the interval*, Proc. Am. Math. Soc., **110** (1990) 141-148.]

Ważna obserwacja

1. Dodatnia entropia topologiczna
   1. Odcinek (graf)

      $$PTE \iff \text{podkowa topologiczna} \implies \text{zbiór chaotyczny}$$

      [J. Llibre, M. Misiurewicz, *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology, **32** (1993) 649–664]
   2. a nawet na każdej przestrzeni zwartej....
      [F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, A. Maass, *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math, **547** (2002) 51–68]
2. Entropia topologiczna 0
   1. Istnieją odwzorowania odcinka chaotyczne w sensie Li i Yorka ale z entropią 0
      [J. Smítal, *Chaotic functions with zero topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986) 269-282.]
      [V. V. Fedorenko, A. N. Sharkovskij, J. Smítal, *Characterizations of weakly chaotic maps of the interval*, Proc. Am. Math. Soc., **110** (1990) 141-148.]

Ważna obserwacja

1. Dodatnia entropia topologiczna
   1. Odcinek (graf)

   $$PTE \iff \text{podkowa topologiczna} \implies \text{zbiór chaotyczny}$$

   [J. Llibre, M. Misiurewicz,*Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology, **32** (1993) 649–664]
   2. a nawet na każdej przestrzeni zwartej....
   [F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, A. Maass, *On Li-Yorke pairs*, J. Reine Angew. Math, **547** (2002) 51–68]
2. Entropia topologiczna 0
   1. Istnieją odwzorowania odcinka chaotyczne w sensie Li i Yorka ale z entropią 0
   [J. Smítal, *Chaotic functions with zero topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986) 269-282.]
   [V. V. Fedorenko, A. N. Sharkovskij, J. Smítal, *Characterizations of weakly chaotic maps of the interval*, Proc. Am. Math. Soc., **110** (1990) 141-148.]

Częstotliwość "odskoków" w parach Li-Yorka

1. Określamy trzy funkcje:
   1. $$\xi(x,y,t,n) = \#\left\{i \ : \ d(f^i(x), f^i(y)) < t \quad, 0 \leqslant i < n\right\}$$
   2. $$F_{xy}(t) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi(x,y,t,n)$$
   3. $$F^*_{xy}(t) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi(x,y,t,n)$$

Częstotliwość "odskoków" w parach Li-Yorka

1. Określamy trzy funkcje:
   1. $$\xi(x,y,t,n) = \#\left\{i \;:\; d(f^i(x), f^i(y)) < t \quad , 0 \leqslant i < n\right\}$$
   2. $$F_{xy}(t) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi(x,y,t,n)$$
   3. $$F^*_{xy}(t) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi(x,y,t,n)$$

Częstotliwość "odskoków" w parach Li-Yorka

1. Określamy trzy funkcje:
   1. $$\xi(x,y,t,n) = \#\left\{ i \;:\; d(f^i(x), f^i(y)) < t \quad, 0 \leqslant i < n \right\}$$
   2. $$F_{xy}(t) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi(x,y,t,n)$$
   3. $$F^*_{xy}(t) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\xi(x,y,t,n)$$

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **dystrybucyjnie chaotyczną (DC2)** gdy:
    1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ oraz
    2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
2. Odwzorowanie f jest **dystrybucyjnie chaotyczne** (D_2-chaotyczne) gdy
    1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór D_2-chaotycznie splątany)
    2. o tej własności, że każda para jego różnych punktów jest D_2-chaotyczna.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754] - definicję wprowadzono dla odwzorowań odcinka.

Chaos dystrybucyjny

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **dystrybucyjnie chaotyczną (DC2)** gdy:
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ oraz
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
2. Odwzorowanie f jest **dystrybucyjnie chaotyczne** (D_2-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór D_2-chaotycznie splątany)
   2. o tej własności, że każda para jego różnych punktów jest D_2-chaotyczna.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754] - definicję wprowadzono dla odwzorowań odcinka.

Chaos dystrybucyjny

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **dystrybucyjnie chaotyczną (DC2)** gdy:
    1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ oraz
    2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
2. Odwzorowanie f jest **dystrybucyjnie chaotyczne** (D_2-chaotyczne) gdy
    1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór D_2-chaotycznie splątany)
    2. o tej własności, że każda para jego różnych punktów jest D_2-chaotyczna.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754] - definicję wprowadzono dla odwzorowań odcinka.

Chaos dystrybucyjny

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **dystrybucyjnie chaotyczną (DC2)** gdy:
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ oraz
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
2. Odwzorowanie f jest **dystrybucyjnie chaotyczne** (D_2-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór D_2-chaotycznie splątany)
   2. o tej własności, że każda para jego różnych punktów jest D_2-chaotyczna.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754] - definicję wprowadzono dla odwzorowań odcinka.

Chaos dystrybucyjny

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **dystrybucyjnie chaotyczną (DC2)** gdy:
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ oraz
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
2. Odwzorowanie f jest **dystrybucyjnie chaotyczne** (D_2-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór D_2-chaotycznie splątany)
   2. o tej własności, że każda para jego różnych punktów jest D_2-chaotyczna.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754] - definicję wprowadzono dla odwzorowań odcinka.

Chaos dystrybucyjny

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **dystrybucyjnie chaotyczną (DC2)** gdy:
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ oraz
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
2. Odwzorowanie f jest **dystrybucyjnie chaotyczne** (D_2-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór D_2-chaotycznie splątany)
   2. o tej własności, że każda para jego różnych punktów jest D_2-chaotyczna.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754] - definicję wprowadzono dla odwzorowań odcinka.

