DENJOY DAWNIEJ I DZIŚ

P. Walczak, Będlewo 2007

1. Klasycznie: przykład i twierdzenie Denjoy on S^1.

2. Ogólnie: pewne działania grupy $\mathbb{Z}^d$ na S^1.

3. Szkic dowodu: wędrówki losowe po grupach.

4. Wymiar > 1.

Definicja.

zbiorem minimalnym (dla działania grupy, pseudogrupy, dla foliacji) nazywamy zbiór domknięty, niepusty, nasycony i minimalny ze względu na te własności.

zbiór minimalny *wyjątkowy* (EMS = *exceptional minimal set*), to taki zbiór minimalny, który nie jest całą przestrzenią i który nie redukuje się do pojedynczej orbity (pojedynczego liścia).

Problem ogólny.

Kiedy EMS'y istnieją, a kiedy nie ?

(1) w wymiarze 1, tj. na S^1,

(2) w wymiarze > 1.

LITERATURA

[Den] A. Denjoy, *Sur les courbes def. par des eq. diff. sur la tore*, J. Math. Pure Appl., **11** (1932), 333–375.

[C-LN] C. Camacho, A. Lins Neto, Geometric Theory of Foliations, Birkhäuser, 1985.

[Tam] I. Tamura, *Topologija slojenij*, Izdatelstwo MIR, Moskwa 1979.

[Her] M. Hermann, *Sur la conjugaison diff. des diffeo. du cercle a des rotations*, Publ. Math. IHES **49** (1979), 5 – 234.

[DKN] B. Deroin, V. Kleptsyn, A. Navas, *Sur la dynamique unidimensionelle en regularite intermediate*, Preprint, arXiv:math.DS/0506063.

[BNW] A. Biś, H. Nakayama, P.W., *Modelling minimal foliated spaces with positive entropy*, preprint na http://www.math.uni.lodz.pl/~pawelwal (w druku: Hokkaido Math. J.).

[CC] A. Candel, L. Conlon, Foliations I i II, Amer. Math. Soc. 2000 i 2003.

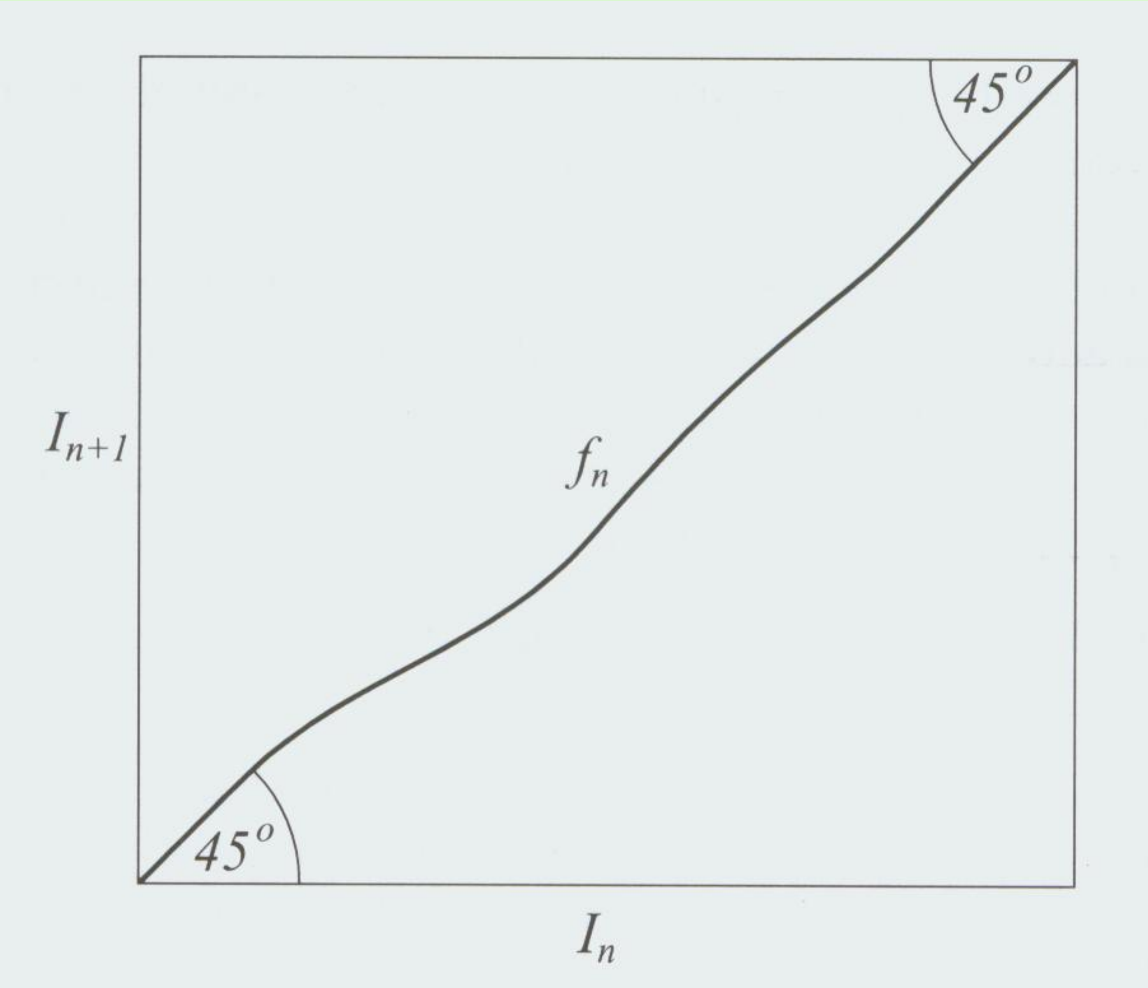
[W] P.W., Dynamics of Foliations, Groups and Pseudogroups, Monografie Matematyczne **64**, Birkhaüser 2004.

