

Równania Różniczkowe Zwyczajne
Wykłady na Wydziale MIM UW, w semestrze wiosennym
2000 r.

Feliks Przytycki
Współredakcja i skład: Radosław Adamczak

13 lipca 2001

Spis treści

1	Przykłady równań różniczkowych zwyczajnych.	3
2	Podstawowe definicje. Zagadnienie Cauchy'ego. Warunki na istnienie i jednoznaczność rozwiązań: Twierdzenie Peano i Twierdzenie Picarda-Lindelöfa.	9
3	Rozwiązania wysyczone. Ciągła zależność rozwiązań od warunków początkowych.	14
4	Gładka zależność rozwiązań od warunków początkowych, czasu i parametru.	22
5	Twierdzenia o prostowaniu. Potok dyfeomorfizmów generowany przez równanie różniczkowe. Rozmaitości różniczkowe. Równania na rozmaitościach. Obmotka	28
6	Całki pierwsze. Czynniki całkujące. Metody rozwiązywania równań różniczkowych (zestawienie).	36
7	Układy równań liniowych.	42
8	Wahadło z tarciem. Stany równowagi - klasyfikacja. Figury Lissajous	50
9	Układ fundamentalny. Wrońskian. Zachowywanie miary Lebesgue'a przez dyfeomorfizmy potoku pola z dywergencją 0 (Twierdzenie Liouville'a). Równanie Hamiltona. Informacja o Twierdzeniu Ergodycznym Birkhoffa.	57
10	Rozwiązanie w postaci szeregów potęgowych. Równanie Hermite'a. Zastosowanie w równaniu Schrödingera. Równanie Schrödingera. Równania jednorodnego rzędu 2 ze zmiennymi współczynnikami. Układy niejednorodnych równań liniowych	66
11	Stabilność asymptotyczna i Lapunowa. Twierdzenie Hadamarda-Perrona. Równania liniowe z okresowymi współczynnikami: rezonans parametryczny.	72
12	Nieliniowe równania różniczkowe. Informacja o teorii KAM. Ruch w polu sił centralnych. Informacja o bifurkacji Hopfa i atraktorze Lorenza.	82
A	Przykłady zadań i pytań egzaminacyjnych	89

Niektóre polecane podręczniki:

- [1] W. I. Arnold „Równania Różniczkowe Zwyczajne”, PWN, 1975.
- [2] W. I. Arnold „Metody Matematyczne Mechaniki Klasycznej”, PWN, 1981.
- [3] W. I. Arnold „Teoria Równań Różniczkowych”, PWN, 1983.
- [4] P. Hartman „Ordinary Differential Equations”, J. Wiley and Sons, New York 1964.
- [5] J. Ombach „Wykłady z Równań Różniczkowych”, Wyd. UJ Kraków, (Wyd II) 1999.
- [6] A. Palczewski „Równania Różniczkowe Zwyczajne”, Wyd. Nauk.-Tech. Warszawa 1999.
Wykłady kontynuowane były w r. ak. 2000/2001 jako Jakościowa Teoria Równań Różniczkowych Zwyczajnych i Układy Dynamiczne. Polecana literatura
- [7] J. Guckenheimer, P. Holmes „Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields”, Springer 1983.
- [8] A. Katok, B. Hasselblatt „Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems”, Cambridge University Press 1995.
- [9] C. Robinson „Dynamical Systems” Second Ed., CRC Press 1999.
- [10] P. Walters „An Introduction to Ergodic Theory”, Springer-Verlag 1982.

Wykład 1

Przykład 1

Znaleźć funkcję $y = y(x)$, taką, że

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) \quad (y' = ay).$$

Rozwiązanie: $y(x) = Ce^{ax}$, dla dowolnej liczby rzeczywistej C .

Jeśli zadamy warunek początkowy $y(x_0) = C_0$, to $C_0 = Ce^{ax_0}$, czyli $C = C_0e^{-ax_0}$.

Ogólniej, będziemy rozpatrywać równanie różniczkowe

$$y' = f(x, y) \quad x, y \in R, \quad (1.1)$$

tzn. poszukiwać funkcji różniczkowalnej $y: R \rightarrow R$, takiej aby równanie to było spełnione.

Uwagi:

Równanie ma następującą interpretację geometryczną: styczne do wykresu szukanej funkcji y w punkcie $(x, y(x))$ są nachylone do osi odciętych pod kątem o tangensie równym $f(x, y(x))$. Inaczej mówiąc, wektor styczny do wykresu, parametryzowany zmienną x : $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ (inne oznaczenie: (\dot{x}, \dot{y})) jest równy $(1, f(x, y(x)))$. Na ogół kropka oznacza pochodną po zmiennej t , nazywanej czasem. Jeśli $t = x$ to $(\dot{x}, \dot{y}) = (1, f(x, y))$, czyli równanie ma postać układu:

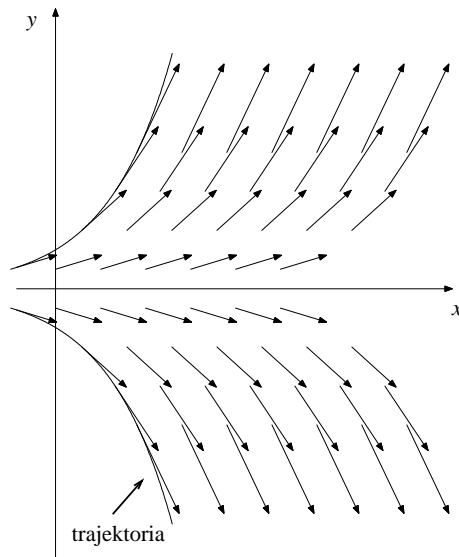
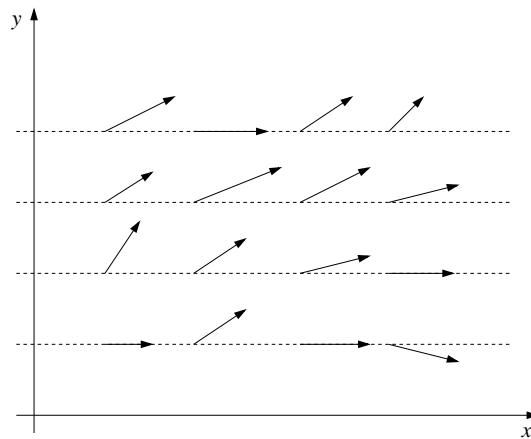
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = f(x, y). \end{cases}$$

Problem rozwiązania równania sprowadza się zatem do znalezienia krzywych $x(t), y(t)$, spełniających dany układ.

Jeśli $f(x, y) = f(y)$, tzn. f nie zależy od czasu x , to mówimy, że równanie jest *autonomiczne*, w przeciwnym razie, że jest *nieautonomiczne*.

Przykład 2 (Jak powstaje równanie różniczkowe)

Jeśli przez k oznaczymy roczne oprocentowanie, natomiast przez N_0 - kapitał początkowy, to, przy założeniu, że kapitalizacja następuje co rok, po T latach mamy kwotę $N_0(1+k)^T$. Przypuśćmy, że kapitalizacja następuje częściej, w odcinkach czasu $\frac{1}{n}$, z oprocentowaniem $\frac{k}{n}$. Wtedy po T latach mamy kwotę $N_0(1 + \frac{k}{n})^{nT}$. Gdy $n \rightarrow \infty$ mamy $N_T = N_0e^{kT}$, czyli więcej niż $N_0(1+k)^T$ (Zauważmy, że $1+k$ jest częścią liniową funkcji $k \mapsto e^k$ w punkcie 0).

Rysunek 1.1: Równanie autonomiczne $y' = ay$ Rysunek 1.2: Równanie nieautonomiczne, funkcja f zależy od czasu t

Do zagadnienia tego można podejść inaczej:

Po czasie $\Delta t (= \frac{1}{n})$ mamy przyrost kapitału

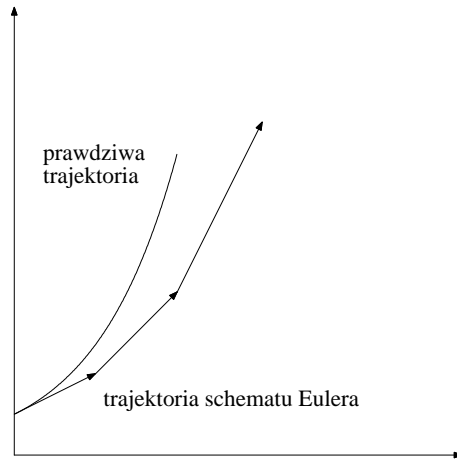
$$N_{t+\Delta t} - N_t = k\Delta t N_t.$$

W granicy, dla $\Delta t \rightarrow 0$ mamy

$$\frac{dN_t}{dt} = kN_t, \quad (1.2)$$

a to równanie różniczkowe ma rozwiązanie $N_t = N_0 e^{kt}$, jeśli w momencie $t = 0$ wartością rozwiązania jest N_0 .

Obie metody prowadzą do tego samego wyniku. Rozwiązanie równania (1.2) można zatem znaleźć rozpatrując kolejne przybliżenia, krok po kroku. Sposób ten nazywa się *otwartym schematem Eulera*.



Rysunek 1.3: Schemat Eulera

Przykład 3 (Rozmnażanie bakterii)

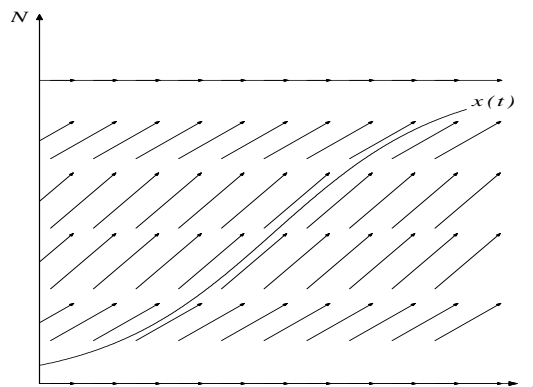
Po czasie T mamy $N_0(1+k)^T$ bakterii, jeśli po czasie 1 każda bakteria dzieli się na $k+1$. Jeśli jednak bakterie dzielą się nie wszystkie jednocześnie, po upływie całkowitej liczby jednostek czasu, ale każda w innym momencie, można przyjąć, że po czasie $\frac{1}{n}$ podzieli się ich $\frac{N_0}{n}$, zatem będzie ich $N_0 - \frac{N_0}{n} + \frac{N_0}{n}(1+k) = N_0 + \frac{N_0}{n}k = N_0(1 + \frac{k}{n})$. Stąd po czasie T liczba bakterii wynosić będzie $N_0(1 + \frac{k}{n})^{nT}$. Sytuacja jest więc analogiczna do poprzedniego przykładu. Zmianę liczby bakterii w czasie można opisać tym samym równaniem.

Przykład 4 (Efektywność reklamy)

Poniższe równanie opisuje rozchodzenie się informacji o produkcie.

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x), \quad (1.3)$$

gdzie $x = x(t)$ oznacza liczbę osób, które po upływie czasu t wiedzą o produkcie, natomiast N - liczebność populacji. Oczywiście $0 \leq x \leq N$. Z równania tego wynika w szczególności, że reklama rozchodzi się najszybciej, gdy połowa osób wie o produkcie. Jeśli o produkcie wie niewiele osób lub prawie wszyscy, liczba poinformowanych wzrasta wolno.



Rysunek 1.4: Rozchodzenie się wiedzy o produkcie

Równanie (1.3) możemy rozwiązać przez rozdzielanie zmiennych:

$$\int \frac{1}{x(N-x)} \frac{dx}{dt} dt = \int k dt + C.$$

Całkując lewą stronę przez podstawienie, otrzymujemy:

$$\int \frac{1}{x(N-x)} dx = \int k dt + C.$$

(Formalnie można było od razu napisać

$$\frac{dx}{x(N-x)} = k dt,$$

czyli

$$\int \frac{dx}{x(N-x)} = \int k dt + C.$$

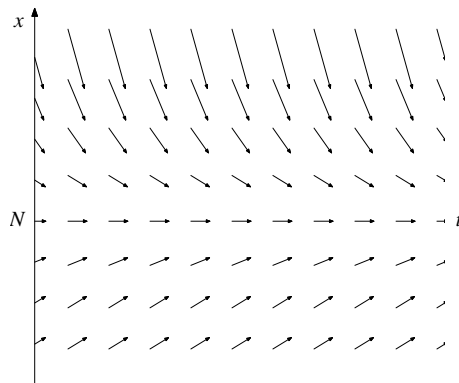
Całkowanie przez podstawienie jest uzasadnieniem poprawności tych napisów. Można także powołać się na język form różniczkowych).

Następnie, używając rozkładu $\frac{1}{x(N-x)}$ na ułamki proste, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left(\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{N-x} dx \right) &= kt + C, \\ \log|x| + \log|N-x| &= Nkt + C. \end{aligned}$$

C oznacza tutaj dowolną stałą, dlatego zamiast NC , piszemy C .

W ostatnim równaniu możemy $|x|$ zastąpić przez x , gdyż dla $0 \leq x \leq N$ mamy $\frac{dx}{dt} \geq 0$, zatem $x(t)$ jest funkcją monotoniczną rosnącą; jej wartość nie może spaść poniżej 0. Podobnie $|N-x|$ można zastąpić przez $N-x$ ($x \leq N$). Jeśli nawet w pewnym momencie t_0 : $x = N$, to dalej, dla $t \geq t_0$, $x(t) = N$, bo dla $x = N$: $\dot{x} = kx(N-x) = 0$. Dla $x > N$ równanie możemy uznać za nieokreślone, ze względu na interpretację fizyczną. Można je jednak dookreślić, np. tym samym wzorem (1.3). Wówczas $x(t) > N$, jeśli $x(0) \leq N$, nie jest możliwe, bo dla $x > N$, $\frac{dx}{dt} = kx(N-x) < 0$.



Rysunek 1.5: Rozwiązanie $x(t)$ nie może przejść przez prostą $x = N$.

Zatem

$$\frac{x(t)}{N-x(t)} = C \cdot e^{Nkt}.$$

Stąd

$$x(t) = N \frac{C e^{Nkt}}{1 + C e^{Nkt}}.$$

Stałą C można wyliczyć z równania $x(0) = N \frac{C}{1+C}$.