Chaos dystrybucyjny

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **dystrybucyjnie chaotyczną (DC2)** gdy:
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ oraz
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
2. Odwzorowanie f jest **dystrybucyjnie chaotyczne** (D_2-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór D_2-chaotycznie splątany)
   2. o tej własności, że każda para jego różnych punktów jest D_2-chaotyczna.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754] - definicję wprowadzono dla odwzorowań odcinka.

Chaos dystrybucyjny

1. Parę $(x, y) \in X \times X$ nazywamy **dystrybucyjnie chaotyczną (DC2)** gdy:
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ oraz
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
2. Odwzorowanie f jest **dystrybucyjnie chaotyczne** (D_2-chaotyczne) gdy
   1. istnieje nieprzeliczalny zbiór S (tzw. zbiór D_2-chaotycznie splątany)
   2. o tej własności, że każda para jego różnych punktów jest D_2-chaotyczna.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754] - definicję wprowadzono dla odwzorowań odcinka.

DC1-DC3

1. DC1
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F_{xy}(s) = 0$ dla pewnego $s > 0$
2. DC2
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
3. DC3
   1. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla każdego $s \in J$ gdzie J to pewien przedział otwarty. (inaczej mówiąc $\int_{\mathbb{R}} F^*_{xy}(t) - F_{xy}(t)\, dt > 0$).

[F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals, **23** (2005) 1581–1583]

DC1-DC3

1. DC1
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F_{xy}(s) = 0$ dla pewnego $s > 0$
2. DC2
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
3. DC3
   1. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla każdego $s \in J$ gdzie J to pewien przedział otwarty. (inaczej mówiąc $\int_{\mathbb{R}} F^*_{xy}(t) - F_{xy}(t)\, dt > 0$).

[F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals, **23** (2005) 1581–1583]

DC1-DC3

1. DC1
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F_{xy}(s) = 0$ dla pewnego $s > 0$
2. DC2
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
3. DC3
   1. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla każdego $s \in J$ gdzie J to pewien przedział otwarty. (inaczej mówiąc $\int_{\mathbb{R}} F^*_{xy}(t) - F_{xy}(t)\, dt > 0$).

[F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals, **23** (2005) 1581–1583]

DC1-DC3

1. DC1
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F_{xy}(s) = 0$ dla pewnego $s > 0$
2. DC2
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
3. DC3
   1. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla każdego $s \in J$ gdzie J to pewien przedział otwarty. (inaczej mówiąc $\int_{\mathbb{R}} F^*_{xy}(t) - F_{xy}(t)\, dt > 0$).

[F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals, **23** (2005) 1581–1583]

DC1-DC3

1. DC1
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F_{xy}(s) = 0$ dla pewnego $s > 0$
2. DC2
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
3. DC3
   1. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla każdego $s \in J$ gdzie J to pewien przedział otwarty. (inaczej mówiąc $\int_{\mathbb{R}} F^*_{xy}(t) - F_{xy}(t)\, dt > 0$).

[F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals, **23** (2005) 1581–1583]

DC1-DC3

1. DC1
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F_{xy}(s) = 0$ dla pewnego $s > 0$
2. DC2
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
3. DC3
   1. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla każdego $s \in J$ gdzie J to pewien przedział otwarty. (inaczej mówiąc $\int_{\mathbb{R}} F^*_{xy}(t) - F_{xy}(t)\, dt > 0$).

[F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals, **23** (2005) 1581–1583]

DC1-DC3

1. DC1
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F_{xy}(s) = 0$ dla pewnego $s > 0$
2. DC2
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
3. DC3
   1. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla każdego $s \in J$ gdzie J to pewien przedział otwarty. (inaczej mówiąc $\int_{\mathbb{R}} F^*_{xy}(t) - F_{xy}(t)\, dt > 0$).

[F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals, **23** (2005) 1581–1583]

DC1-DC3

1. DC1
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F_{xy}(s) = 0$ dla pewnego $s > 0$
2. DC2
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
3. DC3
   1. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla każdego $s \in J$ gdzie J to pewien przedział otwarty. (inaczej mówiąc $\int_{\mathbb{R}} F^*_{xy}(t) - F_{xy}(t)\, dt > 0$).

[F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals, **23** (2005) 1581–1583]

DC1-DC3

1. DC1
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F_{xy}(s) = 0$ dla pewnego $s > 0$
2. DC2
   1. $F^*_{xy}(t) = 1$ dla każdego $t > 0$ i
   2. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla pewnego $s > 0$
3. DC3
   1. $F^*_{xy}(s) > F_{xy}(s)$ dla każdego $s \in J$ gdzie J to pewien przedział otwarty. (inaczej mówiąc $\int_{\mathbb{R}} F^*_{xy}(t) - F_{xy}(t)\, dt > 0$).

[F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals, **23** (2005) 1581–1583]

Sytuacja dla odcinka

Twierdzenie (Schweizer-Smítal)

Niech $f : I \to I$ będzie ciągłe.

1. Gdy f ma entropię topologiczną 0 to
   1. dla dowolnych $x, y \in I$ zachodzi $F_{xy} = F^*_{xy}$ (brak pary DC3 dla f)
   2. gdy $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$ to $F_{xy} = \chi_{(0,+\infty)}$.
2. Gdy entropia topologiczna f jest dodatnia to
   1. istnieje niepusty zbiór doskonały (perfect set) P, $\#P \geqslant 2$ który jest zbiorem dystrybucyjnie chaotycznym typu 1 (DC1).
   2. istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in P$, $x \neq y$ zachodzi $F_{xy} \leqslant \chi_{(\delta,+\infty)}$.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754]

Sytuacja dla odcinka

Twierdzenie (Schweizer-Smítal)

Niech $f : I \to I$ będzie ciągłe.

