Rezonans parametryczny
w liniowych układach hamiltonowskich z wielowymiarowym czasem

Zuzanna Rzeszótko

Promotor: prof. dr hab. Vasile Glavan

29 kwietnia 2006 r.

Wprowadzenie

- Rezonans parametryczny: P.L.Kapica(1951), M.G.Krein (1950), I.M.Gelfand i V.B.Lidskiy (1955), R.Cushman i A.Kelly (1979), M.Levi (1983), N.N.Nechoroshev, S.Yu.Dobrochotov i A.B.Valino (1984), V.I.Arnold i A.B.Givental (2000), M.P.Wójtkowski (1989) i inni.
- Bihamiltonowe układy równań różniczkowych: L.M.Lerman i Ya.L.Umanskiy (1998).

Wprowadzenie

- Rozszerzenie metod i rezultatów teorii stabilności i mocnej stabilności liniowych układów równań różniczkowych zwyczajnych i różnicowych układów równań Hamiltona na przypadek liniowych działań symplektycznych grup R^m i Z^m.
- Zadanie jednoczesnego sprowadzenia skończonej rodziny odwzorowań liniowych do postaci "normalnej" - nierozwiązalny problem (I.M.Gelfand, V.A.Ponomarev (1969)).

Cel badań

- Określenie warunków koniecznych i dostatecznych mocnej stabilności dla liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań różniczkowych Hamiltona.
- Badanie stabilności dyskretnych, liniowych, zupełnie całkowalnych, autonomicznych układów symplektycznych i liniowych działań Poissona grupy Z^m.

Cel badań

- Określenie i udowodnienie kryterium mocnej stabilności dla liniowych, wielookresowych układów Hamiltona z wielowymiarowym czasem.
- Znalezienie form normalnych dla liniowych polioperatorów Hamiltona i liniowych polioperatorów symplektycznych w przypadku półprostym.

Mocna stabilność liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

I.V.Gajszun (1983), A.I.Perov, V.G.Zadorożny (1970): warunki rozwiązalności układu równań

$$\frac{\partial x}{\partial t_j} = A_j x, \quad (x \in R^{2n},\ t_j \in R,\ j = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

gdzie A_j – parami przemienne macierze Hamiltona.
Analog twierdzenia Floquet–Lyapunova dla wielowymiarowego, liniowego, zupełnie całkowalnego równania ze współczynnikami okresowymi.

Mocna stabilność liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ – polioperator Hamiltona, tzn. ciąg parami przemiennych macierzy Hamiltona.
Dla liniowego, zupełnie całkowalnego układu (1) macierz fundamentalna ma postać $\exp(\mathcal{A}, t) := \exp(A_1 t_1 + \cdots + A_m t_m)$.

Układ (1) nazywa się *stabilnym*, jeżeli istnieje takie $M > 0$, że $\|\exp(\mathcal{A}, t)\| < M$ dla wszystkich $t \in R^m$.

Układ ten nazywa się *mocno stabilnym*, jeżeli istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla dowolnego polioperatora $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\} \in (sp(2n, R))^m$, $B_i \circ B_j = B_j \circ B_i$, $\|B_i - A_i\| < \varepsilon$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, nierówność $\|\exp(\mathcal{B}, t)\| < M$ jest spełniona dla pewnego $M > 0$ i wszystkich $t \in R^m$.

Mocna stabilność liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Warunki dostateczne mocnej stabilności zupełnie całkowalnych, liniowych układów równań Hamitona postaci (1).

$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ – ciąg macierzy prawych stron układu (1).