Przykład 5 (Mechanika)

Zachowanie N cząstek w przestrzeni R^3 opisują równania Newtona:

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}), \quad \text{tzn.} \quad (1.4)$$

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(t, x, \dot{x}). \quad (1.5)$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_N) \in R^{3N}$, $x_i \in R^3$ oznacza położenie i -tej cząstki, zaś m_i - jej masę. F jest siłą, zadaną np. przez energię potencjalną:

$$F(t, x, \dot{x}) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} U, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} U\right), \quad (1.6)$$

U oznacza potencjał, który może mieć różną postać w zależności od rozpatrywanej sytuacji, np.:

$$U = \sum_{i \neq j} -\frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|} \quad - \text{potencjał Newtona.}$$

Zbiór R^{3N} nazywamy *przestrzenią konfiguracyjną*, natomiast zbiór $\{(x, \dot{x})\}$ - *przestrzenią fazową*. Przez dołączenie współrzędnej czasu, otrzymujemy $\{(t, x)\}$ - *rozszerzoną przestrzeń konfiguracyjną* oraz $\{(t, x, \dot{x})\}$ - *rozszerzoną przestrzeń fazową*.

Przykład 6 (Pojedyncza cząstka w polu grawitacyjnym)

Zachowanie cząstki pod wpływem sił grawitacji opisane jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu:

$$m\ddot{x} = -mg. \quad (1.7)$$

Symbol g oznacza przyspieszenie ziemskie. Aby rozwiązać powyższe równanie, zastępujemy je układem dwu równań pierwszego rzędu, poprzez wprowadzenie nowej zmiennej v (oznaczającej prędkość cząstki):

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ m\dot{v} = -mg. \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} v &= -gt + C_1, \\ x &= -\frac{1}{2}t^2 g + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

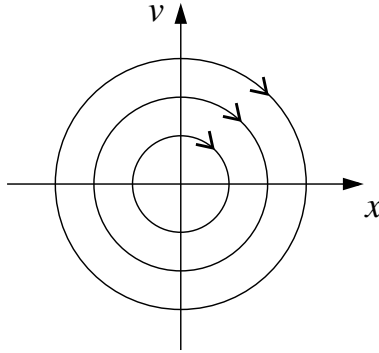
Stałe C_1, C_2 oznaczają odpowiednio prędkość i położenie cząstki w chwili $t = 0$.

Przykład 7 (Drgania - oscylator harmoniczny)

$$\ddot{x} = -x \quad (1.8)$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, wprowadzamy zmienną pomocniczą v i zapisujemy równanie w postaci układu

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x. \end{cases}$$



Rysunek 1.6: Oscylator harmoniczny

Rozważmy funkcję $E(x, v) = \frac{x^2}{2} + \frac{v^2}{2}$. Zauważmy, że otrzymany układ równań można zapisać w postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial E}{\partial v} \\ \dot{v} = -\frac{\partial E}{\partial x} \end{cases}$$

Tego typu układy nazywamy *układami Hamiltonowskimi*. Funkcja E jest stała na trajektoriach układu. Można się o tym przekonać różniczkując funkcję $E(x(t), v(t))$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial v} \cdot \dot{v} = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial E}{\partial x} = 0.$$

Funkcję E nazywamy *energiją*, składnik $\frac{x^2}{2}$ - *energiją potencjalną*, zaś $\frac{v^2}{2}$ - *energiją kinetyczną*.

Wykład 2

Definicja 2.1 *Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n :*

Równanie

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

gdzie $F: R^{1+d(n+1)} \rightarrow R^d$, oznacza równanie dla krzywej $x(t)$, w przestrzeni R^d . Rozwiązaniem (trajekcją, krzywą całkową) tego równania nazywamy każdą krzywą $x(t)$ taką, że

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0.$$

Uwaga

Równanie (2.1) można interpretować nieco inaczej, traktując $x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}$ jako zmienne niezależne. *Rozwiązaniem* nazywamy wówczas krzywą $(t, x(t), \dots, x^{(n)}(t))$ w $R^{1+d(n+1)}$, spełniającą (2.1), taką, że

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t), \dots, \frac{d^n x}{dt^n} = x^{(n)}(t).$$

Równanie typu (2.1) nazywamy równaniem *w postaci uwikłanej*, natomiast o równaniu

$$x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

mówimy, że ma *postać rozwikłaną*. Takie równanie można zastąpić równaniem autonomicznym (tzn. z prawą stroną niezależną od czasu t) rzędu 1, równoważnym układowi $n + 1$ równań:

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = x_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-2} = x_{n-1} \\ \dot{x}_{n-1} = f(t, x, x_1, \dots, x_{n-1}). \end{cases}$$

Twierdzenie 2.1 (Peano) *Oznaczmy $K = [t_0, t_0 + a] \times \{\|x - x_0\| \leq b\} \subset R^{m+1}$. Niech $F: K \rightarrow R^m$ będzie funkcją ciągłą, $\sup_{(t,x) \in K} \|F(t, x)\| = M$. Wtedy zagadnienie Cauchy'ego, znalezienia takiej funkcji $x(t)$, że*

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (2.3)$$

i spełniony jest warunek początkowy $x(t_0) = x_0$, ma rozwiązanie na odcinku $[t_0, t_0 + \alpha]$, $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ (na krańcach przedziału $[t_0, t_0 + \alpha]$, \dot{x} oznacza pochodną odpowiednio lewo-, prawostronną).

Lemat 2.1 *Zagadnienie Cauchy'ego (2.3) ma rozwiązanie $x(t)$ różniczkowalne na odcinku $[t_0, t_1)$ lub $[t_0, t_1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie całkowe:*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds \quad (2.4)$$

ma rozwiązanie ciągłe

Uwaga: Jeśli (2.4) ma rozwiązania ciągłe, to z ciągłości F rozwiązania te są automatycznie klasy C^1 , jako lewa strona równania (2.4).

Dowód lematu

Przypuśćmy, że funkcja $x(t)$ spełnia warunek (2.3). Całkując obie strony równania $\dot{x}(s) = F(s, x)$ w granicach od t_0 do t i korzystając z $x(t_0) = x_0$ otrzymujemy:

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds,$$

czyli

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s)) ds.$$

Aby udowodnić drugą implikację wystarczy zróżniczkować stronami równość (2.4).

□

Uwaga

Ma sens pytanie o istnienie rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego jeśli F nie jest ciągłe, wśród funkcji $x(t)$, bezwzględnie ciągłych, tzn. spełniających

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < \dots < t_n < t'_n \sum_{i=1}^n t'_i - t_i < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x(t'_i) - x(t_i)| < \varepsilon.$$

Dla takich funkcji \dot{x} istnieje bowiem prawie wszędzie oraz $\int_{t_0}^t \dot{x} = x(t) - x(t_0)$ (całka w sensie Lebesgue'a), można więc w szczególności przejść do równania (2.4).

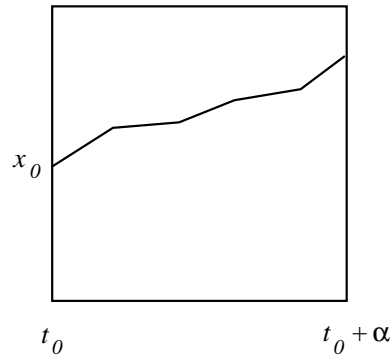
Dowód twierdzenia Peano

Dla dowolnej liczby naturalnej n definiujemy na przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$ funkcję $x_n(t)$, kolejno na odcinkach $[t_0 + \frac{k}{n}\alpha, t_0 + \frac{k+1}{n}\alpha]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, według wzoru:

$$\begin{aligned} x_n(t_0) &= x_0, \\ x_n(t) &= x_n(t_0 + \frac{k}{n}\alpha) + F(t_0 + \frac{k}{n}\alpha, x_n(t_0 + \frac{k}{n}\alpha)) \cdot (t - (t_0 + \frac{k}{n}\alpha)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

dla $t \in (t_0 + \frac{k}{n}\alpha, t_0 + \frac{k+1}{n}\alpha]$. Ta definicja ma sens jeśli $\|x_n(t_0 + \frac{k}{n}\alpha) - x_0\| \leq b$. Sprawdźmy tę własność poniżej:

Przypuśćmy, że istnieje liczba $t_1 : t_0 < t_1 < t_0 + \alpha$ taka, że $\|x_n(t_1) - x_0\| = b$ i dla $t_0 \leq t \leq t_1$ mamy $\|x_n(t) - x_0\| \leq b$; w szczególności definicja wzorem (2.5) ma sens dla $t \leq t_1$.



Rysunek 2.1: Tw. Peano. Rozwiązanie jest granicą łamanych Eulera.

Funkcje $x_n(t)$ są ciągłe w sensie Lipschitza ze stałą M tzn.

$$\forall_{t,t' \in [t_0, t_0 + \alpha]} \|x_n(t) - x_n(t')\| \leq M \cdot |t - t'|,$$

gdyż na odcinkach $[t_0 + \frac{k}{n}\alpha, t_0 + \frac{k+1}{n}\alpha]$ są afiniczne z pochodną $F(t_0 + \frac{k}{n}\alpha, x_n(t_0 + \frac{k}{n}\alpha))$, a $\|F\| \leq M$. Istnienie t_1 prowadzi więc do sprzeczności, ponieważ

$$b = \|x_n(t_1) - x_n(t_0)\| \leq M \cdot |t_1 - t_0| < M \cdot \frac{b}{M} = b.$$

Powyższą metodą możemy więc określić x_n dla $t \leq t_0 + a$ i $t \leq t_0 + \frac{b}{M}$. Krzywa $(t, x_n(t))$ będzie wówczas zawarta w K .

Jako Lipschitzowskie ze wspólną stałą M , funkcje x_n są *jednakowo ciągłe*, tzn.

$$\forall_\varepsilon \exists_\delta \forall_n \forall_{t,t'} |t - t'| < \delta \Rightarrow \|x_n(t) - x_n(t')\| < \varepsilon.$$

Zatem z twierdzenia *Arzeli-Ascoli* z ciągu x_n można wybrać podciąg jednostajnie zbieżny. Dla uproszczenia oznaczeń możemy przyjąć, że sam ciąg x_n zbiega jednostajnie do pewnej funkcji $x(t)$. Pokażemy że funkcja ta jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego. W tym celu, na podstawie lematu, wystarczy wykazać, że jest rozwiązaniem całkowitej postaci (2.4) problemu Cauchy'ego.

Oznaczmy $\Phi_n(t) = F(t_0 + \frac{k}{n}\alpha, x_n(t_0 + \frac{k}{n}\alpha))$, dla $t \in [t_0 + \frac{k}{n}\alpha, t_0 + \frac{k+1}{n}\alpha]$. Wówczas

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_n(s) ds.$$

Zachodzi także $\Phi_n(s) \rightrightarrows F(s, x(s))$, ponieważ $x_n(t_0 + \frac{k}{n}\alpha) \simeq x(t_0 + \frac{k}{n}\alpha)$, a funkcja F jest jednostajnie ciągła. Zatem

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \Phi_n(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s)) ds.$$

Powyższa równość kończy dowód twierdzenia Peano.

□

Uwagi:

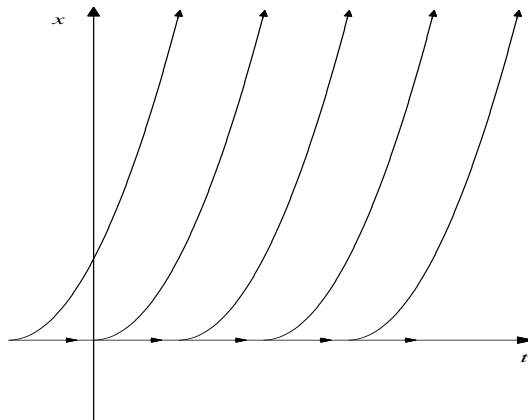
1. Szukanie rozwiązania równania różniczkowego powyższą metodą, przez definiowanie ciągu x_n nazywa się *otwartym schematem Eulera*. Metoda ta została już wspomniana w wykładzie 1.
2. Każdy zbieżny podciąg ciągu x_n daje w granicy rozwiązanie problemu Cauchy'ego. Udowodnienie jedności rozwiązania implikować więc będzie, że wszystkie zbieżne podciągi (a zatem także cały ciąg x_n) są zbieżne do $x(t)$.

Twierdzenie 2.2 (Picarda-Lindelöfa)

Jeśli, jak poprzednio, $F: K \rightarrow R^m$, gdzie $K = [t_0, t_0 + a] \times \{\|x - x_0\| \leq b\} \subset R^{m+1}$ oraz $\sup_K \|F\| \leq M$ i F jest ciągła oraz ciągła w sensie Lipschitza w kierunku x ze stałą L , tzn.:

$$\forall_{(t,x),(t,y) \in K} \|F(t,x) - F(t,y)\| \leq L \cdot \|x - y\|,$$

to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu Cauchy'ego na odcinku $[t_0, t_0 + \alpha']$, gdzie $\alpha' = \min(a, \frac{b}{M}, \frac{\tau}{L})$ dla dowolnie ustalonej liczby $0 < \tau < 1$.



Rysunek 2.2: Niejednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego.

Przykład (Rysunek 2)

Rozważmy następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{x} = x^\beta, \quad 0 < \beta < 1, \quad x \geq 0.$$

Stosując metodę rozdzielania zmiennych otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{x^\beta} = C + \int dt,$$

o ile $x \neq 0$, więc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta} &= C + t, \\ x(t) &= (1-\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} (t-C)^{\frac{1}{1-\beta}} \end{aligned}$$

dla $t > C$ (zamieniliśmy w oznaczeniach C na $-C$). Dla $t = C$ to rozwiązanie przedłuża się do $x(C) = 0$. Mamy wówczas prawostronną pochodną $\dot{x}(C) = 0$. Istnieje także inne rozwiązanie: $x(t) \equiv 0$. Zatem dla żadnego $t_0 \in R$ nie ma jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym, $x(t_0) = 0$.