1. Gdy f ma entropię topologiczną 0 to
   1. dla dowolnych $x, y \in I$ zachodzi $F_{xy} = F^*_{xy}$ (brak pary DC3 dla f)
   2. gdy $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$ to $F_{xy} = \chi_{(0,+\infty)}$.
2. Gdy entropia topologiczna f jest dodatnia to
   1. istnieje niepusty zbiór doskonały (perfect set) P, $\#P \geqslant 2$ który jest zbiorem dystrybucyjnie chaotycznym typu 1 (DC1).
   2. istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in P$, $x \neq y$ zachodzi $F_{xy} \leqslant \chi_{(\delta,+\infty)}$.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754]

Sytuacja dla odcinka

Twierdzenie (Schweizer-Smítal)

Niech $f : I \to I$ będzie ciągłe.

1. Gdy f ma entropię topologiczną 0 to
   1. dla dowolnych $x, y \in I$ zachodzi $F_{xy} = F^*_{xy}$ (brak pary DC3 dla f)
   2. gdy $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$ to $F_{xy} = \chi_{(0,+\infty)}$.
2. Gdy entropia topologiczna f jest dodatnia to
   1. istnieje niepusty zbiór doskonały (perfect set) P, $\#P \geqslant 2$ który jest zbiorem dystrybucyjnie chaotycznym typu 1 (DC1).
   2. istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in P$, $x \neq y$ zachodzi $F_{xy} \leqslant \chi_{(\delta,+\infty)}$.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754]

Sytuacja dla odcinka

Twierdzenie (Schweizer-Smítal)

Niech $f : I \to I$ będzie ciągłe.

1. Gdy f ma entropię topologiczną 0 to
   1. dla dowolnych $x, y \in I$ zachodzi $F_{xy} = F^*_{xy}$ (brak pary DC3 dla f)
   2. gdy $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$ to $F_{xy} = \chi_{(0,+\infty)}$.
2. Gdy entropia topologiczna f jest dodatnia to
   1. istnieje niepusty zbiór doskonały (perfect set) P, $\#P \geqslant 2$ który jest zbiorem dystrybucyjnie chaotycznym typu 1 (DC1).
   2. istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in P$, $x \neq y$ zachodzi $F_{xy} \leqslant \chi_{(\delta,+\infty)}$.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754]

Sytuacja dla odcinka

Twierdzenie (Schweizer-Smítal)

Niech $f : I \to I$ będzie ciągłe.

1. Gdy f ma entropię topologiczną 0 to
   1. dla dowolnych $x, y \in I$ zachodzi $F_{xy} = F^*_{xy}$ (brak pary DC3 dla f)
   2. gdy $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$ to $F_{xy} = \chi_{(0,+\infty)}$.
2. Gdy entropia topologiczna f jest dodatnia to
   1. istnieje niepusty zbiór doskonały (perfect set) P, $\#P \geqslant 2$ który jest zbiorem dystrybucyjnie chaotycznym typu 1 (DC1).
   2. istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in P$, $x \neq y$ zachodzi $F_{xy} \leqslant \chi_{(\delta,+\infty)}$.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754]

Sytuacja dla odcinka

Twierdzenie (Schweizer-Smítal)

Niech $f : I \to I$ będzie ciągłe.

1. Gdy f ma entropię topologiczną 0 to
   1. dla dowolnych $x, y \in I$ zachodzi $F_{xy} = F^*_{xy}$ (brak pary DC3 dla f)
   2. gdy $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$ to $F_{xy} = \chi_{(0,+\infty)}$.
2. Gdy entropia topologiczna f jest dodatnia to
   1. istnieje niepusty zbiór doskonały (perfect set) P, $\#P \geqslant 2$ który jest zbiorem dystrybucyjnie chaotycznym typu 1 (DC1).
   2. istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in P$, $x \neq y$ zachodzi $F_{xy} \leqslant \chi_{(\delta,+\infty)}$.

[B. Schweizer, J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 737–754]

DC1-DC3 na ogólnych przestrzeniach

1. DC1 $\Longrightarrow$ DC2 $\Longrightarrow$ DC3
2. DC3 $\not\Longrightarrow$ DC2 $\not\Longrightarrow$ DC1
   - [G.-L. Forti, L. Paganoni, J. Smítal, *Dynamics of homeomorphisms on minimal sets generated by triangular mappings*, Bull. Austral. Math. Soc., **59** (1999) 1–20.]
   - [F. Balibrea, J. Smítal, M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals **23** (2005), 1581–1583.]
3. DC1 i DC2 są niezmiennikami sprzężenia topologicznego. DC3 nie jest niezmiennikiem.
   - J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps.* Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128.

DC1-DC3 na ogólnych przestrzeniach

1. DC1 $\Longrightarrow$ DC2 $\Longrightarrow$ DC3
2. DC3 $\not\Longrightarrow$ DC2 $\not\Longrightarrow$ DC1
   - [G.-L. Forti, L. Paganoni, J. Smítal, *Dynamics of homeomorphisms on minimal sets generated by triangular mappings*, Bull. Austral. Math. Soc., **59** (1999) 1–20.]
   - [F. Balibrea, J. Smítal, M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals **23** (2005), 1581–1583.]
3. DC1 i DC2 są niezmiennikami sprzężenia topologicznego. DC3 nie jest niezmiennikiem.
   - J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps*. Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128.

DC1-DC3 na ogólnych przestrzeniach

1. DC1 $\Longrightarrow$ DC2 $\Longrightarrow$ DC3
2. DC3 $\not\Longrightarrow$ DC2 $\not\Longrightarrow$ DC1
   - [G.-L. Forti, L. Paganoni, J. Smítal, *Dynamics of homeomorphisms on minimal sets generated by triangular mappings*, Bull. Austral. Math. Soc., **59** (1999) 1–20.]
   - [F. Balibrea, J. Smítal, M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals **23** (2005), 1581–1583.]
3. DC1 i DC2 są niezmiennikami sprzężenia topologicznego. DC3 nie jest niezmiennikiem.
   - J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps*. Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128.