TWIERDZENIE DENJOY

Jeżeli f jest C^2-dyfeomorfizmem okręgu S^1, to albo wszystkie orbity f są gęste, albo istnieje orbita skończona.

PRZYKŁAD DENJOY

$\alpha \notin \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Z}$, $x_n = \{n\alpha\}$ = część ułamkowa $n\alpha$,
$f(x) = \{x + \alpha\}$ dla $x \in I = [0, 1]$
(= obrót o kąt α przy utożsamieniu $S^1 = [0, 1]/\{0 \equiv 1\}$)
I_n = odcinek długości $l_n = 1/(1 + n^2)$
$f_n : I_n \to I_{n+1}$ odwzorowanie przedstawione na następującym rysunku:



Rysunek 1: Wstawka Denjoy.

wstawiamy w I odcinek I_n w punkcie x_n, $n \in \mathbb{Z}$

otrzymujemy odcinek $J = [0,1] \cup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$

$L =$ długość $(J) = 1 + \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} < +\infty$

$S^1 = J/\{0 \equiv L\}$

definiujemy F:

$F(x) = f(x)$ gdy $x \in I$

$F(x) = f_n(x)$ gdy $x \in I_n$

Wtedy:

(1) $F : S^1 \to S^1$ jest dyfeomorfizmem klasy C ^{1}

(bo $\frac{l_n}{l_{n+1}} \to 1$, gdy $n \to \infty$),

(2) F nie ma orbit gęstych,

(3) F nie ma orbit skończonych.

$\square$

UOGÓLNIONY PRZYKŁAD DENJOY

Jak poprzednio, $I = [0, 1]$.

$d \in \mathbb{N}, \quad d \geqslant 2$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_d \notin \mathbb{Q}$ niezależne nad $\mathbb{Q}$

$m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$

$m + 1_j = (m_1, \ldots, m_j + 1, \ldots, m_d)$ dla $j = 1, \ldots, d$

wybieramy $K \in \mathbb{N}$ $(K \geqslant 2)$ i $\varepsilon > 0$

$I_m =$ odcinek długości $l_m = \frac{1}{(|m_1|+\ldots+|m_d|+K)^d (\log(|m_1|+\ldots+|m_d|+K))^{1+\varepsilon}}$

$p_m = \{m_1\alpha_1 + m_d\alpha_d\} \in I$

wstawiamy w I odcinki I_m w punktach p_m

otrzymujemy odcinek J długości $L = 1 + \Sigma_{m\in\mathbb{Z}^d}\, l_m < +\infty$

oraz
okrąg $S^1 = J/\{0 \equiv L\}$

Dla $a > 0$: $\phi_a(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi} \arctan(at)$ gdy $t \in \mathbb{R}$.