Twierdzenie 1

Niech układ (1) będzie stabilny i załóżmy, że istnieje mocno stabilny element $\exp(\mathcal{A}, t_0)$ *dla pewnego* $t_0 \in R^m$*. Wtedy układ (1) jest mocno stabilny.*

Mocna stabilność liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Niech $\mathcal{L}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni C^{2n} z symplektyczną formą dwuliniową $[\cdot,\cdot]$. Mówimy, że $\mathcal{L}$ jest dodatnio określona (ujemnie określona), jeżeli dla każdego niezerowego wektora $\xi \in \mathcal{L}$ spełniona jest nierówność $\frac{1}{2i}\left[\xi,\overline{\xi}\right] > 0$ (odp. $\frac{1}{2i}\left[\xi,\overline{\xi}\right] < 0$).

Niech S oznacza kompleksyfikację hamiltonowego lub symplektycznego operatora liniowego w R^{2n}. Wartość własna λ operatora S nazywa się dodatnio określoną (ujemnie określoną), jeśli odpowiadająca parze $(\xi,\overline{\xi})$ podprzestrzeń własna (t.j. maksymalna niezmiennicza) jest dodatnio określona (ujemnie określona).

Mocna stabilność liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Twierdzenie (M.G.Krein)

Stabilny, liniowy, hamiltonowy (lub symplektyczny) operator jest mocno stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego wartości własne są określonego znaku, tzn. są dodatnio lub ujemnie określone.

Mocna stabilność liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Wspólne spektrum: dowolna rodzina parami przemiennych zespolonych operatorów liniowych posiada *wspólny wektor własny*, tzn. dla dowolnego $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $A_i \circ A_j = A_j \circ A_i$, istnieje taki wektor $h \neq 0$, że dla wszystkich $j = 1, \ldots, m$ i pewnego $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in C^{m^*}$ zachodzi równość $A_j h = \lambda_j h$.

Element Λ nazywa się wtedy *funkcjonałem własnym*, odpowiadającym wspólnemu wektorowi własnemu h.

Zbiór wszystkich funkcjonałów własnych określa wspólne spektrum $\sigma(\mathcal{A})$.

Mocna stabilność liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Funkcjonał własny $\Lambda \in C^{m*}$ nazywa się określonym, jeżeli istnieje taki element $t_0 \in R^m$, że $\exp(\Lambda, t_0)$ jest dodatnio określoną wartością własną operatora symplektycznego $\exp(\mathcal{A}, t_0)$.

Twierdzenie 2

Jeśli wspólne spektrum rodziny parami przemiennych operatorów Hamiltona jest czysto urojone i określonego znaku, to odpowiadający temu spektrum układ (1) jest mocno stabilny.

Mocna stabilność liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Twierdzenie 3

Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ będzie polioperatorem Hamiltona z wielokrotnymi funkcjonałami własnymi

$$\Lambda_1 = \{i\lambda_1^1, \ldots, i\lambda_m^1\}, -\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k = \{i\lambda_1^k, \ldots, i\lambda_m^k\}, -\Lambda_k,$$

$m_1, \ldots, m_k$ – odpowiadające krotności, a V_r – podprzestrzeń przestrzeni $(R^{2n})^m$ odpowiadająca funkcjonałom własnym Λ_r oraz $-\Lambda_r$ krotności m_r. Ponadto, niech $\mathcal{A}\backslash V_r$ oznacza ograniczenie polioperatora $\mathcal{A}$ na tę podprzestrzeń. Przy tych założeniach polioperator $\mathcal{A}$ jest mocno stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego r ograniczony polioperator $\mathcal{A}\backslash V_r$ jest mocno stabilny.

Mocna stabilność liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

R.Cushman i A.Kelly (1979) wskazali geometryczne kryterium mocnej stabilności liniowego układu Hamiltona:

Twierdzenie

Układ liniowy z macierzą $A \in sp(2n, R)$ jest mocno stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy centralizator

$$C(A) := \{B \in sp(2n, R) : [A, B] = 0\}$$

w $sp(2n, R)$ zawiera tylko stabilne elementy, tj. półproste macierze Hamiltona z czysto urojonymi lub zerowymi wartościami własnymi.

Dowód tego faktu opiera się w dużej mierze na teorii normalnych form macierzy Hamiltona.
Inny dowód, wykorzystujący geometrię grupy Liego $Sp(2n, R)$, podał M.Levi (1983).