DC1-DC3 na ogólnych przestrzeniach

1. DC1 $\Longrightarrow$ DC2 $\Longrightarrow$ DC3
2. DC3 $\not\Longrightarrow$ DC2 $\not\Longrightarrow$ DC1
   - [G.-L. Forti, L. Paganoni, J. Smítal, *Dynamics of homeomorphisms on minimal sets generated by triangular mappings*, Bull. Austral. Math. Soc., **59** (1999) 1–20.]
   - [F. Balibrea, J. Smítal, M. Štefánková, *The three versions of distributional chaos*, Chaos Solitons Fractals **23** (2005), 1581–1583.]
3. DC1 i DC2 są niezmiennikami sprzężenia topologicznego. DC3 nie jest niezmiennikiem.
   - J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps*. Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128.

Entropia topologiczna i DC

1. PTE $\not\Longrightarrow$ DC1
   - [J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps*. Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128].
   - [R. Pikuła, *On some notions of chaos in dimension zero*, Colloq. Math., **107** (2007), 167-177].
2. PTE $\not\Longleftarrow$ DC1
   - [L. Wang, G. Liao, *Regular shift invariant sets and Schweizer-Smítal chaos*, Northeast Math. J., **15** (1999), 127–129].
   - [Z. Chen, G. Liao, L. Wang, *The complexity of a minimal sub-shift on symbolic spaces*, J. Math. Anal. Appl., **317** (2006), 136—145].

Entropia topologiczna i DC

1. PTE $\not\Longrightarrow$ DC1
   - [J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps.* Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128].
   - [R. Pikuła, *On some notions of chaos in dimension zero*, Colloq. Math., **107** (2007), 167-177].
2. PTE $\not\Longleftarrow$ DC1
   - [L. Wang, G. Liao, *Regular shift invariant sets and Schweizer-Smítal chaos*, Northeast Math. J., **15** (1999), 127–129].
   - [Z. Chen, G. Liao, L. Wang, *The complexity of a minimal sub-shift on symbolic spaces*, J. Math. Anal. Appl., **317** (2006), 136—145].

Entropia topologiczna i DC

1. PTE $\not\Longrightarrow$ DC1
   - [J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps.* Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128].
   - [R. Pikuła, *On some notions of chaos in dimension zero*, Colloq. Math., **107** (2007), 167-177].
2. PTE $\not\Longleftarrow$ DC1
   - [L. Wang, G. Liao, *Regular shift invariant sets and Schweizer-Smítal chaos*, Northeast Math. J., **15** (1999), 127–129].
   - [Z. Chen, G. Liao, L. Wang, *The complexity of a minimal sub-shift on symbolic spaces*, J. Math. Anal. Appl., **317** (2006), 136—145].

Entropia topologiczna i DC

1. PTE $\not\Longrightarrow$ DC1
   - [J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps*. Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128].
   - [R. Pikuła, *On some notions of chaos in dimension zero*, Colloq. Math., **107** (2007), 167-177].
2. PTE $\not\Longleftarrow$ DC1
   - [L. Wang, G. Liao, *Regular shift invariant sets and Schweizer-Smítal chaos*, Northeast Math. J., **15** (1999), 127–129].
   - [Z. Chen, G. Liao, L. Wang, *The complexity of a minimal sub-shift on symbolic spaces*, J. Math. Anal. Appl., **317** (2006), 136—145].

Entropia topologiczna i DC

1. PTE $\not\Longrightarrow$ DC1
   - [J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps*. Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128].
   - [R. Pikuła, *On some notions of chaos in dimension zero*, Colloq. Math., **107** (2007), 167-177].
2. PTE $\not\Longleftarrow$ DC1
   - [L. Wang, G. Liao, *Regular shift invariant sets and Schweizer-Smítal chaos*, Northeast Math. J., **15** (1999), 127–129].
   - [Z. Chen, G. Liao, L. Wang, *The complexity of a minimal sub-shift on symbolic spaces*, J. Math. Anal. Appl., **317** (2006), 136—145].

Konstrukcja pary chaotycznej

1. Niech $x, y \in X$. Rozważmy ciągi $\{S_n\}$, $\{M_n\}$ oraz ciągi pomocnicze $\{c_n\}$, $\{p_n\}$:
    1. $M_0 = S_0 \geqslant 0$ (zazwyczaj zaczynamy od $S_0 = 1$),
    2. $M_n = \sum_{i=0}^{n-1}(p_i + S_i)$
    3. $c_n M_n \leqslant S_n$ i $c_n \to \infty$, (zazwyczaj $c_n = 2^n$).
2. Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{\nu_j\}$ taki, że
    - $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$
    - dla dowolnego n z zakresu $M_{\nu_j} < n < M_{\nu_j} + S_{\nu_j}$.
3. oraz dla pewnego $\delta > 0$ istnieje ciąg $\{\mu_j\}$ taki, że
    - $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$
    - dla dowolnego n z zakresu $M_{\mu_j} < n < M_{\mu_j} + S_{\nu_j}$.
4. to x, y tworzą parę dystrybucyjnie chaotyczna typu 1.