$\phi_a : \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \to [0, a]$ ("na")

Dla $a, b > 0$: $\phi_{a,b} = \phi_b \circ \phi_a^{-1} : [0, a] \to [0, b]$ ("na")

Wtedy:

(1) $\phi'_{a,b}(\phi_a(u)) = \frac{u^2+1/a^2}{u^2+1/b^2}$

Podobnie: $\phi_{I,J}$ dla dowolnych odcinków $I, J \subset \mathbb{R}$.

Dalej: dla $j = 1, \ldots, d$:

$f_j(t) = \{t + \alpha_j\}$ (obrót o kąt α_j na S^1)

$f_j = \phi_{I_m, I_{m+1_j}} : I_m \to I_{m+1_j}$ dla $m \in \mathbb{Z}^d$

Wtedy, $f_1, \ldots, f_d$ generują działanie grupy $\mathbb{Z}^d$ bez orbit gęstych i bez orbit skończonych.

Gładkość odwzorowań f_j:

(i) Warunek (1) plus warunek $\lim_{m\to\infty} l_m/l_{m+1_j} = 1$ implikują relację

$$f_j \in \mathrm{C}^1.$$

(ii) Oszacowanie

$$|\phi''_{a,b}| \leqslant \frac{6\pi}{a} \cdot \Big|\frac{b}{a} - 1\Big|$$

implikuje (po dość żmudnych rachunkach)

$$f_j \in \mathrm{C}^{1+\eta},$$

gdzie

$$\eta(s) = s^{1/d}(\log(1/s))^{1/d+\epsilon}.$$

Stąd,

$$f_j \in \mathrm{C}^{1+1/d-\epsilon}.$$

TWIERDZENIE. *Jeśli $d \geqslant 2$ i $\epsilon > 0$, to każde działanie wolne grupy $G = \mathbb{Z}^d$ na S^1 klasy $C^{1+1/d+\epsilon}$ jest minimalne.*

Szkic dowodu.

Założenia: $d = 2$, g_1, g_2 - generatory G,
działanie nie jest minimalne, więc S^1 zawiera G-niezmienniczy zbiór Cantora C, I - luka w C.

Obserwacja: ponieważ działanie jest wolne, więc obrazy $g(I)$, $g \in G$, są parami rozłączne.

Narzędzie: (Ω, μ), gdzie
Ω = zbiór nieskończonych dróg "w przód" w grafie Cayleya grupy G,
μ - miara prawdopodobieństwa na Ω wyznaczona przez

$$P((m, n) \mapsto (m+1, n)) = \frac{m+1}{m+n+2}, \; P((m, n) \mapsto (m, n+1)) = \frac{n+1}{m+n+2}.$$

Lemat 1. *Jeżeli* $r > 1/2$ *i*

$$l_r(\omega) := \sum_{k\geqslant 0} |g_{i_k} \circ \ldots \circ g_{i_1}(I)|^r,$$

gdy $\omega = (g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots) \in \Omega$, *to* $l_r(\omega) < \infty$ *dla* μ*-p.w.* $\omega \in \Omega$.

Dowód. Wystarczy pokazać, że wartość oczekiwana $E(l_r)$ jest skończona:

$$\begin{aligned} E(l_r) &= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{m+n=k} \frac{|g_1^m g_2^n(I)|^r}{k+1} \\ &\leqslant \text{na mocy Höldera} \times 2 \\ &\leqslant \Big(\sum_{g\in G} |g(I)|\Big)^r \cdot \Big(\sum_{k\geqslant 1} k^{-r/(1-r)}\Big)^{1-r} \\ &< \infty \end{aligned}$$

(bo $\frac{r}{1-r} > 1$).