Mocna stabilność liniowych, autonomicznych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Pewne uogólnienia rezultatów R.Cushmana, A.Kelly i M.Levi na przypadek liniowych symplektycznych działań grupy R^m.

Twierdzenie 4

Jeżeli $\bigcup_{j=1}^{m} C(A_j)$ *zawiera tylko stabilne liniowe operatory Hamiltona, to układ* (1) *jest mocno stabilny.*

Twierdzenie 5

Jeżeli układ (1) *jest mocno stabilny, to* $\bigcap_{j=1}^{m} C(A_j)$ *zawiera tylko stabilne operatory.*

Warunki dostateczne twierdzenia pierwszego nie są warunkami koniecznymi, a warunki konieczne twierdzenia drugiego nie są dostatecznymi.

Metoda orbit i mocna stabilność liniowych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Zdefiniujemy "diagonalne dołączone" działanie π grupy symplektycznej $Sp(2n, R)$, przestrzeni liniowej $sp(2n, R)^m$ w następujący sposób:

$$\pi(g; \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}) = \{gA_1g^{-1}, gA_2g^{-1}, \ldots, gA_mg^{-1}\}.$$

Stabilizator punktu $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}^T$ – to podgrupa

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{A}) = \{g \in Sp(2n, R) : [A_j, g] = 0, j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Oznaczymy przez $\mathrm{stab}(\mathcal{A})$ odpowiadającą podalgebrę Liego. Dla $A \in sp(2n, R)$ określimy operator liniowy

$$\mathrm{ad}_A : sp(2n, R) \to sp(2n, R), \quad \mathrm{ad}_A B = [A, B] = AB - BA.$$

Metoda orbit i mocna stabilność liniowych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Stwierdzenie 1

Pochodna cząstkowa D_1 działania

$$\pi : Sp(2n, R) \times sp(2n, R)^m \longrightarrow sp(2n, R)^m$$

w punkcie $(e, \mathcal{A})$ jest równa

$$D_1\pi(e, \mathcal{A})U = \{\mathrm{ad}_{A_1} U, \mathrm{ad}_{A_2} U, \ldots, \mathrm{ad}_{A_m} U\} \quad (U \in sp(2n, R)).$$

Metoda orbit i mocna stabilność liniowych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Stąd wynika, że jeśli wszystkie operatory $A_1, A_2, \ldots, A_m$ są półproste, to orbita

$$orb(\mathcal{A}) = \{\pi(g; \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}) : g \in Sp(2n, R)\}$$

jest zamknięta i przestrzeń styczna do tej orbity w punkcie $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}^T$ jest izomorficzna (jako przestrzeń wektorowa) z przestrzenią ilorazową

$$\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}/\mathrm{stab}(\mathcal{A})^m := \{(\mathrm{ad}_{A_1} U, \ldots, \mathrm{ad}_{A_m} U) + \mathrm{stab}(\mathcal{A})^m \ :$$

$$U \in sp(2n, R)\}$$

Metoda orbit i mocna stabilność liniowych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Działanie π zachowuje warunek przemienności, dlatego wprowadzimy zamknięty niezmienniczy podzbiór $\mathcal{M} \subset sp(2n, R)^m$, jako podzbiór rozwiązań układu $[A_i, A_j] = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ w $sp(2n, R)^m$. Ogólnie mówiąc, $\mathcal{M}$ ma osobliwości, dlatego dalej będziemy zakładać, że ciąg $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ prawych części układu (1) zawiera elementy półproste, co zabezpiecza zamkniętość orbity tego ciągu i istnienie przestrzeni stycznej do rozmaitości $\mathcal{M}$ w punkcie $\mathcal{A}$.