Konstrukcja pary chaotycznej

1. Niech $x, y \in X$. Rozważmy ciągi $\{S_n\}$, $\{M_n\}$ oraz ciągi pomocnicze $\{c_n\}$, $\{p_n\}$:
   1. $M_0 = S_0 \geqslant 0$ (zazwyczaj zaczynamy od $S_0 = 1$),
   2. $M_n = \sum_{i=0}^{n-1}(p_i + S_i)$
   3. $c_n M_n \leqslant S_n$ i $c_n \to \infty$, (zazwyczaj $c_n = 2^n$).
2. Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{\nu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\nu_j} < n < M_{\nu_j} + S_{\nu_j}$.
3. oraz dla pewnego $\delta > 0$ istnieje ciąg $\{\mu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\mu_j} < n < M_{\mu_j} + S_{\nu_j}$.
4. to x, y tworzą parę dystrybucyjnie chaotyczna typu 1.

Konstrukcja pary chaotycznej

1. Niech $x, y \in X$. Rozważmy ciągi $\{S_n\}$, $\{M_n\}$ oraz ciągi pomocnicze $\{c_n\}$, $\{p_n\}$:
   1. $M_0 = S_0 \geqslant 0$ (zazwyczaj zaczynamy od $S_0 = 1$),
   2. $M_n = \sum_{i=0}^{n-1}(p_i + S_i)$
   3. $c_n M_n \leqslant S_n$ i $c_n \to \infty$, (zazwyczaj $c_n = 2^n$).
2. Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{\nu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\nu_j} < n < M_{\nu_j} + S_{\nu_j}$.
3. oraz dla pewnego $\delta > 0$ istnieje ciąg $\{\mu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\mu_j} < n < M_{\mu_j} + S_{\nu_j}$.
4. to x, y tworzą parę dystrybucyjnie chaotyczna typu 1.

Konstrukcja pary chaotycznej

1. Niech $x, y \in X$. Rozważmy ciągi $\{S_n\}$, $\{M_n\}$ oraz ciągi pomocnicze $\{c_n\}$, $\{p_n\}$:
   1. $M_0 = S_0 \geqslant 0$ (zazwyczaj zaczynamy od $S_0 = 1$),
   2. $M_n = \sum_{i=0}^{n-1}(p_i + S_i)$
   3. $c_n M_n \leqslant S_n$ i $c_n \to \infty$, (zazwyczaj $c_n = 2^n$).
2. Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{\nu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\nu_j} < n < M_{\nu_j} + S_{\nu_j}$.
3. oraz dla pewnego $\delta > 0$ istnieje ciąg $\{\mu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\mu_j} < n < M_{\mu_j} + S_{\nu_j}$.
4. to x, y tworzą parę dystrybucyjnie chaotyczna typu 1.

Konstrukcja pary chaotycznej

1. Niech $x, y \in X$. Rozważmy ciągi $\{S_n\}$, $\{M_n\}$ oraz ciągi pomocnicze $\{c_n\}$, $\{p_n\}$:
   1. $M_0 = S_0 \geqslant 0$ (zazwyczaj zaczynamy od $S_0 = 1$),
   2. $M_n = \sum_{i=0}^{n-1}(p_i + S_i)$
   3. $c_n M_n \leqslant S_n$ i $c_n \to \infty$, (zazwyczaj $c_n = 2^n$).
2. Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{\nu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\nu_j} < n < M_{\nu_j} + S_{\nu_j}$.
3. oraz dla pewnego $\delta > 0$ istnieje ciąg $\{\mu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\mu_j} < n < M_{\mu_j} + S_{\nu_j}$.
4. to x, y tworzą parę dystrybucyjnie chaotyczna typu 1.

Konstrukcja pary chaotycznej

1. Niech $x, y \in X$. Rozważmy ciągi $\{S_n\}$, $\{M_n\}$ oraz ciągi pomocnicze $\{c_n\}$, $\{p_n\}$:
   1. $M_0 = S_0 \geqslant 0$ (zazwyczaj zaczynamy od $S_0 = 1$),
   2. $M_n = \sum_{i=0}^{n-1}(p_i + S_i)$
   3. $c_n M_n \leqslant S_n$ i $c_n \to \infty$, (zazwyczaj $c_n = 2^n$).
2. Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{\nu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\nu_j} < n < M_{\nu_j} + S_{\nu_j}$.
3. oraz dla pewnego $\delta > 0$ istnieje ciąg $\{\mu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\mu_j} < n < M_{\mu_j} + S_{\nu_j}$.
4. to x, y tworzą parę dystrybucyjnie chaotyczna typu 1.

Konstrukcja pary chaotycznej

1. Niech $x, y \in X$. Rozważmy ciągi $\{S_n\}$, $\{M_n\}$ oraz ciągi pomocnicze $\{c_n\}$, $\{p_n\}$:
   1. $M_0 = S_0 \geqslant 0$ (zazwyczaj zaczynamy od $S_0 = 1$),
   2. $M_n = \sum_{i=0}^{n-1}(p_i + S_i)$
   3. $c_n M_n \leqslant S_n$ i $c_n \to \infty$, (zazwyczaj $c_n = 2^n$).
2. Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{\nu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\nu_j} < n < M_{\nu_j} + S_{\nu_j}$.
3. oraz dla pewnego $\delta > 0$ istnieje ciąg $\{\mu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\mu_j} < n < M_{\mu_j} + S_{\nu_j}$.
4. to x, y tworzą parę dystrybucyjnie chaotyczna typu 1.

Konstrukcja pary chaotycznej

1. Niech $x, y \in X$. Rozważmy ciągi $\{S_n\}$, $\{M_n\}$ oraz ciągi pomocnicze $\{c_n\}$, $\{p_n\}$:
   1. $M_0 = S_0 \geqslant 0$ (zazwyczaj zaczynamy od $S_0 = 1$),
   2. $M_n = \sum_{i=0}^{n-1}(p_i + S_i)$
   3. $c_n M_n \leqslant S_n$ i $c_n \to \infty$, (zazwyczaj $c_n = 2^n$).
2. Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{\nu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\nu_j} < n < M_{\nu_j} + S_{\nu_j}$.
3. oraz dla pewnego $\delta > 0$ istnieje ciąg $\{\mu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\mu_j} < n < M_{\mu_j} + S_{\nu_j}$.
4. to x, y tworzą parę dystrybucyjnie chaotyczna typu 1.