Dowód twierdzenia Picarda-Lindelöfa

Zauważmy, że operator \mathcal{L} , zdefiniowany wzorem

$$\mathcal{L}(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(u(s)) ds$$

przeprowadza przestrzeń \mathcal{C} funkcji ciągłych z $[t_0, t_0 + \alpha']$, o wartościach w zbiorze $\{\|x - x_0\| \leq b\} \subset R^m$, takich, że $u(t_0) = x_0$ w siebie, gdyż

$$\|\mathcal{L}(u)(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \|F(s, u(s))\| ds \leq M \frac{b}{M} = b.$$

Ponadto \mathcal{L} jest kontrakcją. Załóżmy bowiem, że mamy dwie funkcje $u(t), v(t) \in \mathcal{C}$. Wtedy dla każdego $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha'$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(u)(t) - \mathcal{L}(v)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (F(u(s)) - F(v(s))) ds \right\| \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|u(s) - v(s)\| ds \\ &\leq \tau \cdot \sup_{t_0 \leq s \leq t_0 + \alpha'} \|u(s) - v(s)\|. \end{aligned}$$

Przestrzeń \mathcal{C} , na której działa \mathcal{L} , jest w metryce $\sup_s \|u(s) - v(s)\|$ zupełna. Zatem z twierdzenia Banacha o odwzorowaniu zwężającym istnieje dokładnie jeden punkt stały $u = \mathcal{L}(u)$. Funkcja u jest rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego.

□

Uwagi:

1. Istnienie rozwiązania udowodniliśmy już w Tw. Peano. W dowodzie Tw. Picarda-Lindelöfa nowością była jedyność rozwiązania, prawdziwa dzięki lipschitzowskości F .
2. Warunek $\alpha' \leq \frac{\tau}{L} < \frac{1}{L}$ jest tylko techniczny. Gdyby $s_0 < \alpha$ (α - stała z twierdzenia Peano) był ostatnim czasem, takim, że $\forall_{s \in [t_0, s_0]} u(s) = v(s)$, powyższe twierdzenie zastosowane dla $t_0 = s_0$, dałoby równość $u(s) = v(s)$, także w pewnym przedziale $[s_0, s_0 + \varepsilon]$, co przeczy definicji s_0 .

Wykład 3

Definicja 3.1 Załóżmy, że funkcja F jest określona na obszarze otwartym $G \subseteq R \times R^m$. Mówimy, że dla u, v - rozwiązań równania $\dot{x} = F(t, x)$, na odcinkach czasu (otwartych, otwarto-domkniętych lub domkniętych) v przedłuża u (piszemy $u \subset v$), jeżeli wykres u jest zawarty w wykresie v .

Jest to relacja częściowego porządku. Dla dowolnego liniowo uporządkowanego podzbioru rozwiązań istnieje rozwiązanie u , zawierające jego wszystkie elementy (jako u należy wziąć sumę teoriomnogościową danego podzbioru). Zatem, z lematu Kuratowskiego-Zorna, dla każdego rozwiązania u , istnieje rozwiązanie v , które już nie da się przedłużyć (maksymalne w sensie inkluzji). Takie rozwiązanie nazywa się *wysyconym*.

Możliwość rozszerzenia dowolnego rozwiązania u do rozwiązania wysyconego możemy udowodnić także w sposób czysto analityczny, poprzez przedłużanie u do rozwiązania takiego, że na jego dziedzinie (a, b) , dla $t \rightarrow a$ lub $t \rightarrow b$ zachodzi $u(t) \rightarrow \partial G$. Takie rozwiązanie musi być wysycone, gdyż w przeciwnym wypadku jego dalsze rozszerzenie przechodziłoby przez ∂G , czyli nie byłoby zawarte w G (gdyż z założenia G jest zbiorem otwartym).

Uwaga

Ponieważ G jest zbiorem otwartym, dziedziną rozwiązania wysyconego u może być tylko przedział otwarty (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Gdyby dziedziną u był np. odcinek $(a, b]$, to $u(b) \in G$ i u można by przedłużyć na $[b, b + \epsilon)$ z Tw. Peano (to rozumowanie zawarte jest też w dowodzie poniższego Tw. 3.1).

Twierdzenie 3.1 Jeśli u jest rozwiązaniem wysyconym na dziedzinie (a, b) , to dla $t \rightarrow a$, $t \rightarrow b$ mamy $u(t) \rightarrow \partial G$ lub $t \rightarrow \pm\infty$ lub $u \rightarrow \infty$.

Dowód twierdzenia 3.1

Przypuśćmy, że u jest rozwiązaniem wysyconym. Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n zdefiniujmy:

$$E_n = \{(t, x) \in G : \rho_e((t, x), \partial G) \geq \frac{1}{n} \text{ i } \|(t, x)\| \leq n\},$$

o ile ∂G jest niepusty (ρ_e oznacza odległość euklidesową w $R \times R^m$). W przeciwnym przypadku niech:

$$E_n = \{(t, x) : \|(t, x)\| \leq n\}.$$

Oznaczmy $\sup_{(t,x) \in E_n} \|F(t, x)\|$ symbolem M_n .

$$\forall_n \exists_{\tau_n} \forall_{(t,u(t)) \in E_n} \forall_{\tau} t \leq \tau \leq t + \tau_n \Rightarrow (\tau, u(\tau)) \in E_{n+1}.$$

Za τ_n można wziąć np. $\frac{(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})}{M_{n+1}}$.

Bez straty ogólności możemy rozpatrywać jedynie $t \rightarrow b$ oraz przyjąć, że $b \neq \infty$ (jeżeli $b = \infty$, to teza twierdzenia jest prawdziwa). Przypuśćmy, że dla $t \rightarrow b$ teza nie zachodzi. Zatem istnieje ciąg rosnący $t_n \nearrow b$ oraz k , takie, że dla każdego n , $(t_n, u(t_n)) \in E_k$. Dla dostatecznie dużych N ($n > n_0$) mamy $t_n - t_{n-1} < \tau_n$, więc $u(t) \in E_{k+1}$ dla $t \geq t_{n_0}$. Stąd wynika, że $u(t)$ jest ciągła w sensie Lipschitza ze stałą M_{k+1} , zatem przedłuża się do b w sposób ciągły. Ponieważ $\dot{u} = F(t, u(t))$ oraz F jest ciągła w $u(b) \in E_{k+1} \subset G$, więc \dot{u} też jest lewostronnie ciągła w b . Zatem (Analiza I) u ma pochodną lewostronną w b , równą $\lim_{t \rightarrow b} \dot{u}(t)$. Z twierdzenia Peano istnieje rozwiązanie v na $[b, b + \varepsilon]$ z warunkiem początkowym $v(b) = u(b)$. Zatem $u \cup v$ przedłuża u , co jest niemożliwe, gdyż u jest z założenia rozwiązaniem wysyconym. □

Uwaga

Z powyższego dowodu wynika następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 3.1 *Jeśli $u(t)$ jest rozwiązaniem równania $\dot{u}(t) = F(t, u(t))$ na (a, b) oraz istnieje granica $\lim_{t \nearrow b} F(t, u(t)) = \tilde{F}$, to $u(t)$ przedłuża się ciągle do $t = b$ i pochodna lewostronna $\dot{u}(b) = \tilde{F}$.*

Następująca konstrukcja, wspomniana już przy dowodzie istnienia rozwiązań wysyconych, pozwala przedłużyć dowolne rozwiązanie do pewnego rozwiązania wysyconego i pokazuje, że dla tego rozwiązania teza twierdzenia (3.1) zachodzi: Przypuśćmy, że u , określone na (a, b) nie jest wysycone, powiedzmy, z prawej strony. Zatem możemy je przedłużyć przynajmniej do $(a, b]$. (Nie musimy korzystać z Stw. 3.1, tzn. z rozumowania dającego przedłużalność do $(a, b]$, bo tę przedłużalność założyliśmy.) Zbiór $\{(t, u(t)) : b - \varepsilon \leq t \leq b\}$, jako zbiór zwarty, jest zawarty w E_k , dla pewnego k . Dopóki krzywa jest zawarta w E_k , przedłużamy krokami τ_k na $[b, b + \tau_k]$, $[b, b + 2\tau_k]$, ... Po opuszczeniu E_k , znajdując się w E_{k+1} , przedłużamy krokami τ_{k+1} , itd. W ten sposób możemy przedłużyć rozwiązanie na pewien przedział (a, b') . Jeśli $b' \neq \infty$, to z konstrukcji istnieje ciąg $t_{n_k} \nearrow b'$, taki, że $(t_{n_k}, u(t_{n_k})) \in E_k \setminus E_{k-1}$. Ponieważ $b < \infty$, mamy $t_{n_k} - t_{n_{k-1}} \rightarrow 0$, więc dla każdego ustalonego k_0 , krzywa $(t, u(t))$ dla $t_{n_k} \leq t \leq t_{n_{k+1}}$ dla dużych k , nie przecina E_{k_0} . Zatem, dla $t \rightarrow b'$ mamy $(t, u(t)) \rightarrow \partial G$ lub $(t, u(t)) \rightarrow \infty$.

Uwaga

Okazało się, że łatwiej udowodnić przedłużalność niewysyconego rozwiązania do wysyconego, spełniającego tezę Tw. 3.1, niż dowodzić tę tezę dla dowolnego, z góry danego rozwiązania wysyconego; nie potrzeba wtedy Stw. 3.1.

Przykład

$$\dot{x} = x^2$$

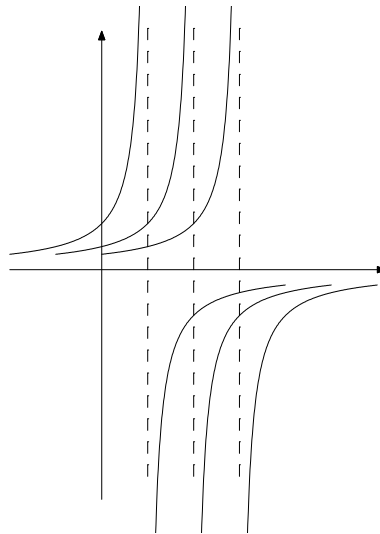
Jednym z rozwiązań jest $x \equiv 0$. Policzmy inne. Mamy:

$$\frac{dx}{x^2} = dt \text{ więc } -\frac{1}{x} = t - C.$$

Zatem

$$x(t) = \frac{1}{C - t}.$$

Dla $t \nearrow C$ mamy $x(t) \nearrow \infty$, dla $t \searrow C$ mamy $x(t) \searrow -\infty$. Chociaż F określone jest na całym $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, rozwiązania są wysyczone na półprostych $(-\infty, C)$, (C, ∞) dla $C \in \mathbb{R}$. Dla $t \nearrow C$ mamy ucieczkę do ∞ w „skończonym czasie”.



Rysunek 3.1: $\dot{x} = x^2$ - dziedzinami rozwiązań wysyczonych są półproste.

Lemat 3.1 (Gronwall - wariant całkowy liniowy) Niech $K > 0$, $C \geq 0$, $t_0 < t_1$. Jeśli funkcja ciągła rzeczywista, nieujemna $v: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia nierówność:

$$v(t) \leq C + \int_{t_0}^t K \cdot v(s) ds \quad (3.1)$$

dla wszystkich $t \in [t_0, t_1]$, to, także dla wszystkich $t \in [t_0, t_1]$ spełnia nierówność:

$$v(t) \leq C e^{K(t-t_0)}. \quad (3.2)$$

Dowód lematu Gronwalla

Założmy najpierw, że $C > 0$. Oznaczmy $U(t) = C + \int_{t_0}^t K \cdot v(s) ds$. Ponieważ $K, v \geq 0$, mamy $U(t) > 0$. Zachodzi także $U'(t) = K \cdot v(t)$. Założenie (3.1) mówi, że $v(t) \leq U(t)$. Zatem $(\log U(t))' = \frac{U'(t)}{U(t)} \leq K$, co oznacza, że:

$$\log U(t) - \log U(t_0) = \int_{t_0}^t (\log U(s))' ds \leq K(t - t_0).$$

Stąd

$$v(t) \leq U(t) \leq U(t_0)e^{K(t-t_0)}.$$

Jeśli $C = 0$, to możemy je zastąpić dowolnym $C_1 > 0$. Wtedy

$$v(t) < C_1 + \int_{t_0}^t K \cdot v(s) ds,$$

zatem na mocy już udowodnionej części lematu $v(t) \leq C_1 e^{K(t-t_0)}$. Z dowolności C_1 otrzymujemy $v(t) \leq C e^{K(t-t_0)} = 0$.

□

Uwaga

Dla $K < 0$ lemat jest fałszywy. Dla przykładu rozpatrzmy funkcję stałą $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $v(t) = \frac{1}{2}$. Funkcja ta spełnia założenia lematu Gronwalla dla $C = 1$, $K = -1$, gdyż

$$v(t) = \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}t = 1 - \int_0^t v(s) ds,$$

dla $t \in [0, 1]$. Jednak dla $t = 1$ mamy

$$v(t) = \frac{1}{2} > e^{-1}.$$

Jeśli (3.1) zastąpimy analogiczną *nierównością różniczkową*, to lemat Gronwalla prawdziwy będzie w ogólniejszej wersji:

Lemat 3.2 (Gronwall - wariant różniczkowy) *Załóżmy, że $F: G \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, określoną na zbiorze $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a $v: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ - funkcją różniczkowalną, spełniającą nierówność:*

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &\leq F(t, v(t)) \text{ dla wszystkich } t \in [t_0, t_1] \text{ oraz} \\ v(t_0) &\leq x_0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem problemu Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t, x(t)) \quad \text{dla } t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Wówczas, jeśli zachodzi jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego (lokalna, tzn. dla każdych x, t istnieje zbiór K , jak w twierdzeniu Picarda-Lindelöfa, na którym zachodzi jednoznaczność dla warunku początkowego $x(t) = x$, np. gdy F jest lipschitzowska względem x), to:

$$v(t) \leq x(t)$$

dla każdego $t \in [t_0, t_1]$.