Wniosek 1. *Jeśli* $A >> 0$, *to* $\Omega(A) := \{\omega \in \Omega; l_r(\omega) < A\}$ *ma dodatnią miarę.*

Lemat 2. [Sacksteder - uproszczony] *Dla każdego* $A > 0$ *istnieje stała* $\delta > 0$ *taka, że jeśli* $h = g_{i_n} \circ \ldots \circ g_{i_1}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left|g_{i_k} \circ \ldots \circ g_{i_1}(I)\right|^r < A$$

i $h(I)$ *leży w* δ*-otoczeniu* I, *to* h *posiada hiperboliczny punkt stały.*

(Dowód: oparty na tzw. oszacowaniach Schwartza-Sackstedera wynikających z nierówności

$$|\log g'(x) - \log g'(y)| \leqslant C|x-y|^r, \quad g = g_1, g_2$$

i "prawa łańcucha" - szczegóły patrz [CC].)

Niech teraz $K :=$ prawostronne δ-otoczenie I, zaś $h_n(\omega) := g_{i_n} \circ \ldots \circ g_{i_1}$ gdy $\omega = (g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots) \in \Omega$.

Lemat 3. Zbiór

$$X = \{\omega \in \Omega; h_n(\omega)(I) \not\subset K, n = 1, 2, \ldots\}$$

ma miarę μ zero.

Dowód. (1) Działanie naszej grupy jest semi-sprzężone z grupą obrotów: ściągając do punktu składowe dopełnienia $S^1 \setminus C$ otrzymujemy topologiczny okrąg, na którym nasze generatory g_1 i g_2 mają niewymierne liczby obrotu. Zatem: istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$(\forall \text{ luki } J \subset S^1 \setminus C)\ (\exists n_1, n_2 \leqslant N)\ g_1^{n_1}(J) \subset K,\ \ g^{n_2}(J) \subset K.$$

(2) Z określenia miary μ wynika, że prawdopodobieństwo przejścia "w górę" (odp. "w prawo") jest $\geqslant 1/2$ powyżej (odp., poniżej) przekątnej w diagramie Cayleya grupy $\mathbb{Z}^2$.

(3) Z (1) i (2) wynika, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\begin{aligned} \mu(X) &\leqslant \mu(\{\omega \in \Omega; h_n(\omega) \not\subset K, n = 1, 2, \ldots, kN\}) \\ &\leqslant (1 - 2^{-N})^k \to 0 \quad \text{gdy} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

□

Teza twierdzenia (dla $d = 2$) wynika bezpośrednio z powyższych faktów: jeśli $A >> 0$, $\omega \in \Omega(A)$ i $h_n(\omega)(I) \subset K$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $h_n(\omega)$ posiada (hiperboliczny) punkt stały, sprzeczność. □

Uwaga. Dla dowolnego d, rozważamy miarę μ wyznaczoną przez

$$P((n_1, \ldots, n_d) \mapsto (n_1, \ldots n_j + 1, \ldots n_d)) = \frac{n_j + 1}{\Sigma_j n_j + d}$$

dla $j = 1, \ldots, d$. Reszta praktycznie bez zmian.

4. Wymiar > 1.

M ($\dim M = m$) – rozmaitość riemannowska, zwarta
$S = M \setminus \cup_i B_i$ – podzbiór M otrzymany przez usunięcie *ciągu zerowego* (*null sequence*) kul otwartych B_i, $i = 1, 2, \ldots$ o parami rozłącznych domknięciach $\overline{B}_i$ i takich, że suma $\cup_i B_i$ jest gęsta w M. Analogicznie do

G. T. Whyburn, *Topological characterization of the Sierpiński curve*, Fund. Math. **45** (1958), 320–324.

mamy, że zbiory S i S' otrzymane z M przez usunięcie dwu różnych ciągów zerowych są homeomorficzne.
Dla $M = S^2$, $S =$ klasyczny dywan Sierpińskiego
stąd tu

Definicja. *S = M-dywan Sierpińskiego.*

G – skończenie generowana grupa izometrii M.
Założenie: $(\exists x \in M)$ orbita $G(x)$ jest gęsta na M i działanie G na $G(x)$ jest wolne.