Konstrukcja pary chaotycznej

1. Niech $x, y \in X$. Rozważmy ciągi $\{S_n\}$, $\{M_n\}$ oraz ciągi pomocnicze $\{c_n\}$, $\{p_n\}$:
   1. $M_0 = S_0 \geqslant 0$ (zazwyczaj zaczynamy od $S_0 = 1$),
   2. $M_n = \sum_{i=0}^{n-1}(p_i + S_i)$
   3. $c_n M_n \leqslant S_n$ i $c_n \to \infty$, (zazwyczaj $c_n = 2^n$).
2. Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg $\{\nu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\nu_j} < n < M_{\nu_j} + S_{\nu_j}$.
3. oraz dla pewnego $\delta > 0$ istnieje ciąg $\{\mu_j\}$ taki, że
   - $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$
   - dla dowolnego n z zakresu $M_{\mu_j} < n < M_{\mu_j} + S_{\nu_j}$.
4. to x, y tworzą parę dystrybucyjnie chaotyczna typu 1.

Wygodne narzędzie

Twierdzenie

Istnieje zbiór nieprzeliczalny $\Gamma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \Gamma$ istnieją ciągi rosnące $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ o własności:

$$x_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{oraz} \quad x_{j_n} \neq y_{j_n}$$

Dowód.

1. Z dowolnym $\alpha \in (0,1)$ wiążemy pewien specjalny ciąg:
    - zaczynamy od rozszerzenia $0-1$ liczby (jednego z możliwych) $\alpha = 0.0110111\ldots$ i definiujemy

$$w^{\alpha} = 0\ 0\ 01\ 0\ 011\ 0\ 0110\ 0\ 01101\ 0\ 011011\ldots$$

2. Ostatecznie $\Gamma = \{w^{\alpha} \ : \ \alpha \in (0,1)\}$.

Wygodne narzędzie

Twierdzenie

Istnieje zbiór nieprzeliczalny $\Gamma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \Gamma$ istnieją ciągi rosnące $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ o własności:

$$x_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{oraz} \quad x_{j_n} \neq y_{j_n}$$

Dowód.

1. Z dowolnym $\alpha \in (0,1)$ wiążemy pewien specjalny ciąg:
   - zaczynamy od rozszerzenia $0-1$ liczby (jednego z możliwych) $\alpha = 0.0110111\ldots$ i definiujemy

$$w^\alpha = 0\ 0\ 01\ 0\ 011\ 0\ 0110\ 0\ 01101\ 0\ 011011\ldots$$

2. Ostatecznie $\Gamma = \{w^\alpha \ : \ \alpha \in (0,1)\}$.

Wygodne narzędzie

Twierdzenie

Istnieje zbiór nieprzeliczalny $\Gamma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \Gamma$ istnieją ciągi rosnące $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ o własności:

$$x_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{oraz} \quad x_{j_n} \neq y_{j_n}$$

Dowód.

1. Z dowolnym $\alpha \in (0,1)$ wiążemy pewien specjalny ciąg:
   - zaczynamy od rozszerzenia $0-1$ liczby (jednego z możliwych) $\alpha = 0.0110111\ldots$ i definiujemy

$$w^{\alpha} = 0\ 0\ 01\ 0\ 011\ 0\ 0110\ 0\ 01101\ 0\ 011011\ldots$$

2. Ostatecznie $\Gamma = \{w^{\alpha} \ : \ \alpha \in (0,1)\}$.

Wygodne narzędzie

Twierdzenie

Istnieje zbiór nieprzeliczalny $\Gamma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \Gamma$ istnieją ciągi rosnące $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ o własności:

$$x_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{oraz} \quad x_{j_n} \neq y_{j_n}$$

Dowód.

1. Z dowolnym $\alpha \in (0,1)$ wiążemy pewien specjalny ciąg:
   - zaczynamy od rozszerzenia $0-1$ liczby (jednego z możliwych) $\alpha = 0.0110111\ldots$ i definiujemy

$$w^{\alpha} = 0\ 0\ 01\ 0\ 011\ 0\ 0110\ 0\ 01101\ 0\ 011011\ldots$$

2. Ostatecznie $\Gamma = \{w^{\alpha} \ : \ \alpha \in (0,1)\}$.

Wygodne narzędzie

Twierdzenie

Istnieje zbiór nieprzeliczalny $\Gamma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \Gamma$ istnieją ciągi rosnące $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ o własności:

$$x_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{oraz} \quad x_{j_n} \neq y_{j_n}$$

Dowód.

1. Z dowolnym $\alpha \in (0,1)$ wiążemy pewien specjalny ciąg:
   - zaczynamy od rozszerzenia $0-1$ liczby (jednego z możliwych) $\alpha = 0.0110111\ldots$ i definiujemy

$$w^{\alpha} = 0\ 0\ 01\ 0\ 011\ 0\ 0110\ 0\ 01101\ 0\ 011011\ldots$$

2. Ostatecznie $\Gamma = \{w^{\alpha} \ : \ \alpha \in (0,1)\}$.

Wygodne narzędzie

Twierdzenie

Istnieje zbiór nieprzeliczalny $\Gamma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \Gamma$ istnieją ciągi rosnące $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ o własności:

$$x_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{oraz} \quad x_{j_n} \neq y_{j_n}$$

Dowód.