Dowód

Dla uproszczenia założymy, że v jest klasy C^1 (dowód tylko przy założeniu różniczkowalności jest nieznacznie trudniejszy). Podobnie jak w dowodzie twierdzenia Peano definiujemy funkcje $x_n(t)$, jednak zamiast ustalonego a priori ciągu $\tau_i = t_0 + \frac{i}{n}$, definiujemy τ_i indukcyjnie. Mając dane τ_i , bierzemy $\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta_n$, o ile

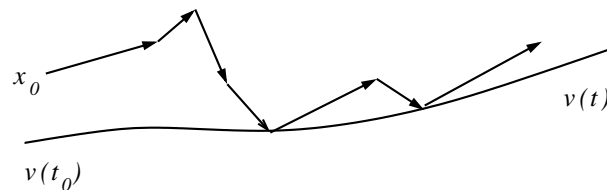
$$x_n(\tau_i) + (F(\tau_i, x_n(\tau_i)) + \varepsilon_n)(t - \tau_i) \geq v(t) \quad (3.4)$$

dla każdego $t: \tau_i \leq t \leq \tau_i + \Delta_n$, gdzie ciąg ε_n jest dowolnie ustalony, tak, żeby $\varepsilon_n \searrow 0$, np. $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Jeśli nierówność (3.4) nie zachodzi, to τ_{i+1} definiujemy jako najmniejsze t , dla którego w (3.4) jest równość. Jeśli stałe Δ_n są dostatecznie małe (w szczególności $\Delta_n \searrow 0$; zależą od ε_n), to ta druga sytuacja zachodzi nie częściej niż dla co drugiego j . Zatem w skończonej liczbie kroków dojdziemy do t_1 , końca przedziału. Z konstrukcji mamy $x_n(t) \geq v(t)$ oraz $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$, więc $x(t) \geq v(t)$.

□

Uwaga

Bez założenia jednoznaczności otrzymujemy powyżej, podobnie jak w dowodzie Tw. Peano, istnienie rozwiązania $x(t) \geq v(t)$, jako jednostajnej granicy podciągu $x_n(t)$.



Rysunek 3.2: Ilustracja dowodu różniczkowej wersji lematu Gronwalla

Uwaga

Wersja całkowa lematu Gronwalla wynika łatwo z wersji różniczkowej, przy czym funkcja liniowa $x \mapsto K \cdot x$ w wersji całkowej może być zastąpiona dowolną ciągłą funkcją $F(t, x)$, rosnącą ze względu na x .

Dowód

Oznaczmy, jak w dowodzie Lematu 3.1 $U(t) = C + \int_{t_0}^t F(v(s))ds$. Po zrózniczkowaniu otrzymujemy $\dot{U}(t) = F(v(t))$. Stąd, korzystając z założenia $v(t) \leq U(t)$ i monotoniczności F , otrzymujemy $\dot{U}(t) \leq F(U(t))$ więc z Lematu 3.2 $U(t) \leq x(t)$, a stąd $v(t) \leq x(t)$, gdzie $x(t)$ oznacza rozwiązanie problemu Cauchy'ego jak w Lemacie 3.2 dla $C \leq x(t_0)$.

□

Twierdzenie 3.2 (Ciągła zależność rozwiązań problemu Cauchy'ego od warunku początkowego) Jeśli F jest określona na $G \subseteq R \times R^m$ i Lipschitzowska ze względu na $x \in R^m$, natomiast $\phi(x_0, t) = u(t)$ jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego dla $u(t_0) = x_0$, na $[t_0, t_1]$, a $\phi(y^n, t) = v_n(t)$ są rozwiązaniami problemu Cauchy'ego dla $y^n \rightarrow x_0$, wysyconymi na (t'_n, t''_n) , to $\liminf t''_n > t_1$ oraz $v_n(t) \rightarrow u(t)$ dla $t_0 \leq r \leq t_1$.

Dowód twierdzenia 3.2

Założmy, że v_n jest określona na $[t_0, t_1]$. Mamy:

$$\|v_n(t) - u(t)\| \leq \|v_n(t_0) - u(t_0)\| + \int_{t_0}^t L \|v_n(s) - u(s)\| ds,$$

gdzie L to stała Lipschitza funkcji F w kierunku x .

Funkcja $v(t) = \|v_n(t) - u(t)\|$ spełnia założenia Lematu Gronwalla, wariantu całkowego liniowego:

$$v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^t L \cdot v(s) ds.$$

Zatem

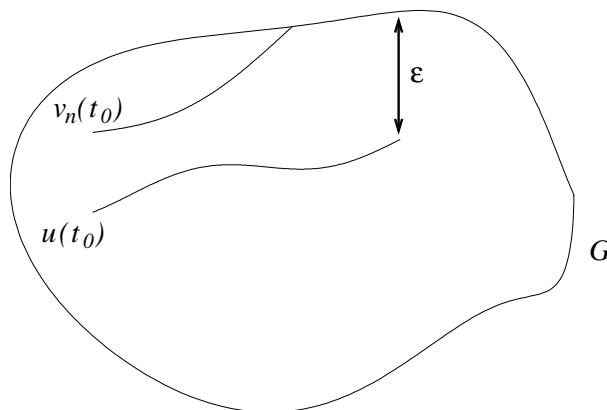
$$\|v_n(t) - u(t)\| \leq e^{L(t-t_0)} \|v_n(t_0) - u(t_0)\|$$

więc $\|v_n(t_0) - u(t_0)\| \rightarrow 0$ implikuje $\forall_t \|v_n(t) - u(t)\| \rightarrow 0$. Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że dla $v_n(t_0)$ dostatecznie bliskich $u(t_0)$, v_n istnieje na przedziale $[t_0, t_1]$. Oznaczmy $\varepsilon = \text{dist}((t, u(t)), \partial G)$. (Można przyjąć, że $\partial G \neq \emptyset$; w przeciwnym razie istnienie v_n na $[t_0, t_1]$ wynika bezpośrednio z Tw. Picarda-Lindelöfa.) Przypuśćmy, że rozwiązanie $v_n(t)$ nie przedłuża się na $[t_0, t_1]$. Wtedy istnieje $t_2 \in [t_0, t_1]$, takie, że $\text{dist}((t_2, v_n(t_2)), \partial G) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, (wynika to z Tw. 3.1; nie może być $u \nearrow \infty$ z lipschitzowskością F). Zatem $\|v_n(t_2) - u(t_2)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Możemy założyć, że dla $t : t_0 \leq t \leq t_2$, $\|v_n(t) - u(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, możemy więc skorzystać z wykazanej w pierwszej części dowodu nierówności

$$\|v_n(t_2) - u(t_2)\| \leq e^{L(t_2-t_0)} \|v_n(t_0) - u(t_0)\|.$$

Prawa strona dla dużych n , czyli $\|v_n(t_0) - u(t_0)\|$ małych jest mniejsza niż $\frac{\varepsilon}{2}$, co daje sprzeczność.

□



Rysunek 3.3: Ilustracja dowodu twierdzenia 3.2

Inny dowód twierdzenia 3.2

Przypomnijmy sobie dowód twierdzenia Picarda-Lindelöfa, gdzie rozwiązanie równania różniczkowego znajdowane było jako punkt stały operatora \mathcal{L} , działającego na przestrzeni funkcji ciągłych $u: [t_0, t_1] \rightarrow R^m$, $u(t_0) = u_0$.

Użyjemy teraz podobnego operatora, dla każdego warunku początkowego y , bliskiego x_0 . Załóżmy, że $F: K \rightarrow R^m$, $K = [t_0, t_1] \times \{\|x - x_0\| \leq b\}$, $|t - t_0| \leq \frac{b}{2M}$, gdzie $M = \sup_K \|F\|$ i $|t_1 - t_0| \leq \tau L^{-1}$, $\tau < 1$ oraz $\|y - x_0\| \leq \frac{1}{2}b$. Zdefiniujmy na przestrzeni $\tilde{\mathcal{C}}$ funkcji ciągłych $h(t)$, przeprowadzających $[t_0, t_1]$ w R^m , $h(t_0) = 0$, z metryką $\rho(h_1, h_2) = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} |h_1(t) - h_2(t)|$, przekształcenia:

$$\mathcal{L}^y(h)(t) = \int_{t_0}^t F(s, y + h(s)) ds.$$

Podobnie jak w twierdzeniu Picarda-Lindelöfa można pokazać, że \mathcal{L}^y są kontrakcjami ze stałą $\tau < 1$. Mamy więc parametryzowaną przez y rodzinę przekształceń zwięzających przestrzeni zupełnej metrycznej $\tilde{\mathcal{C}}$. Rozwiązania $\phi(y, t)$ z warunkiem początkowym y to $h_y(t) + y$, gdzie funkcja h_y to punkt stały dla \mathcal{L}^y . Ciągła zależność $h_y(t) + y = \phi(y, t)$ od y wynika z ciągłej zależności punktu stałego od przekształcenia zwięzającego, opisaną przez następujący lemat:

Lemat 3.3 *Niech $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ będą przekształceniami zwięzającymi ze stałą $\lambda < 1$ przestrzeni metrycznej zupełnej (X, ρ) . Załóżmy, że:*

$$\forall x \in X \rho(\mathcal{L}_1(x), \mathcal{L}_2(x)) \leq a.$$

Wówczas, dla punktów $p_1, p_2 \in X$, stałych odpowiednio dla $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ mamy:

$$\rho(p_1, p_2) \leq \frac{a}{1 - \lambda}.$$

Dowód lematu 3.3

$$\rho(p_1, p_2) \leq \rho(\mathcal{L}_1(p_1), \mathcal{L}_1(p_2)) + \rho(\mathcal{L}_1(p_2), \mathcal{L}_2(p_2)) \leq \lambda \rho(p_1, p_2) + a,$$

więc

$$\rho(p_1, p_2) \leq \frac{a}{1 - \lambda}.$$

□

Przekształcenia \mathcal{L}^y spełniają:

$$\forall_t \|\mathcal{L}^{y_1}(h)(t) - \mathcal{L}^{y_2}(h)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t F(s, y_1 + h(s)) - F(s, y_2 + h(s)) ds \right\| \leq (t - t_0) \cdot L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

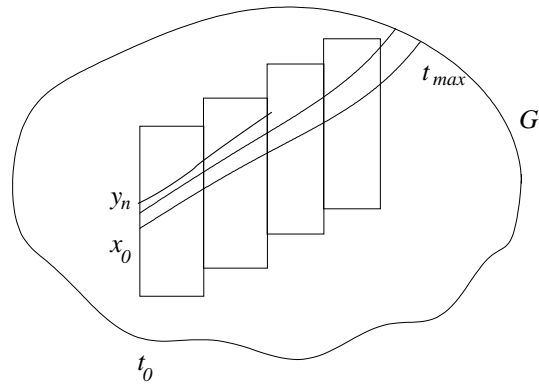
Zatem na mocy lematu (3.3) odległość punktów stałych szacuje się przez

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|\phi(y, t) - \phi(x, t)\| \leq \frac{(t_1 - t_0) \cdot L \|y - x\|}{1 - \tau},$$

więc

$$y \rightarrow x \Rightarrow \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} \|\phi(y, t) - \phi(x, t)\| \rightarrow 0.$$

□



Rysunek 3.4: Ciągła zależność rozwiązań od warunku początkowego.

Uwaga

Wprawdzie udowodniliśmy ciągłość tylko dla $t_0 \leq t \leq t_1$, jednak można to dalej kontynuować, krokami, aż do dowolnego $t < t_{max}$, gdzie $\phi(x, t)$, $t_0 \leq t < t_{max}$ jest rozwiązaniem wysyconym z prawej strony (rys. 3.4). Udowodniliśmy nawet lipschitzowską ciągłą zależność $\phi(y, t)$ od y .

Wykład 4

Zajmiemy się teraz *gładką zależnością* rozwiązań $\phi(x, t)$ od x , przy założeniu, że funkcja F jest gładka. Żeby wiadomo było do czego dążymy, policzmy najpierw $\frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x, t)$, $j = 1, \dots, m$, zakładając, że te pochodne cząstkowe istnieją.

Równania:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} \phi_k(x, t) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_k(t, \phi(x, t))$$

dla $i, k = 1, \dots, m$ dają:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_k(x, t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial z_j} F_k(t, \phi(x, t)) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x, t), \quad (4.1)$$

gdzie t, z oznaczają zmienne w $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

W postaci macierzowej to równanie wygląda następująco:

$$\frac{\partial}{\partial t} D_x \phi(x, t) = D_z F(t, \phi(x, t)) \circ D_x \phi(x, t), \quad (4.2)$$

Zatem funkcja $t \mapsto D_x \phi(x, t)$ o wartościach w zbiorze macierzy $m \times m$, spełnia równanie różniczkowe, nazywane *równaniem w wariacjach*:

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t) = D_z F(t, \phi(x, t)) A(t). \quad (4.3)$$

Jest to nieautonomiczne liniowe równanie różniczkowe, na przestrzeni liniowej macierzy $m \times m$, dla trajektorii $\phi(x, t)$.

Równanie (4.3) można też interpretować (po podziałaniu obiema stronami na dowolny wektor $v \in \mathbb{R}^m$ i spostrzeżeniu, że $(\frac{\partial}{\partial t} A(t))v = \frac{\partial}{\partial t} (A(t)v)$ jako równanie liniowe w \mathbb{R}^m :

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t) = D_z F(t, \phi(x, t)) v(t),$$

$v(t)$ to obraz wektora v pod działaniem $A(t) = D_x \phi(x, t)$ - różniczki przekształcenia ϕ , określonego na otoczeniu punktu $x \in \mathbb{R}^m$ i wartościach w \mathbb{R}^m .

Twierdzenie 4.1 (O C^1 zależności) *Jeśli F jest ciągła, różniczkowalna w kierunku z i pochodne cząstkowe są ciągłe ze względu na zespół zmiennych $(t, z) \in G$, to $\phi(x, t)$ jest klasy C^1 ze względu na zespół zmiennych (x, t) .*

Dowód

Rozważamy układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = F(t, z(t)) \\ \frac{\partial A}{\partial t} = D_z F(t, z(t))A(t). \end{cases} \quad (4.4)$$

Ponieważ $D_z F$ istnieje i jest ciągła, F jest lipschitzowskie w kierunku z na zwartych podzbiórach G (ćwiczenie). Gdybyśmy założyli, że $D_z F$ jest lipschitzowskie w kierunku z , to mielibyśmy z twierdzenia Picarda-Lindelöfa istnienie i jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego z równaniami (4.4) i na mocy poprzedniego twierdzenia, ciągłą zależność rozwiązań od warunków początkowych $\phi(t_0)$, $A(t_0)$. Nie wiemy jednak ciągle czy istnieje $D_x \phi(x, t)$ oraz czy dla warunku początkowego $A(t_0) = I$, rzeczywiście $A(t) = D_x \phi(x, t)$ (oczywiście trzeba przyjąć warunek początkowy $A(t_0) = I$, bo $D_x \phi(x, t)$ w $t = t_0$ to macierz I , gdyż $\phi(x, t_0)$ jako funkcja zmiennej x to identyczność).