Stwierdzenie 2

Przetrzeń styczna do $\mathcal{M}$ w punkcie $\mathcal{A}$ jest równa

$$T_{\mathcal{A}}\mathcal{M} = \{\{C_1, \ldots, C_m\} \in sp(2n, R)^m : \mathrm{ad}_{A_i} C_j = \mathrm{ad}_{A_j} C_i;$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Metoda orbit i mocna stabilność liniowych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Na algebrze Liego $sp(2n, R)$ określono iloczyn skalarny $\mathrm{tr}(AB)$. Rozszerzamy ten iloczyn skalarny "po współrzędnych" na przestrzeń $sp(2n, R)^m$, a mianowicie, dla

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}^T, \ \mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}^T \in sp(2n, R)^m,$$

określamy $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{tr}(A_j B_j)$.

Stwierdzenie 3

Ciąg $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}^T \in sp(2n, R)^m$ jest ortogonalny do orbity w punkcie $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}^T$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{m} [A_i, C_i] = 0$.

Metoda orbit i mocna stabilność liniowych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Jeśli oznaczymy przez $\mathrm{ad}_{\mathcal{A}^*}$ ciąg operatorów liniowych

$$\{\mathrm{ad}_{A_1}, \mathrm{ad}_{A_2}, \ldots, \mathrm{ad}_{A_m}\},$$

to możemy utożsamiać przestrzeń styczną w punkcie $\mathcal{A} \in sp(2n, R)^m$ z $\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}/\mathrm{stab}(\mathcal{A})^m \oplus \ker \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^*}$, gdzie $\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_{\mathcal{A}}/\mathrm{stab}(\mathcal{A})^m$ jest przestrzenią styczną do orbity w punkcie $\mathcal{A}$, a $\ker \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^*}$ jest dopełnieniem ortogonalnym.

Lemat 1 (O otoczeniu "rurkowatym")

Niech polioperator Hamiltona $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \in sp(2n, R)^m$ będzie półprosty. Wtedy istnieje dyfeomorfizm otoczenia $\mathcal{A} \in sp(2n, R)^m$ na otoczenie zera w

$$sp(2n, R)/\mathrm{stab}(\mathcal{A}) \oplus \ker \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^*}.$$

Metoda orbit i mocna stabilność liniowych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

Wniosek: każdy ciąg $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ w $sp(2n, R)^m$ dostatecznie bliski półprostemu ciągowi $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ można jednoznacznie przedstawić jako przesunięcie przy diagonalnym dołączonym działaniu grupy $Sp(2n, R)$ na $sp(2n, R)^m$ pewnego ciągu $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$, ortogonalnego do orbity elementu $\mathcal{A}$.

Lemat 2 (O adaptowanym "rurkowatym" otoczeniu)

Niech polioperator $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \in \mathcal{M}$ będzie półprosty. Wtedy każdy operator $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ dostatecznie bliski do $\mathcal{A}$, można jednoznacznie przedstawić jako przesunięcie przy diagonalnym dołączonym działaniu pewnego elementu $\mathcal{D} \in \mathcal{M}$, ortogonalnego do orbity.

Metoda orbit i mocna stabilność liniowych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona

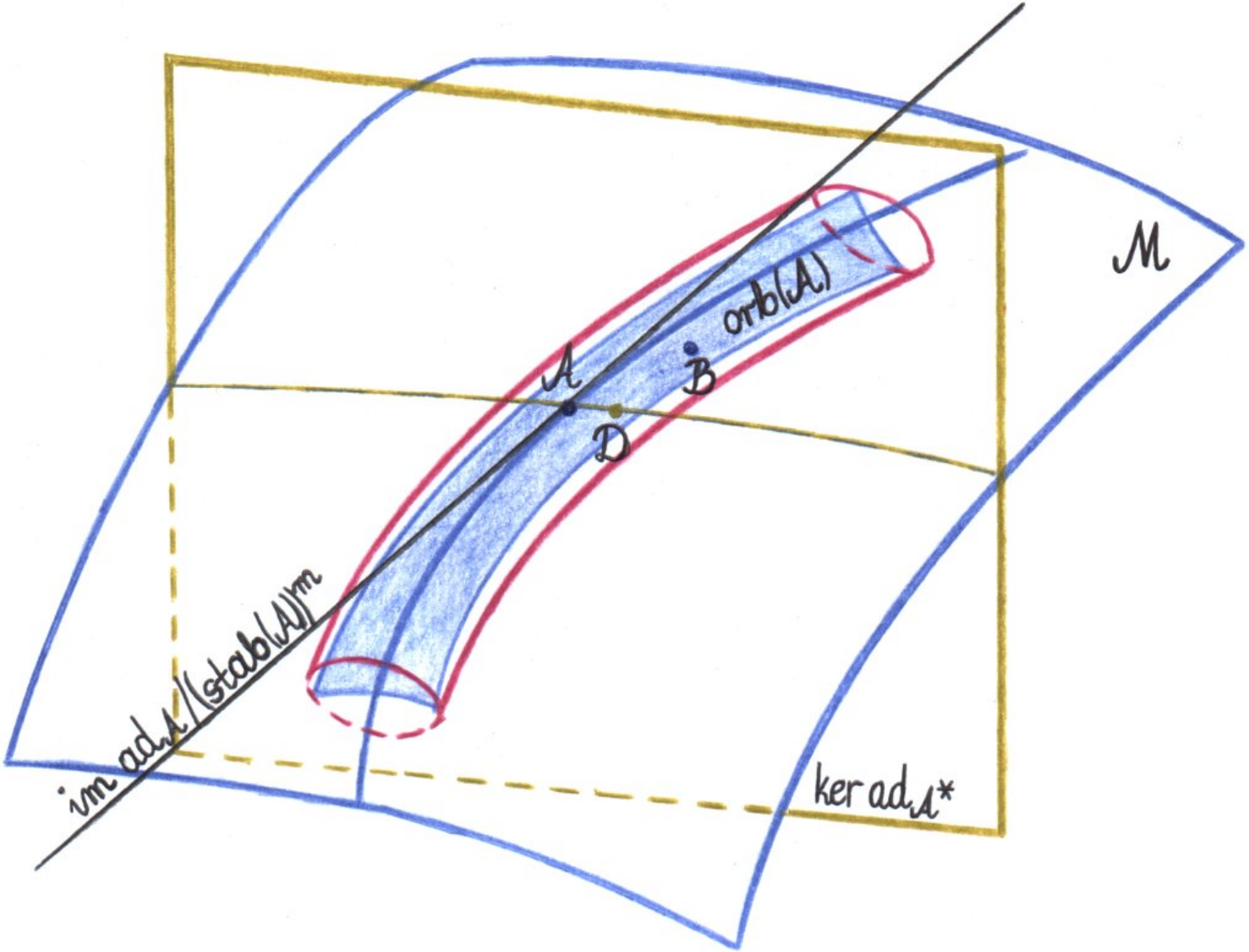
Główny rezultat:

Twierdzenie 6

Półprosty polioperator Hamiltona $\mathcal{A}$ jest mocno stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg $\mathcal{D} \in \mathcal{M} \cap \ker \mathrm{ad}_{\mathcal{A}^*}$, dostatecznie bliski do $\mathcal{A}$, jest stabilny.

Jako częściowe przypadki tego rezultatu można wyprowadzić warunki dostateczne mocnej stabilności z twierdzenia 4, jak również warunki konieczne mocnej stabilności, określone w twierdzeniu 5.