1. Z dowolnym $\alpha \in (0,1)$ wiążemy pewien specjalny ciąg:
   - zaczynamy od rozszerzenia $0-1$ liczby (jednego z możliwych) $\alpha = 0.0110111\ldots$ i definiujemy

$$w^{\alpha} = 0\ 0\ 01\ 0\ 011\ 0\ 0110\ 0\ 01101\ 0\ 011011\ldots$$

2. Ostatecznie $\Gamma = \{w^{\alpha} \ : \ \alpha \in (0,1)\}$.

Wygodne narzędzie

Twierdzenie

Istnieje zbiór nieprzeliczalny $\Gamma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \Gamma$ istnieją ciągi rosnące $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ o własności:

$$x_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{oraz} \quad x_{j_n} \neq y_{j_n}$$

Dowód.

1. Z dowolnym $\alpha \in (0,1)$ wiążemy pewien specjalny ciąg:
   - zaczynamy od rozszerzenia $0-1$ liczby (jednego z możliwych) $\alpha = 0.0110111\ldots$ i definiujemy

     $$w^{\alpha} = 0\ 0\ 01\ 0\ 011\ 0\ 0110\ 0\ 01101\ 0\ 011011\ldots$$

2. Ostatecznie $\Gamma = \{w^{\alpha} \ : \ \alpha \in (0,1)\}$.

Wygodne narzędzie

Twierdzenie

Istnieje zbiór nieprzeliczalny $\Gamma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \Gamma$ istnieją ciągi rosnące $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ o własności:

$$x_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{oraz} \quad x_{j_n} \neq y_{j_n}$$

Dowód.

1. Z dowolnym $\alpha \in (0,1)$ wiążemy pewien specjalny ciąg:
   - zaczynamy od rozszerzenia $0-1$ liczby (jednego z możliwych) $\alpha = 0.0110111\ldots$ i definiujemy

$$w^{\alpha} = 0\ 0\ 01\ 0\ 011\ 0\ 0110\ 0\ 01101\ 0\ 011011\ldots$$

2. Ostatecznie $\Gamma = \{w^{\alpha} \ : \ \alpha \in (0,1)\}$.

Wygodne narzędzie

Twierdzenie

Istnieje zbiór nieprzeliczalny $\Gamma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \Gamma$ istnieją ciągi rosnące $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ o własności:

$$x_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{oraz} \quad x_{j_n} \neq y_{j_n}$$

Dowód.

1. Z dowolnym $\alpha \in (0,1)$ wiążemy pewien specjalny ciąg:
   - zaczynamy od rozszerzenia $0-1$ liczby (jednego z możliwych) $\alpha = 0.0110111\ldots$ i definiujemy

$$w^\alpha = 0\ 0\ 01\ 0\ 011\ 0\ 0110\ 0\ 01101\ 0\ 011011\ldots$$

2. Ostatecznie $\Gamma = \{w^\alpha \ : \ \alpha \in (0,1)\}$.

Wygodne narzędzie

Twierdzenie

Istnieje zbiór nieprzeliczalny $\Gamma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ taki, że dla dowolnych $x, y \in \Gamma$ istnieją ciągi rosnące $\{i_n\}$, $\{j_n\}$ o własności:

$$x_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{oraz} \quad x_{j_n} \neq y_{j_n}$$

Dowód.

1. Z dowolnym $\alpha \in (0,1)$ wiążemy pewien specjalny ciąg:
   - zaczynamy od rozszerzenia $0-1$ liczby (jednego z możliwych) $\alpha = 0.0110111\ldots$ i definiujemy

$$w^\alpha = 0\ 0\ 01\ 0\ 011\ 0\ 0110\ 0\ 01101\ 0\ 011011\ldots$$

2. Ostatecznie $\Gamma = \{w^\alpha \ : \ \alpha \in (0,1)\}$.

Przykład R. Pikuły

1. Niech $\mathcal{A} = \{0, \diamondsuit\}$ oraz $s < t$.
   1. Punkt okresowy $p^{(s,t)} = (\diamondsuit^{t-s}0^s)^\infty$,
   2. ma własność $\frac{1}{n}\left|p^{(s,t)}_{[0,n-1]}\right|_0 \leqslant \frac{s}{t}$.
2. $Q^{(s,t)} = \left\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ : \ \text{jeśli } p^{(s,t)}_i = 0 \text{ to } x_i = 0\right\}$
3. $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma^j(Q^{(s_i,t_i)})$ gdzie
   1. $\hat{s} = \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \hat{t} = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{t_i} < 1$.
   2. $\lim_{i\to\infty} k_i = +\infty$.

Przykład R. Pikuły

1. Niech $\mathcal{A} = \{0, \diamondsuit\}$ oraz $s < t$.
   1. Punkt okresowy $p^{(s,t)} = (\diamondsuit^{t-s}0^s)^\infty$,
   2. ma własność $\frac{1}{n}\left|p^{(s,t)}_{[0,n-1]}\right|_0 \leqslant \frac{s}{t}$.
2. $Q^{(s,t)} = \left\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ : \ \text{jeśli } p_i^{(s,t)} = 0 \text{ to } x_i = 0\right\}$
3. $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^\infty \bigcup_{j=1}^\infty \sigma^j(Q^{(s_i,t_i)})$ gdzie
   1. $\hat{s} = \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \hat{t} = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ oraz $\sum_{i=1}^\infty \frac{s_i}{t_i} < 1$.
   2. $\lim_{i\to\infty} k_i = +\infty$.