Należy więc udowodnić dwie rzeczy (bez założenia lipschitzowskości $D_z F$):

1. Istnienie i ciągłą zależność rozwiązań $\phi(x, t)$, $A(x, t)$ problemu Cauchy'ego (4.4) od warunku początkowego x (warunek początkowy dla $A(x, t)$ jest ustalony $A(x, t_0) = I$).
2. Istnienie $D_x \phi(x, t)$ i równość $A(x, t) = D_x \phi(x, t)$.

Ad. 1.

Okazuje się, że wystarczy jedynie lipschitzowska ciągłość przekształcenia

$$(z, H) \mapsto D_z F(t, z) \circ H$$

w kierunku H . Lipschitzowska ciągłość w kierunku z nie jest potrzebna.

Drugie równanie układu (4.4) jest liniowe. Mamy więc na zbiorze macierzy: $\mathcal{H} = \{H : \|H\| \leq 2\}$, oznaczwszy $F_2 = F_2(t, z) = D_z F(t, z)$:

$$\|F_2 \circ H_1 - F_2 \circ H_2\| \leq \|F_2\| \cdot \|H_1 - H_2\|$$

oraz

$$\sup_{H \in \mathcal{H}} \|F_2 \circ H\| \leq 2 \cdot \|F_2\|.$$

Możemy założyć, że:

$$t_1 - t_0 \leq \frac{1}{2 \sup_{t,z} \|F_2\|}$$

oraz

$$t_1 - t_0 \leq \tau \cdot (\sup_{t,z} \|F_2\|)^{-1}$$

dla $\tau < 1$. Stąd wynika, że dla każdej funkcji $z(t)$ takiej, że $(t, z(t))$ należy do dziedziny F dla $t_0 \leq t \leq t_1$, spełnione są założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa dla drugiego z równań (4.4). Istnieje więc, dokładnie jedno, rozwiązanie $A(t)$, $A(t_0) = I$, oczywiście zależne od $z(t)$.

Oznaczmy przez $\tilde{\mathcal{C}}'$ przestrzeń funkcji ciągłych na $[t_0, t_1]$ o wartościach w \mathcal{H} i wartości I w punkcie t_0 . Zatem dla x_0 i dla y blisko x_0 mamy na przestrzeni $\tilde{\mathcal{C}}'$ operatory:

$$\mathcal{L}_{\phi(x_0, t)}^{\mathcal{H}}(H)(t) := I + \int_{t_0}^t D_z F(s, \phi(x_0, s)) \circ H(s) ds$$

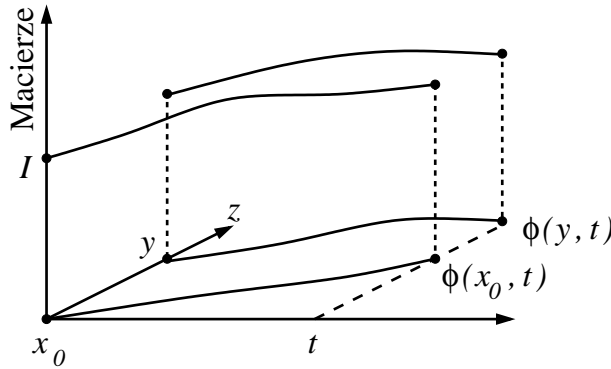
oraz

$$\mathcal{L}_{\phi(y,t)}^{\mathcal{H}}(H)(t) := I + \int_{t_0}^t D_z F(s, \phi(y, s)) \circ H(s) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

bliskie sobie. Faktycznie:

$$\|\mathcal{L}_{\phi(x_0,t)}^{\mathcal{H}}(H)(t) - \mathcal{L}_{\phi(y,t)}^{\mathcal{H}}(H)(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|D_z F(s, \phi(x_0, s)) - D_z F(s, \phi(y, s))\| \cdot \|H(s)\| ds,$$

a to jest małe, bo z ciągłej zależności ϕ od warunku początkowego $\phi(x_0, s)$ jest blisko $\phi(y, s)$, zaś $D_z F$ jest ciągła w kierunku z z założenia. Zatem punkty stałe tych kontrakcji też są bliskie, tzn. $A(y, t)$ jest bliskie $A(x_0, t)$.



Rysunek 4.1: Trajektoriom równania odpowiadają trajektorie równania w wariacjach.

Ad. 2.

Zamiast operatorów $\mathcal{L}^x(h)(t) = \int_{t_0}^t F(s, x + h(s)) ds$, będziemy używać operatorów:

$$\tilde{\mathcal{L}}^x(h)(t) = x + \int_{t_0}^t F(s, h(s)) ds \quad (4.5)$$

na przestrzeni $\tilde{\mathcal{C}}_x$ funkcji ciągłych z $[t_0, t_1]$ w R^m , $h(t_0) = x$. (W drugim dowodzie twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań $\phi(x, t)$ od x , Wykład 3, użyliśmy operatorów \mathcal{L}^x tylko po to, żeby działały wszystkie na tej samej przestrzeni $\tilde{\mathcal{C}}$, gdzie było $h(t_0) = 0$).

Mamy dla $\phi_1(x, t) \equiv x$ i $H_1(x, t) \equiv I$:

$$D_x \phi_1(x, t) = H_1(x, t)$$

dla wszystkich x bliskich x_0 .

Założmy, że są już zdefiniowane $\phi_n(x, t)$ i $H_n(x, t)$, takie że:

$$D_x \phi_n(x, t) = H_n(x, t).$$

Niech

$$\phi_{n+1}(x, t) := x + \int_{t_0}^t F(s, \phi_n(x, s)) ds$$

oraz

$$H_{n+1}(x, t) := I + \int_{t_0}^t F_2(s, \phi_n(x, s)) \circ H_n(s) ds$$

dla $t_0 \leq t \leq t_1$. Wtedy:

$$\begin{aligned} D_x \phi_{n+1}(x, t) &= I + \int_{t_0}^t D_z F(s, \phi_n(x, s)) \circ D_x \phi_n(x, s) ds \\ &= I + \int_{t_0}^t F_2(s, \phi_n(x, s)) \circ H_n(x, s) ds \\ &= H_{n+1}(x, t). \end{aligned}$$

Jeśli pokażemy, że $\forall t H_n(x, t)$ jest jednostajnie zbieżnym ciągiem funkcji zmiennej x , to z faktu: $\phi_n(x, t) \rightrightarrows \phi(x, t)$ wyniknie, że $\phi(x, t)$ jest funkcją klasy C^1 od x , a jej różniczka jest granicą różniczek $D_x \phi_n(x, t) = H_n(x, t)$.

Pokażemy, że faktycznie $H_n(x, t) \rightrightarrows A(x, t)$, poprzednio opisanych funkcji stałych względem operatorów $\mathcal{L}_{\phi(x,t)}^H$. Dotychczas, aby móc różniczkować po x , pracowaliśmy ze wszystkimi x równocześnie. Teraz możemy już pracować z każdym x oddzielnie.

Lemat 4.1 Niech (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) będą metrycznymi przestrzeniami zupełnymi o ograniczonych średnicach. Niech $\Phi: X \times Y \rightarrow X \times Y$ będzie przekształceniem ciągłym, postaci

$$\Phi(x, y) = (f(x), g(x, y)),$$

gdzie f jest kontrakcją na X :

$$\rho_X(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \rho_X(x_1, x_2), \quad \lambda < 1,$$

natomiast g - kontrakcją na włóknach $\{x\} \times Y$:

$$\rho_Y(g(x, y_1), g(x, y_2)) \leq \lambda \rho_Y(y_1, y_2).$$

Wtedy istnieje dokładnie jeden punkt stały $(x_0, y_0) \in X \times Y$ dla przekształcenia Φ . Ponadto dla każdego $(x, y) \in X \times Y$, ciąg kolejnych obrazów przy Φ , tzn. $\Phi^n(x, y)$, zbiega do (x_0, y_0) (szybkość zbieżności zależy jedynie od λ oraz klasy jednakowej ciągłości funkcji, do której należy g).

Ćwiczenie: Znaleźć przykład Φ , spełniającego założenia lematu i nie będącego kontrakcją.

Dowód lematu 4.1

Wiemy już z twierdzenia Banacha o punkcie stałym dla kontrakcji, że istnieje punkt stały $x_0 \in X$ dla przekształcenia f oraz punkt stały $y_0 \in \{x_0\} \times Y$ dla $g|_{\{x_0\} \times Y}$ (Φ przeprowadza z definicji włókno $\{x\} \times Y$, we włókno $\{f(x)\} \times Y$, czyli na ogół włókno w inne włókno. Wyjątkiem jest włókno nad punktem stałym x_0 , które Φ przeprowadza w siebie).

Założmy, że jeśli

$$\rho_X(x, x_0) \leq \varepsilon,$$

to

$$\sup_{y \in Y} \rho_Y(g(x, y), g(x_0, y)) \leq \theta(\varepsilon), \quad \text{gdzie } \theta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ przy } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Niech $x_1 = x$, $y_1 = y$ oraz $x_{n+1} = f(x_n)$, $y_{n+1} = g(x_n, y_n)$, tzn. (x_n, y_n) jest trajektorią $\Phi^n(x, y)$ przy działaniu Φ . Mamy

$$\rho_X(x_n, x_0) \leq \lambda^n \cdot \text{diam} X$$

oraz

$$\rho_Y(y_{n+1}, y_0) \leq \rho_Y(g(x_n, y_n), g(x_n, y_0)) + \rho_Y(g(x_n, y_0), g(x, y_0)) \leq \lambda \rho_Y(y_n, y_0) + \theta(\rho_X(x_n, x_0)).$$

Jeśli oznaczymy $\theta(\lambda^n \text{diam} X)$ przez a_n , to mamy $a_n \rightarrow 0$ i problem sprowadza się do udowodnienia, że jeśli dla ciągu $k_n \geq 0$ zachodzi $k_{n+1} \leq \lambda k_n + a_n$, $\lambda < 1$ i $a_n \searrow 0$, to $k_n \rightarrow 0$ (ćwiczenie).

Uwaga:

Ponieważ $k_1 = \rho_Y(y, y_0) \leq \text{diam} Y$, szybkość zbieżności nie zależy od (x, y) .

Możemy teraz dokończyć dowód twierdzenia (4.1). Wystarczy w lemacie podstawić:

$$X = \tilde{\mathcal{C}}_x, \quad Y = \tilde{\mathcal{C}}'$$

oraz

$$\begin{aligned} f(h)(t) &= \tilde{\mathcal{L}}^x(h)(t), \\ g(h, H)(t) &= \mathcal{L}_h^H(H)(t). \end{aligned}$$

Sprawdźmy jeszcze ciągłość g . Przy dowolnym x blisko x_0 mamy:

$$\|\mathcal{L}_{h_1}^H(H)(t) - \mathcal{L}_{h_2}^H(H)(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|F_2(s, h_1(s) - h_2(s))\| \cdot \|H(s)\| ds,$$

a to jest małe jeśli h_1 jest blisko h_2 , niezależnie od x i związanych z nim przestrzeni i operatorów. Zauważmy w końcu, że jedynym punktem stałym, o którym mowa w lemacie, jest dla każdego x , znaleziony wcześniej $(\phi(x, t), A(x, t))$, zależący w sposób ciągły od x .

Udowodniliśmy już, że $D_x(\phi(x, t))$ istnieje i jest funkcją ciągłą x . Ciągłość ze względu na zespół zmiennych (x, t) wynika z jednakowej ciągłości (przy parametrze x) ze względu na t , wynikającej z przedstawienia:

$$D_x(\phi(x, t)) = I + \int_{t_0}^t D_z F(s, \phi(x, s)) \circ D_x \phi(x, s) ds \quad (4.6)$$

i wspólnej ograniczoności macierzy pod całką. Wreszcie ciągłość $\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t)$ wynika z ciągłości F oraz ϕ .

□

Twierdzenie 4.2 (O C^r zależności rozwiązań od warunku początkowego) *Jeśli F jest ciągle ze względu na zespół zmiennych $(t, z) \in G$ oraz istnieją pochodne cząstkowe rzędu $r \geq 1$ w kierunkach z , ciągle ze względu na zespół zmiennych (t, z) , to dla każdego t , $\phi(x, t)$ jest klasy C^r ze względu na x . Więcej, pochodne cząstkowe rzędu r w kierunkach x ($\frac{\partial^r \phi(x, t)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_m^{r_m}}$, $r_1 + \dots + r_m = r$) są ciągle ze względu na zespół zmiennych (x, t) .*

Dowód

Należy wypisać r kolejnych równań w wariacjach. Przez indukcję ($k = 1, \dots, r$) widzimy, że punkty stałe zależą od x w sposób ciągły. Faktycznie do $k = r - 1$ mamy nawet lipschitzowskość, więc punkty stałe znajdujemy z twierdzenia Banacha. Dla $k = r$ używamy lematu (4.1). Punkty stałe są zbudowane z pochodnych cząstkowych rzędu k ($k \leq r$) $A^{(k)}(x, t)$.

Twierdzenie 4.3 (O C^r zależności rozwiązań od warunku początkowego i czasu)

Jeśli istnieją pochodne cząstkowe $F(t, z)$ w kierunku z , do rzędu $r \geq 1$ oraz pochodne cząstkowe w kierunkach t, z , gdzie przynajmniej jeden raz różniczkuje $\frac{\partial}{\partial t}$, do rzędu $r - 1$ oraz te pochodne są ciągle ze względu na (t, z) , to $\phi(x, t)$ jest klasy C^r ze względu na zespół zmiennych (x, t) .

Dowód

Indukcja ze względu na r . Różniczkowanie po t , jeden raz, po k -krotnym różniczkowaniu w kierunku x, z wzoru analogicznego do (4.6), da $D_z^{(k)}F(s, \phi(x, s))$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$. Jeśli założymy, że $\phi \in C^{r-1}$, to złożenie jest klasy $C^{r-(k+1)}$, zatem istnieją, i są ciągle względem x, t , pochodne cząstkowe rzędu $k + 1 + (r - (k + 1)) = r$.

□

Twierdzenie 4.4 (O C^r zależności rozwiązań od warunku początkowego i parametru)

Załóżmy, że równanie różniczkowe zależy od parametru w , tzn.