Twierdzenie. *Istnieje grupa* $\tilde{G}$ *homeomorfizmów* M *izomorficzna z* G *i posiadająca* M*-dywan Sierpińskiego jako zbiór minimalny.*

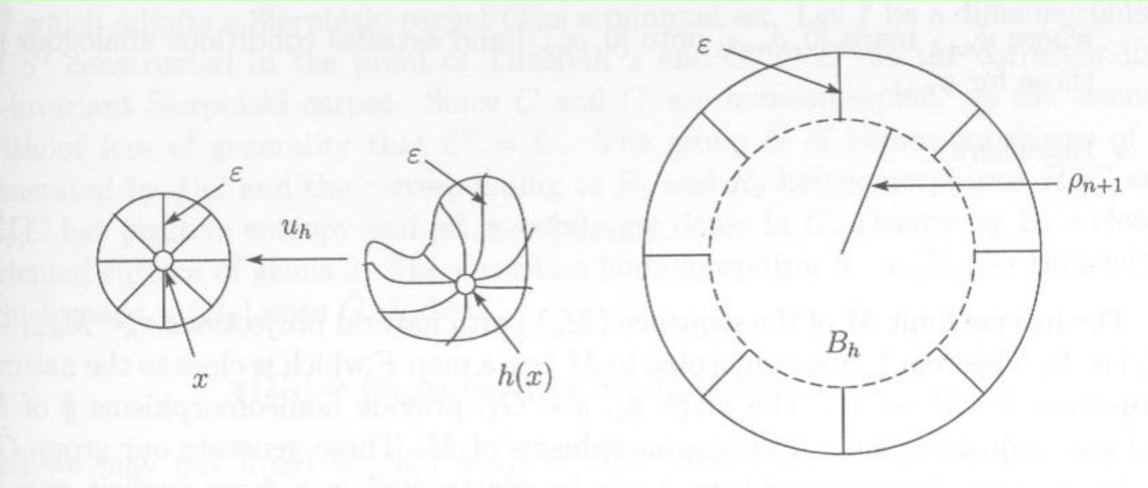
Szkic dowodu.

$G_1 =$ skończony i symetryczny zbiór generujacy G
$G_n = \{g_1 \cdot \ldots \cdot g_n, g_j \in G_1\}$
Indukcyjnie względem n wstawiamy w M "geodezyjne" dyski B_h o środkach $h(x)$ i małych promieniach ρ_n, $h \in G_n$:

$$\rho_{n+1} = \frac{1}{3(1+n^2)} \cdot \min\{\varepsilon, d_n(h(x), B_{h'}), h' \in G_n, h \in G_{n+1} \setminus G_n\},$$

gdzie $\varepsilon = \frac{1}{2} \times$ promień injektywności na M

Używamy do tego G-zgodnych współrzędnych normalnych: jeżeli $u = (r, \theta)$ są takimi współrzędnymi w punkcie x, to $u_h = u \circ h^{-1}$ dla $h \in G$.



Rysunek 2: Wstawianie dysków.

Dla każdego $g \in G_1$, indukcyjnie określamy homeomorfizmy $g_n : M_n = M \cup_{h \in G_n} B_h \to M$ takie, że $g_n = g$ na M.
Określamy $\tilde{M}$ jako granicę odwrotną systemu (M_n, π_n), gdzie $\pi_n : M_{n+1} \to M_n$ jest naturalnym odwzorowaniem "ściągającym zbędne dyski do punktu".
Na mocy tzw. "*decomposition theory*"

(patrz R. J. Daverman, Decomposition of manifolds, Academic Press 1986)

$\tilde{M}$ jest homeomorficzne z M.
Odwzorownia $g_n : M_n \to M_n$ dają odwzorowania $\tilde{g} : \tilde{M} \to \tilde{M}$ generujące poszukiwaną grupę $\tilde{G}$. $\square$

Problemy otwarte

1. W [DKN] pozostaje (?) otwarty przypadek różniczkowalności klasy $C^{1+1/d}$:
uogólnione twiedzenie Denjoy działa w klasie $C^{1+1/d+\varepsilon}$,
uogólniony przykład Denjoy – w klasie $C^{1+1/d-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

2. W [BNW] nie rozważano gładkości w ogóle.
Jak więc gładka może być tamtejsza konstrukcja ?
Dowolnie ?
Eeee, raczej nie.
Jest więc możliwe coś na kształt twierdzenia Denjoy w wymiarze > 1 ?

□□□