Przykład R. Pikuły

1. Niech $\mathcal{A} = \{0, \diamondsuit\}$ oraz $s < t$.
   1. Punkt okresowy $p^{(s,t)} = (\diamondsuit^{t-s}0^s)^\infty$,
   2. ma własność $\frac{1}{n}\left|p^{(s,t)}_{[0,n-1]}\right|_0 \leqslant \frac{s}{t}$.
2. $Q^{(s,t)} = \left\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ : \ \text{jeśli } p^{(s,t)}_i = 0 \text{ to } x_i = 0\right\}$
3. $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma^j(Q^{(s_i,t_i)})$ gdzie
   1. $\hat{s} = \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \hat{t} = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{t_i} < 1$.
   2. $\lim_{i\to\infty} k_i = +\infty$.

Przykład R. Pikuły

1. Niech $\mathcal{A} = \{0, \diamondsuit\}$ oraz $s < t$.
   1. Punkt okresowy $p^{(s,t)} = (\diamondsuit^{t-s} 0^s)^\infty$,
   2. ma własność $\frac{1}{n} \left| p^{(s,t)}_{[0,n-1]} \right|_0 \leqslant \frac{s}{t}$.
2. $Q^{(s,t)} = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ : \ \text{jeśli } p_i^{(s,t)} = 0 \text{ to } x_i = 0 \right\}$
3. $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma^j (Q^{(s_i,t_i)})$ gdzie
   1. $\hat{s} = \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \hat{t} = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{t_i} < 1$.
   2. $\lim_{i\to\infty} k_i = +\infty$.

Przykład R. Pikuły

1. Niech $\mathcal{A} = \{0, \diamondsuit\}$ oraz $s < t$.
   1. Punkt okresowy $p^{(s,t)} = (\diamondsuit^{t-s}0^s)^\infty$,
   2. ma własność $\frac{1}{n}\left|p^{(s,t)}_{[0,n-1]}\right|_0 \leqslant \frac{s}{t}$.
2. $Q^{(s,t)} = \left\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ : \ \text{jeśli } p^{(s,t)}_i = 0 \text{ to } x_i = 0\right\}$
3. $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma^j(Q^{(s_i,t_i)})$ gdzie
   1. $\hat{s} = \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \hat{t} = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{t_i} < 1$.
   2. $\lim_{i\to\infty} k_i = +\infty$.

Przykład R. Pikuły

1. Niech $\mathcal{A} = \{0, \diamondsuit\}$ oraz $s < t$.
   1. Punkt okresowy $p^{(s,t)} = (\diamondsuit^{t-s} 0^s)^\infty$,
   2. ma własność $\frac{1}{n} \left| p^{(s,t)}_{[0,n-1]} \right|_0 \leqslant \frac{s}{t}$.
2. $Q^{(s,t)} = \left\{ x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ : \ \text{jeśli } p^{(s,t)}_i = 0 \text{ to } x_i = 0 \right\}$
3. $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma^j(Q^{(s_i,t_i)})$ gdzie
   1. $\hat{s} = \{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \hat{t} = \{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{t_i} < 1$.
   2. $\lim_{i \to \infty} k_i = +\infty$.

Przykład R. Pikuły

1. Niech $\mathcal{A} = \{0, \diamondsuit\}$ oraz $s < t$.
   1. Punkt okresowy $p^{(s,t)} = (\diamondsuit^{t-s}0^s)^\infty$,
   2. ma własność $\frac{1}{n}\left|p^{(s,t)}_{[0,n-1]}\right|_0 \leqslant \frac{s}{t}$.
2. $Q^{(s,t)} = \left\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ : \ \text{jeśli } p^{(s,t)}_i = 0 \text{ to } x_i = 0\right\}$
3. $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \sigma^j(Q^{(s_i,t_i)})$ gdzie
   1. $\hat{s} = \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \hat{t} = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{t_i} < 1$.
   2. $\lim_{i\to\infty} k_i = +\infty$.

Podsumowanie znanych przykładów

1. $h_{top}(f) > 0$,
2. w X brak pary DC1,
3. ale X zawiera parę DC2 (a nawet nieprzeliczalny zbiór dystrybucyjnie chaotyczny typu 2).

Pytanie otwarte

Czy (f, X) może mieć PTE i jednocześnie nie zawierać pary DC2?

- [J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps*. Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128].
- [R. Pikuła, *On some notions of chaos in dimension zero*, Colloq. Math., **107** (2007), 167-177].

Podsumowanie znanych przykładów

1. $h_{top}(f) > 0$,
2. w X brak pary DC1,
3. ale X zawiera parę DC2 (a nawet nieprzeliczalny zbiór dystrybucyjnie chaotyczny typu 2).

Pytanie otwarte

Czy (f, X) może mieć PTE i jednocześnie nie zawierać pary DC2?

- [J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps*. Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128].
- [R. Pikuła, *On some notions of chaos in dimension zero*, Colloq. Math., **107** (2007), 167-177].

Podsumowanie znanych przykładów

1. $h_{top}(f) > 0$,
2. w X brak pary DC1,
3. ale X zawiera parę DC2 (a nawet nieprzeliczalny zbiór dystrybucyjnie chaotyczny typu 2).

Pytanie otwarte

Czy (f, X) może mieć PTE i jednocześnie nie zawierać pary DC2?

- [J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps*. Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128].
- [R. Pikuła, *On some notions of chaos in dimension zero*, Colloq. Math., **107** (2007), 167-177].

Podsumowanie znanych przykładów

1. $h_{top}(f) > 0$,
2. w X brak pary DC1,
3. ale X zawiera parę DC2 (a nawet nieprzeliczalny zbiór dystrybucyjnie chaotyczny typu 2).

Pytanie otwarte

Czy (f, X) może mieć PTE i jednocześnie nie zawierać pary DC2?

- [J. Smítal, M. Štefánková, *Distributional chaos for triangular maps.* Chaos, Solitons & Fractals **21** (2004) 1125–1128].
- [R. Pikuła, *On some notions of chaos in dimension zero*, Colloq. Math., **107** (2007), 167-177].