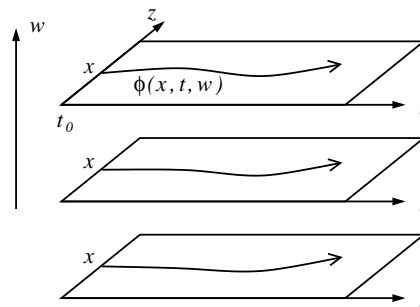
$$\dot{x} = F(t, x, w),$$

gdzie F jest ciągle o ciągłych ze względu na (t, z, w) pochodnych cząstkowych w kierunkach z, w , rzędu $r \geq 0$. Jeśli $r = 0$, to zakładamy też lipschitzowskość F w kierunku z . Wtedy rozwiązania $\phi(x, t, w)$ zależą C^r od warunku początkowego x , czasu t i parametru w (tzn. pochodne rzędu r po x, t są ciągłymi funkcjami x, t, w)

Dowód

Należy dopisać równanie $\dot{w} = 0$ i powołać się na poprzednie twierdzenia, zastępując tam zmienną z przez (z, w) .

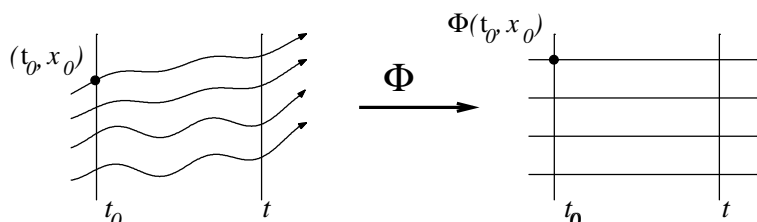
□



Rysunek 4.2: Parametr możemy traktować jako dodatkową zmienną.

Wykład 5

Twierdzenie 5.1 (Lokalne twierdzenie o prostowaniu, wersja nieautonomiczna) *Jeśli $F: G \rightarrow R^m$, $G \subseteq R \times R^m$ jest funkcją ciągłą i ma ciągłe pochodne w kierunku R^m , to dla dowolnego $(t_0, x_0) \in G$ istnieje C^1 -difeomorfizm Φ otoczenia (t_0, x_0) na otoczenie (t_0, x_0) , zachowujący t , taki, że $\Phi(t_0, x_0) = (t_0, x_0)$ oraz trajektorie $(t, \phi(x, t))$ przechodzą przy Φ na „poziome” proste $\phi(x, t) \equiv x$. Równanie różniczkowe $\dot{z} = F(t, z)$ w nowych współrzędnych ma postać $\dot{z} = 0$.*



Rysunek 5.1: Trajektorie przechodzą na „poziome” proste.

Dowód

Definiujemy:

$$\Psi(t, x) = (t, \phi(x, t)).$$

Mamy macierz różniczki w (t_0, x_0)

$$D\Psi(t_0, x_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \frac{\partial \phi}{\partial t} & & I & \end{array} \right),$$

przy czym

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} (t_0, x_0),$$

natomiast

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(t_0, x_0)} = I,$$

gdyż $\phi(x, t_0)$, traktowane jako funkcja x , to identyczność.

Zatem $D\Psi(t_0, x_0)$ jest odwracalne, czyli Ψ oraz $\Phi = \Psi^{-1}$ są C^1 -dyfeomorfizmami otoczenia (t_0, x_0) na otoczenie (t_0, x_0) . Ponadto dla każdego x , Φ przeprowadza krzywą całkową $(t, \phi(x, t))$ na prostą (t, x) . Skorzystaliśmy z C^1 -zależności ϕ od (x, t) .

□

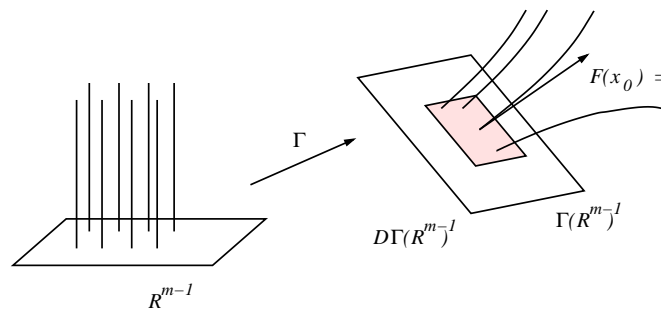
Twierdzenie 5.2 (Lokalne twierdzenie o prostowaniu, wersja autonomiczna)

Jeśli $F: U \rightarrow R^m$ jest klasy C^1 na U - otoczeniu $x_0 \in R^m$ oraz $F(x_0) \neq 0$, to na pewnym otoczeniu $V \subset U$ punktu x_0 istnieją współrzędne $\Phi: V \rightarrow R^m$, takie, że trajektorie $\phi(x, t)$ równania różniczkowego $\dot{z} = F(z)$ przechodzą przy Φ na równoległe proste, np. $x_1, \dots, x_{m-1} = \text{const}$ we współrzędnych x_1, \dots, x_m . Inaczej mówiąc w nowych współrzędnych równanie ma postać $\dot{z} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{m-1 \text{ razy}}, 1)$.

Dowód

Niech $\Gamma: R^{m-1} \rightarrow R^m$ parametryzuje hiperpłaszczyznę w R^m , przechodzącą przez x_0 , prostopadłą do wektora $F(x_0)$ oraz niech $\Gamma(0) = x_0$. Zdefiniujmy na otoczeniu punktu $(0, t_0)$ przekształcenie Ψ , wzorem

$$\Psi(x, t) = \phi(\Gamma(x), t).$$



Rysunek 5.2: Prostowanie

Mamy:

$$D\Psi(0, t_0) = (D_z \phi \circ D\Gamma, \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_0, t_0)) = (D\Gamma, \dot{\phi}),$$

ponieważ $D_z \phi = I$ dla $t = t_0$ (mamy bowiem $\phi(z, t_0) = z$). $D\Gamma$ jest $(m-1) \times m$ macierzą ($m-1$ kolumn, m wierszy) rzędu $m-1$, natomiast wektor $\dot{\phi}$ jest z założenia prostopadły do jej kolumn, rozpinających hiperpłaszczyznę $\Gamma(R^{m-1})$. Zatem rząd macierzy $(D\Gamma, \dot{\phi})$ jest równy m , czyli $D\Psi(0, t_0)$ jest odwracalne, zaś $\Phi = \Psi^{-1}$ jest C^1 -dyfeomorfizmem otoczenia x_0 na otoczenie $(\underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, t_0)$. Ponadto Ψ przeprowadza „pionowe” linie

$$\{x_1, \dots, x_{m-1} = \text{const}\} \subset R^m = R^{m-1} \times R$$

w trajektorie $\Psi(x_1, \dots, x_{m-1}, t) = \phi(\Gamma(x_1, \dots, x_{m-1}), t)$, czyli przekształcenie odwrotne Φ przeprowadza trajektorie w „pionowe” linie.

□

Zajmiemy się teraz bliżej trajektoriami autonomicznych równań różniczkowych.

Lemat 5.1 *Jeśli $F(t, z) = F(z)$ nie zależy od t , to dla trajektorii równania różniczkowego $\dot{z} = F(z)$ o warunkach początkowym x_0 oraz czasach początkowych $t_0, t_0 + s_0$, mamy równość:*

$$\phi(x_0, t_0, t) = \phi(x_0, t_0 + s_0, t + s_0).$$

Dowód

W sytuacji ogólnej, niekoniecznie autonomicznej, mamy:

$$\dot{\phi}(x_0, t_0, t) = F(t, \phi(x_0, t_0, t))$$

oraz

$$\dot{\phi}(x_0, t_0 + s_0, t + s_0) = F(t + s_0, \phi(x_0, t_0 + s_0, t + s_0)).$$

Jeśli F nie zależy od czasu, to obie krzywe spełniają to samo równanie różniczkowe i mają ten sam warunek początkowy x_0 dla $t = t_0$, więc są równe (formalnie druga krzywa jest zadana równaniem:

$$\dot{\phi}(x_0, t_0 + s_0, s) = F(t + s_0, \phi(x_0, t_0 + s_0, s)),$$

ale zrobiliśmy podstawienie $s = t + s_0$, żeby obie krzywe były parametryzowane tym samym odcinkiem, od t_0 , dzięki czemu można je porównać; skorzystaliśmy jeszcze z tego, że pochodna tego podstawienia jest równa 1).

(W ogólności, jeśli F zależy od czasu, chociaż obie krzywe mają tę samą wartość x_0 w punkcie t_0 , dwa równania różniczkowe podane na początku dowodu, które te krzywe spełniają, mogą być różne. Zatem krzywe też mogą być różne).

□

Wniosek

Dla autonomicznego równania różniczkowego $\phi(x_0, t_0, t)$ zależy tylko od x_0 i $t - t_0$. Powyższy fakt jest motywacją dla wprowadzenia następującego oznaczenia:

$$\phi^t(x) := \phi(x, 0, t) = \phi(x, s_0, t + s_0)$$

dla dowolnego s_0 , dla autonomicznego równania różniczkowego.

Twierdzenie 5.3

$$\phi^{s_1+s_2}(x) = \phi^{s_2} \circ \phi^{s_1}(x)$$

Mamy więc homomorfizm grupy addytywnej R , w grupę dyfeomorfizmów ze składaniem.

Dowód

Korzystając z powyższego lematu mamy dla dowolnych t_0, t_1, t_2 oraz $s_1 = t_1 - t_0, s_2 = t_2 - t_1$

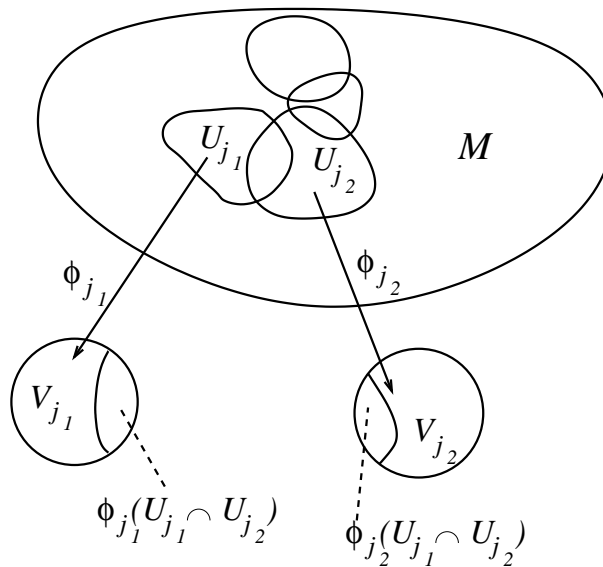
$$\phi^{s_1+s_2}(x) = \phi(x, t_0, t_2) = \phi(\phi(x, t_0, t_1), t_1, t_2) = \phi^{s_2}(\phi^{s_1}(x)) = \phi^{s_2} \circ \phi^{s_1}(x).$$

□

Uwaga

W powyższym twierdzeniu trzeba założyć przedłużanie rozwiązań dla $t \in (-\infty, \infty)$. W przeciwnym razie mamy homomorfizm „lokalny” (tam gdzie nasze obiekty są zdefiniowane).

Definicja 5.1 *Przestrzeń topologiczną \mathbf{M} nazywamy C^1 -rozmaitością (inna nazwa: rozmaitość różniczkowa), jeśli można ją przedstawić w postaci sumy $\mathbf{M} = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} U_j$, podzbiorów otwartych U_j , takich, że istnieją homeomorfizmy $\phi_j: U_j \rightarrow V_j \subseteq \mathbb{R}^m$ dla pewnej liczby naturalnej m , oraz dla dowolnych j_1, j_2 funkcja $\phi_{j_2} \circ \phi_{j_1}^{-1}$ jest funkcją klasy C^1 z $\phi_{j_1}(V_{j_1} \cap V_{j_2})$ na $\phi_{j_2}(V_{j_1} \cap V_{j_2})$. (Zbiór indeksów \mathcal{J} może być nieprzeliczalny.)*



Rysunek 5.3: Atlas i mapy.

Uwagi:

1. Można założyć, że wszystkie V_j to kule jednostkowe w \mathbb{R}^m .
2. Można założyć, że \mathbf{M} to tylko zbiór, a topologię wprowadzić poprzez bazę otoczeń dowolnego punktu: $B(x) = \phi_j^{-1}(A(\phi_j(x)))$, gdzie A to otoczenia $\phi_j(x)$ w V_j (trzeba jednak założyć, że $\phi_{j_1}(U_{j_1} \cap U_{j_2})$ jest otwarte w V_{j_1}).
3. ϕ_j są homeomorfizmami oraz $\phi_{j_2} \circ \phi_{j_1}^{-1}$ są klasy C^1 , zatem $\phi_{j_2} \circ \phi_{j_1}^{-1}$ są dyfeomorfizmami.
4. ϕ_j nazywamy mapami, a rodzinę $\{\phi_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ atlasem.
5. W powyższej sytuacji mówimy, że na \mathbf{M} mamy C^1 -strukturę. W analogiczny sposób możemy na \mathbf{M} przenosić inne struktury, o ile $\phi_{j_2} \circ \phi_{j_1}^{-1}$ mają określoną własność, np. są: afiniczne, holomorficzne (przy $m = 2$), klasy C^r , ciągłe. Mówimy wówczas, że odpowiednią strukturę mamy na \mathbf{M} . Mówimy też odpowiednio, że \mathbf{M} jest rozmaitością afiniczną, holomorficzną, C^r , topologiczną. O strukturze decydują własności $\phi_{j_2} \circ \phi_{j_1}^{-1}$, „przejścia z mapy do mapy”.

6. Na ogół zakłada się, że atlas jest lokalnie skończony. To pozwala na różne konstrukcje, np. rozbitcie jedności: $1 = \sum_{j \in J} \vartheta_j$, gdzie ϑ_j to nieujemne funkcje rzeczywiste oraz $\vartheta_j|_{\mathbf{M} \setminus U_j} \equiv 0$.
7. Rozważa się czasem rozmaitości \mathbf{M} nieośrodkowe, zbiór indeksów \mathcal{J} , (czyli liczba map ϕ_j w atlasie), musi być wtedy nieprzeliczalny.