Metoda orbit i mocna stabilność liniowych, zupełnie całkowalnych układów równań Hamiltona



Zastosowanie pakietu *Mathematica* do określenia mocnej stabilności liniowych układów Hamiltona

Przykład. Rozpatrzmy polioperator Hamiltona $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ złożony z następujących macierzy

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

Zastosowanie pakietu *Mathematica* do określenia mocnej stabilności liniowych układów Hamiltona

W tym przypadku, dla mocnej stabilności polioperatora $\mathcal{A}$ konieczne i dostateczne jest, aby wszystkie macierze Hamiltona D_1, D_2, D_3, wystarczająco bliskie macierzom A_1, A_2, A_3 i spełniające równości $A_1D_1 - D_1A_1 + A_2D_2 - D_2A_2 + A_3D_3 - D_3A_3 = 0$, $D_1D_2 = D_2D_1$, $D_1D_3 = D_3D_1$, $D_2D_3 = D_3D_2$ były stabilne. Zastosowanie pakietu *Mathematica* pozwala znaleźć macierze spełniające powyższe warunki, na przykład otrzymujemy następujący typ macierzy:

$$D_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_4\xi_4)/\chi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & \xi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}$$

Zastosowanie pakietu *Mathematica* do określenia mocnej stabilności liniowych układów Hamiltona

W tym przypadku, dla mocnej stabilności polioperatora $\mathcal{A}$ konieczne i dostateczne jest, aby wszystkie macierze Hamiltona D_1, D_2, D_3, wystarczająco bliskie macierzom A_1, A_2, A_3 i spełniające równości $A_1D_1 - D_1A_1 + A_2D_2 - D_2A_2 + A_3D_3 - D_3A_3 = 0$, $D_1D_2 = D_2D_1$, $D_1D_3 = D_3D_1$, $D_2D_3 = D_3D_2$ były stabilne. Zastosowanie pakietu *Mathematica* pozwala znaleźć macierze spełniające powyższe warunki, na przykład otrzymujemy następujący typ macierzy:

$$D_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & \chi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zastosowanie pakietu *Mathematica* do określenia mocnej stabilności liniowych układów Hamiltona

W tym przypadku, dla mocnej stabilności polioperatora $\mathcal{A}$ konieczne i dostateczne jest, aby wszystkie macierze Hamiltona D_1, D_2, D_3, wystarczająco bliskie macierzom A_1, A_2, A_3 i spełniające równości $A_1D_1 - D_1A_1 + A_2D_2 - D_2A_2 + A_3D_3 - D_3A_3 = 0$, $D_1D_2 = D_2D_1$, $D_1D_3 = D_3D_1$, $D_2D_3 = D_3D_2$ były stabilne. Zastosowanie pakietu *Mathematica* pozwala znaleźć macierze spełniające powyższe warunki, na przykład otrzymujemy następujący typ macierzy:

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (b_4\lambda_4)/\chi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

Zastosowanie pakietu *Mathematica* do określenia mocnej stabilności liniowych układów Hamiltona

Odpowiednie formy Jordana mają postać

$$J_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\sqrt{\lambda_4}\xi_4)/\sqrt{\chi_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\sqrt{\lambda_4}\xi_4)/\sqrt{\chi_4} \end{pmatrix}$$

Zastosowanie pakietu *Mathematica* do określenia mocnej stabilności liniowych układów Hamiltona

Odpowiednie formy Jordana mają postać

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\lambda_4}\sqrt{\chi_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_4}\sqrt{\chi_4} \end{pmatrix}$$

Zastosowanie pakietu *Mathematica* do określenia mocnej stabilności liniowych układów Hamiltona

Odpowiednie formy Jordana mają postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(b_4\sqrt{\lambda_4})/\sqrt{\chi_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (b_4\sqrt{\lambda_4})/\sqrt{\chi_4} \end{pmatrix}$$

Zastosowanie pakietu *Mathematica* do określenia mocnej stabilności liniowych układów Hamiltona

Odpowiednie formy Jordana mają postać

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(b_4\sqrt{\lambda_4})/\sqrt{\chi_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (b_4\sqrt{\lambda_4})/\sqrt{\chi_4} \end{pmatrix}$$

Oczywiste jest, że ciąg $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$ jest niestabilny, ponieważ jego spektrum nie jest czysto urojone. Stąd wynika, na mocy twierdzenia 6, że polioperator $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ nie jest mocno stabilny.