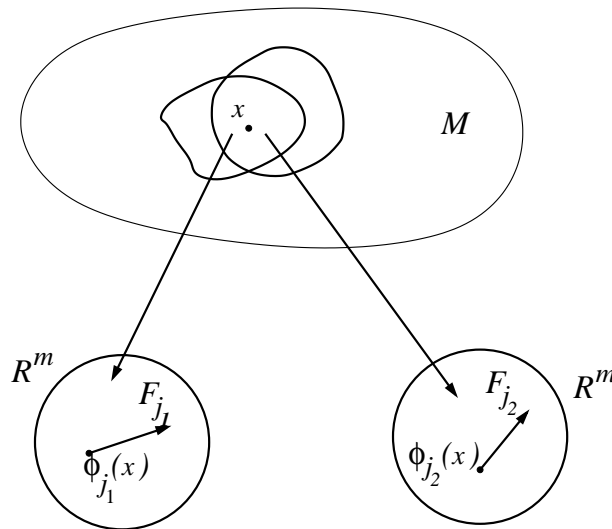
Dla dalszych definicji motywacją jest następujące spostrzeżenie: Jeśli mamy równanie różniczkowe $\dot{x} = F(t, x)$ gdzie $x, F \in \mathbb{R}^m$, to we współrzędnych $y = \phi(x)$ równanie to przybiera postać

$$\dot{\phi} = D\phi(x)\dot{x} = D\phi(F(t, x)),$$

czyli $\dot{y} = D\phi(F(t, \phi^{-1}(y)))$.

Definicja 5.2 Dla rozmaitości różniczkowej \mathbf{M} oraz dowolnego $x \in \mathbf{M}$, definiujemy przestrzeń wektorów stycznych do \mathbf{M} w x , $T_x\mathbf{M}$ (przestrzeń styczna). Przestrzeń tą możemy zdefiniować np. biorąc rozłączną sumę przestrzeni stycznych $\bigcup_{j: x \in U_j} T_{\phi_j(x)}V_j = \bigcup_{j: x \in U_j} \mathbb{R}^m$ i utożsamiając $F_{j_1} \in T_{\phi_{j_1}(x)}V_{j_1}$ oraz $F_{j_2} \in T_{\phi_{j_2}(x)}V_{j_2}$ jeśli

$$D(\phi_{j_1} \circ \phi_{j_2}^{-1})F_{j_2} = F_{j_1}.$$



Rysunek 5.4: Przestrzeń styczna to zbiór klas równoważności wektorów.

Uwagi:

1. Wektor styczny w x do \mathbf{M} możemy zdefiniować także jako klasę równoważności krzywych różniczkowalnych w 0, $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{M}$, $\gamma(0) = x$. (Mówimy, że γ jest różniczkowalna w 0, jeśli $\phi_j \circ \gamma$ ma pochodną w 0. Dzięki różniczkowalności $\phi_{j_1} \circ \phi_{j_2}^{-1}$ definicja ta nie zależy od j .) Przyjmujemy, że $\gamma_1 \sim \gamma_2$ (γ_1 równoważne γ_2), gdy w punkcie 0 zachodzi

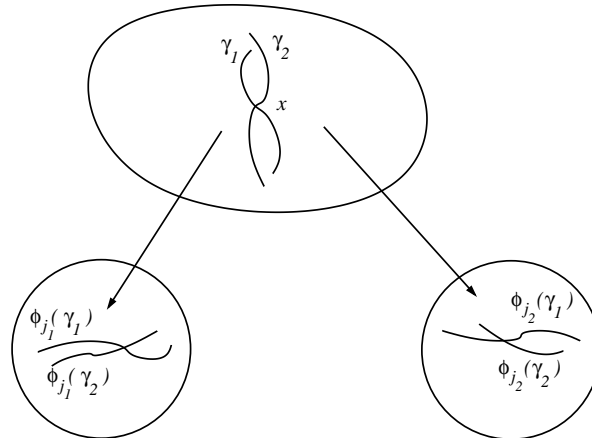
$$\frac{d(\phi_j \circ \gamma_1)}{dt} = \frac{d(\phi_j \circ \gamma_2)}{dt}$$

(ε może być dowolne, zależne od krzywej). Definicja tej relacji jest poprawna (nie zależy od j), gdyż:

$$\frac{d(\phi_{j_1} \circ \gamma_s)}{dt} = D(\phi_{j_1} \circ \phi_{j_2}^{-1})\left(\frac{d(\phi_{j_2} \circ \gamma_s)}{dt}\right)$$

dla $s = 1, 2$.

2. $T_x\mathbf{M}$ ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej, przeniesioną z R^m . Ta struktura nie zależy od j , bo utożsamienie $D(\phi_{j_1} \circ \phi_{j_2}^{-1})$ jest liniowe.



Rysunek 5.5: Przestrzeń styczną można też uzyskać jako zbiór klas równoważności relacji \sim .

Definicja 5.3 *Polem wektorowym na \mathbf{M} nazywamy funkcję $F: \mathbf{M} \rightarrow \bigcup_{x \in \mathbf{M}} T_x \mathbf{M}$, taką, że $F(x) \in T_x \mathbf{M}$. Sumę $\bigcup_{x \in \mathbf{M}} T_x \mathbf{M}$ nazywamy wiązką styczną i oznaczamy przez $T\mathbf{M}$.*

Pole F nazywamy ciągłym, C^1 , C^r , itp., jeśli rozmaitość ma odpowiednią strukturę (topologiczną, C^1 , C^r) oraz F_j , reprezentant F w mapie ϕ_j , jest funkcją ciągłą, C^1 , C^r , ... dla każdej mapy ϕ_j .

Mówimy, że krzywa $\gamma: (t_0, t_1) \rightarrow \mathbf{M}$ spełnia **równanie różniczkowe**

$$\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t)),$$

jeśli

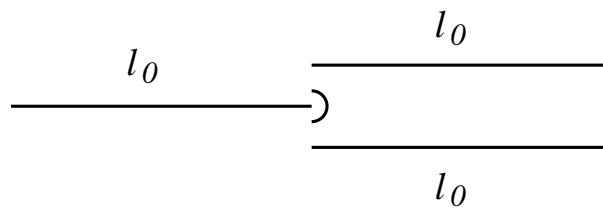
$$\frac{d\phi_j \circ \gamma}{dt}(t) = F_j(\phi_j \circ \gamma(t)).$$

Ta definicja, na mocy wcześniejszych rachunków, nie zależy od j .

W języku drugiej definicji wektora stycznego, $\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$ oznacza, że dla każdego t_0 krzywa zmiennej $s \approx 0: \gamma(t_0 + s)$ należy do klasy równoważności krzywych F w punkcie $\gamma(t_0)$.

Dalsze uwagi:

1. Na ogół zakłada się, że \mathbf{M} , jako przestrzeń topologiczna, ma własność Hausdorffa (oddzielania punktów), tzn. dla dowolnych $x, y \in \mathbf{M}$, $x \neq y$ istnieją zbiory otwarte rozłączne U_x, U_y , zawierające odpowiednio x i y . Bez tej własności równania różniczkowe mogą mieć egzotyczne własności. Dla przykładu rozpatrzmy rozmaitość \mathbf{M} , składającą się z otwartej półprostej $l_0: (-\infty, 0)$ oraz dwóch półprostych $[0, \infty): l_1$ i l_2 . Zbiory otwarte zdefiniujemy jako zbiory otwarte w standardowej topologii w prostych $l_0 \cup l_1$, $l_0 \cup l_2$ oraz ich sumy. Wtedy punktów p_1 i p_2 , początków prostych l_1 i l_2 nie da się oddzielić parą rozłącznych zbiorów otwartych. Równanie różniczkowe $\dot{x} = 1$ ma jednoznaczne rozwiązanie w otoczeniu każdego $x \in \mathbf{M}$, ale nie ma jednoznaczności rozwiązań (globalnie). Rozwiązanie z warunkiem początkowym w l_0 może bowiem wejść zarówno w l_1 , jak i l_2 .



Rysunek 5.6: Niejednoznaczność rozwiązań przy braku warunku Hausdorffa.

2. Jeśli \mathbf{M} jest rozmaitością zwartą to każde równanie różniczkowe $\dot{z} = F(z)$, (F - pole ciągłe) jest *zupelne*, tzn. dziedziną wszystkich rozwiązań wysyconych jest $(-\infty, \infty)$, istnieje więc (globalny) potok dyfeomorfizmów (jeśli F jest C^1).

Dowód

Dla każdego $x_0 \in \mathbf{M}$ istnieje W_{x_0} - otoczenie x_0 oraz $t_{x_0} > 0$ takie, że dla każdego $x \in W_{x_0}$ istnieje rozwiązanie $z(t)$ równania różniczkowego $\dot{z} = F(z)$, z warunkiem początkowym $z(0) = x$, określone dla $t \in (-t_{x_0}, t_{x_0})$. Wynika to z twierdzenia Peano; wystarczy wziąć mapę $\phi_j: U_j \rightarrow V_j$, $j = j(x_0)$, taką, że $x_0 \in U_j$, oraz wybrać parę zbiorów otwartych W_{x_0}, W'_{x_0} takich, że $x_0 \subset W_{x_0} \subset clW_{x_0} \subset W'_{x_0} \subset clW'_{x_0} \subset U_j$.

Można wreszcie zdefiniować $b = dist(\phi_j(W_{x_0}), R^m \setminus \phi_j(W'_{x_0}))$. Twierdzenie Peano zastosowane do równania $\dot{z} = F_j(z)$ we współrzędnych ϕ_j da rozwiązania dla

$$|t| \leq t_{x_0} = t_{x_0} = \frac{b}{\sup_{\phi_j(W'_{x_0})} \|F_j\|}$$

(Zmniejszając V_j możemy założyć, że F_j jest na nim funkcją ograniczoną.)

Dzięki zwartości \mathbf{M} można wybrać skończone pokrycie \mathcal{W} zbioru \mathbf{M} zbiorami W_{x_0} i wziąć

$$\alpha = \min\{t_{x_0} : W_{x_0} \in \mathcal{W}\}.$$

Wtedy rozwiązania można przedłużać krokami co najmniej α do dziedziny $(-\infty, \infty)$.

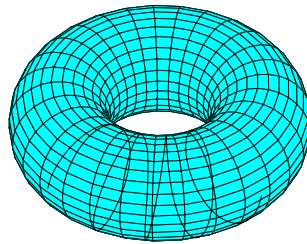
□

Przykład:

$\mathbf{M} = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ - dwuwymiarowy torus. \mathbb{R}^2 jest grupą addytywną, dzielimy ją przez podgrupę \mathbb{Z}^2 . Przekształcenie faktoryzacji $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ oznaczmy przez P . Jako zbiory U_j możemy wziąć np. $P(V_j)$, gdzie V_j o koła w \mathbb{R}^2 o promieniu $\frac{1}{2}$. Wtedy można wziąć $\phi_j = P^{-1}|_{U_j}$ (dowolnie wybrane gałęzie).

Rozpatrzmy na \mathbb{R}^2 stałe pole wektorowe $\tilde{F}(x) = (1, a)$. Pole to przenosi się przez ϕ_j^{-1} , czyli przez P , na pole F na torusie \mathbb{T}^2 .

Jeśli a jest niewymierne, to wszystkie trajektorie F są gęste w \mathbb{T}^2 . Jeśli $a = \frac{p}{q}$ (p, q - względnie pierwsze liczby naturalne), to wszystkie trajektorie na \mathbb{T}^2 są okresowe z okresem q , przy czym q obiegom wzdłuż osi x towarzyszy p obiegów wzdłuż osi y .



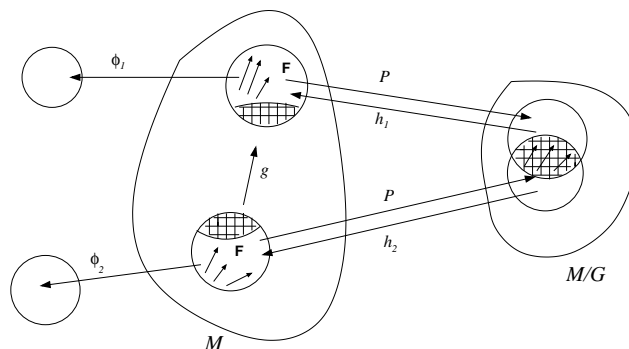
Rysunek 5.7: Trajektoria równania różniczkowego na torusie.

Uwaga

Przypuśćmy, że na rozmaitości \mathbf{M} z atlasem $\{\phi_j\}$ działa grupa dyfeomorfizmów G w sposób *całkowicie nieciągły*, tzn. dla każdego x istnieje zbiór otwarty $U \ni x$ taki, że dla każdego dyfeomorfizmu $g \in G$, $g \neq Id$, zbiory $g(U)$ i U są rozłączne. Jeśli F jest polem wektorowym na \mathbf{M} , takim, że $Dg(F) = F$ dla każdego $g \in G$, to \mathbf{M}/G (utożsamiamy wszystkie orbity G , tzn. $x \sim y$, jeśli $\exists g \in G g(x) = y$) jest rozmaitością i $P: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}/G$ przenosi pole F na \mathbf{M}/G . Faktycznie, można wziąć jako mapy złożenie gałęzi P^{-1} na $P(U)$ z ϕ_j , dla U tak małych, że te gałęzie istnieją.

Dla dowolnych dwóch gałęzi P^{-1} : h_1 i h_2 , mamy $h_1 \circ h_2^{-1} \in G$, więc klasy C^1 (dokładniej $\phi_{j_1} \circ h_1 \circ h_2^{-1} \circ \phi_{j_2}^{-1} = \phi_{j_1} \circ g \circ \phi_{j_2}^{-1} \in C^1$), oraz $D(h_1 \circ h_2^{-1})(F) = F$. P przenosi więc F na \mathbf{M}/G .

Szczególnym przypadkiem tej konstrukcji jest opisane wcześniej $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$. Element $g \in \mathbb{Z}^m$ działa na \mathbb{R}^m przez $x \mapsto x + g$ (podgrupa działa na grupie).



Rysunek 5.8: Mapami dla rozmaitości \mathbf{M}/G są złożenia lokalnych gałęzi P^{-1} z mapami ϕ_j .

Wykład 6

Zajmijmy się teraz następującym zagadnieniem na płaszczyźnie R^2 :
Opisać (znaleźć równania) krzywe, dla których

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (6.1)$$

gdzie P i Q to funkcje rzeczywiste klasy C^1 na R^2 (lub otwartym podzbiorniku). Przez (6.1) rozumiemy, że krzywe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ spełniają równanie:

$$P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0. \quad (6.2)$$

Zagadnienie to nie ma jednoznaczności rozwiązań, w tym sensie, że rozwiązanie γ ze zmienioną parametryzacją też jest rozwiązaniem. Dla $t = \psi(s)$ - zmiany parametryzacji,

$$\dot{\psi}(s)(P(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)) = 0,$$

daje:

$$P(x(\psi(s)), y(\psi(s))) \cdot \dot{x}(\psi(s))\dot{\psi}(s) + Q(x(\psi(s)), y(\psi(s))) \cdot \dot{y}(\psi(s))\dot{\psi}(s) = 0, \text{ czyli}$$

$$P(\gamma(\psi(s)))\frac{d(x \circ \psi)}{ds} + Q(\gamma(\psi(s)))\frac{d(y \circ \psi)}{ds} = 0.$$

Jeśli $\dot{x}(t) \neq 0$, dla $t = t_0$ (tzn. nie zachodzi $Q(x(t), y(t)) = 0$, $P(x(t), y(t)) \neq 0$), to można zażądać, żeby $\frac{dx}{dt} = 1$, wtedy mamy w otoczeniu t_0 , zakładając $Q \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (6.3)$$

W tej postaci mamy już jednoznaczność rozwiązań, bo ustaliliśmy czas.

Mogliśmy jednak ustalić czas inaczej i napisać:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -P(x, y) \\ \frac{dx}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (6.4)$$

(Zauważmy, że równanie (6.1) nie zmieni się, jeśli zastąpimy je równaniem

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0,$$

dla funkcji $\mu \neq 0$. Ta zmiana da jednak inne równanie (6.4) i inny wybór czasu).

Będziemy szukali takiej funkcji rzeczywistej $H(x, y)$, żeby:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = P \quad \text{i} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = Q. \quad (6.5)$$

Taka funkcja będzie stała na trajektoriach, rozwiązaniach (6.1), bo:

$$\frac{d(H \circ \gamma(t))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = P\dot{x} + Q\dot{y} = 0.$$

Zatem trajektorie są postaci $H = \text{const}$.

Funkcja stała na trajektoriach nazywa się **całką pierwszą**. Znalezienie takiej funkcji dla r.r. postaci (6.1), która nie jest stała w otoczeniu żadnego punktu można uważać za rozwiązanie równania.

Uwaga

Dla dowolnej rzeczywistej funkcji Φ klasy C^1 na obszarze w R^2 , w każdym punkcie (x, y) w dziedzinie Φ wyrażenie $d\Phi$ można interpretować jako funkcjonal liniowy na przestrzeni wektorów stycznych do R^2 w (x, y) . Dla $v \in T_{(x,y)}R^2$ $d\Phi(v) = D_v\Phi$ (pochodna Φ w kierunku wektora v). W szczególności dla $\Phi(x, y) = x$ i $\Phi(x, y) = y$ mamy odpowiednio $D_v\Phi = v_1$, $D_v\Phi = v_2$, przy $v = (v_1, v_2)$. Ponieważ $D_v\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}v_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}v_2$, równanie (6.5) daje:

$$dH = Pdx + Qdy. \quad (6.6)$$

Jeśli $Pdx + Qdy$ da się tak zapisać, mówimy, że jest *różniczką zupełną*. Układ równań (6.4) ma wtedy postać *układu hamiltonowskiego*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}. \quad (6.7)$$

Takie układy rozważa się też dla $x, y \in R^m$, gdzie m jest dodatnią liczbą naturalną, porównaj przykład z Rozdziału 1.

Analogicznie do pola wektorowego, które każdemu punktowi z obszaru przyporządkowuje wektor styczny w tym punkcie, element przestrzeni stycznej T_z , $d\Phi$ lub kombinacja liniowa takich wyrażen przyporządkowuje każdemu z funkcjonal liniowy na T_z . Takie przyporządkowanie (ciągłe, C^1) nazywamy 1-formą różniczkową (ciągłą, C^1). Równanie (6.6) oznacza więc równość form różniczkowych. Postać $\omega = Pdx + Qdy$ oznacza zapisanie 1-formy w bazie dx, dy .

Twierdzenie 6.1 *Warunkiem koniecznym i dostatecznym dla istnienia H , spełniającego (6.5) na obszarze jednospójnym jest równość*

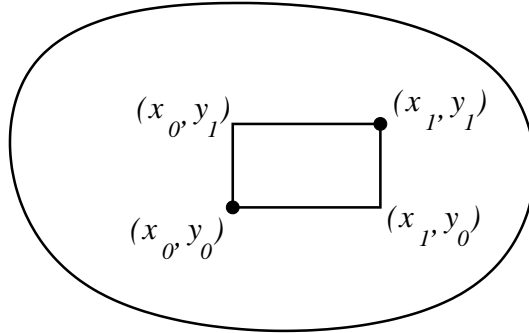
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (6.8)$$

Dowód

Konieczność (dla dowolnego obszaru):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dostateczność (dla dysku lub całej płaszczyzny):



Rysunek 6.1: Ustalony punkt łączymy łamanymi z pozostałymi.

Niech (x_0, y_0) będzie środkiem dysku. Definiujemy:

$$H(x_1, y_1) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_1)} Q dy + \int_{(x_0, y_1)}^{(x_1, y_1)} P dx = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_0)} P dx + \int_{(x_1, y_0)}^{(x_1, y_1)} Q dy.$$

Są to całki po odcinkach łączących w R^2 punkty wypisane przy całkach. Równość definiujących wyrażen wykazemy później. Zauważmy teraz, że z pierwszej postaci H wynika równość:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = P(x_1, y_1),$$

różniczkuje się bowiem tylko drugą całkę, pierwsza nie zależy od x .

Analogicznie z drugiej postaci H :

$$\frac{\partial H}{\partial y} = Q(x_1, y_1).$$

Zatem (6.5) jest spełnione.

Udowodnimy teraz równość w definicji funkcji H :

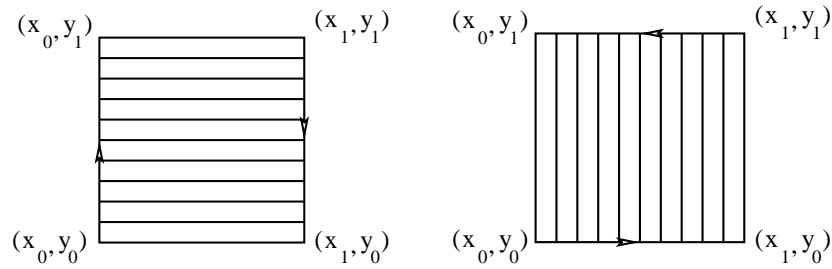
$$\begin{aligned} & \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_1)} Q(x_0, y) dy - \int_{(x_1, y_0)}^{(x_1, y_1)} Q(x_1, y) dy = \\ & - \int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = - \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} & \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_0)} P(x, y_0) dx - \int_{(x_0, y_1)}^{(x_1, y_1)} P(x, y_1) dx = \\ & - \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx. \end{aligned}$$

Zatem z założenia $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ wyrażenia te są równe.

□



Rysunek 6.2: Równość całek wynika z twierdzenia Fubiniego.

Uwaga dla osób znających formy różniczkowe

Warunek (6.8) oznacza, że $d\omega = 0$, bo:

$$d\omega = d(Pdx + Qdy) = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dy \wedge dx = 0.$$

O formie ω , dla której $d\omega = 0$, mówimy, że jest *zamknięta*.

Z twierdzenia Stokes'a wynika, że w obszarze jednospójnym U 1-forma zamknięta jest *dokładna*, tzn. jest postaci dH . Właśnie to udowodniliśmy dla 1-formy ω , rozpatrując, podobnie jak w sytuacji ogólnej, $H = \int_{\gamma} \omega$, gdzie γ to dowolna krzywa w U łącząca (x_0, y_0) i (x_1, y_1)

Czynnik całkujący.

Jeśli $Pdx + Qdy$ nie jest różniczką zupełną, to szukamy funkcji $\mu(x, y) \neq 0$, takiej, żeby $\mu \cdot Pdx + \mu \cdot Qdy$ było różniczką zupełną. Takie μ nazywa się *czynnikiem całkującym*. Dla funkcji μ spełnione musi być równanie:

$$\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x},$$

czyli

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Jest to *równanie różniczkowe cząstkowe 1 rzędu*. Wystarczy znaleźć przynajmniej jedno jego rozwiązanie μ , co czasem jest łatwe.

Zbierzmy poznane dotychczas na wykładach i ćwiczeniach metody całkowania (rozwiązywania) równań różniczkowych zwyczajnych:

1. Rozdzielone zmienne:

$$y' = f(x)g(y)$$

Piszemy

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$

i całkujemy. Otrzymujemy równość między funkcjami zmiennych y i x , którą czasem da się rozwikłać otrzymując wzór na $y(x)$.

2. Równanie jednorodne

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Podstawiamy $z = \frac{y}{x}$, otrzymując;

$$(zx)' = z'x + z = f(z)$$

i dalej całkujemy metodą rozdzielania zmiennych.

3. Czasem dla równania różniczkowego niejednorodnego, podstawienie $y = w^n$ daje równanie jednorodne.

- 4.

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Jeśli

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

to podstawienie

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} - k, \\ y &= \bar{y} - l, \end{aligned}$$

gdzie k, l spełniają:

$$\begin{aligned} a_1k + b_1l &= c_1, \\ a_2k + b_2l &= c_2, \end{aligned}$$

sprowadza równanie do jednorodnego. (Środek układu współrzędnych \bar{x}, \bar{y} to punkt przecięcia prostych $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i $a_2x + b_2y + c_2 = 0$).

Jeśli

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0,$$

to podstawienie

$$a_1x + b_1y = z$$

daje równanie postaci

$$z' = g(z).$$

5.

$$Pdx + Qdy = 0$$

Metoda całkowania polega na znalezieniu całki pierwszej H :

$$dH = Pdx + Qdy,$$

(o ile $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$). Wtedy krzywe całkowe opisane są równaniem $H \equiv const$. Jeśli $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, to szukamy czynnika całkującego $\mu(x, y)$. Czasem udaje się znaleźć $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$, $\mu = \mu(xy)$, $\mu = \mu\left(\frac{y}{x}\right)$. Równanie cząstkowe na μ sprowadza się wtedy do łatwego równania różniczkowego zwyczajnego.

6. Równanie liniowe jednorodne

$$y' = a(x) \cdot y \quad (6.9)$$

Wtedy

$$y(x) = C e^{\int_{x_0}^x a(s) ds}. \quad (6.10)$$

7. Równanie liniowe niejednorodne

$$y' = a(x) \cdot y + b(x). \quad (6.11)$$

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne (6.9). Następnie zamiast C piszemy $C(x)$, otrzymując proste równanie różniczkowe na $C(x)$. Jest to tzw. metoda *uzmienniania stałej*.

Ostatecznym wynikiem jest:

$$y(x) = C \cdot \bar{y}(x) + \bar{y}(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{\bar{y}(s)} \cdot b(s) ds,$$

gdzie \bar{y} to rozwiązanie równania jednorodnego (6.9). (Rozwiązanie jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i *rozwiązania szczególnego* równania niejednorodnego.)

8. Równanie Bernoulliego

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \quad n \neq 0, 1$$

Po podstawieniu $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ otrzymujemy równanie liniowe.

9. Równanie Riccatiego

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$$

Jeśli znamy jedno rozwiązanie \bar{y} , to przez podstawienie $y = \bar{y} + z$ otrzymujemy na z równanie Bernoulliego.

Wykład 7

Zajmiemy się teraz rozwiązywaniem układów równań liniowych. Przypomnijmy, że rozwiązaniem liniowego równania różniczkowego:

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad x, a, b \in R \quad (7.1)$$

o zmiennych współczynnikach, niejednorodnego, jest:

$$x(t) = Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \int e^{-A(s)} b(s) ds, \quad (7.2)$$

gdzie

$$A(t) = \int a(s) ds.$$

Wszędzie jako dolną granicę całkowania można napisać, np. 0, zmiany początków odcinków całkowania wpływają jedynie na współczynnik C , czyli nie wpływają na ogólną postać rozwiązania. Jeśli warunkiem początkowym jest $x(t_0) = C$, to jako dolną granicę całkowania przyjmujemy t_0 .

W (7.1) $x(t)$ jest sumą szczególnego rozwiązania równania $\dot{x} = a(t)x + b(t)$, $e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds$ oraz ogólnego rozwiązania równania jednorodnego $\dot{x} = a(t)x$, postaci $Ce^{A(t)}$.

Zajmiemy się teraz układem równań liniowych, tzn. $x(t) \in R^m$.

Definicja 7.1 Dla A , macierzy $m \times m$ (można ją też interpretować jako przekształcenie liniowe $A: R^m \rightarrow R^m$) definiujemy

$$e^A = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \quad (7.3)$$

Przed udowodnieniem poprawności powyższej definicji przypomnijmy pojęcie normy macierzy:

Definicja 7.2 Normę macierzy A nazywamy liczbę

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|,$$

gdzie v oznacza wektor należący do R^m , natomiast $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_m^2}$ - jego normę euklidesową.

Uwagi:

1.

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|},$$

co wynika z równości $\|\lambda w\| = |\lambda| \|w\|$ ($\frac{\|Av\|}{\|v\|}$ w definicji można zastąpić przez $\frac{\|A(\lambda v)\|}{\|\lambda v\|}$, gdzie $\lambda = \|v\|^{-1}$).

2.

$$\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

gdyż

$$\frac{\|A \circ B(v)\|}{\|v\|} = \frac{\|A(Bv)\|}{\|Bv\|} \cdot \frac{\|Bv\|}{\|v\|}.$$

3.

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

ponieważ dla wektorów $v \neq 0$

$$\frac{\|(A + B)v\|}{\|v\|} \leq \frac{\|A(v)\|}{\|v\|} + \frac{\|B(v)\|}{\|v\|}.$$

4. W przestrzeni liniowej M macierzy (przekształceń liniowych) wprowadzamy odległość

$\rho(A, B) = \|A - B\|$. Przestrzeń (M, ρ) jest zupełna. Ciąg Cauchy'ego A_n jest zbieżny, bo dla każdego v , $A_n(v)$ jest zbieżny, dzięki zupełności R^m . Łatwo sprawdzić, że w granicy otrzymujemy przekształcenie liniowe.

Z ostatniej uwagi wynika, że szereg definiujący e^A jest zbieżny (tzn. ciąg sum częściowych jest zbieżny) dla każdego A . Definicja (7.1) jest więc poprawna.

Lemat 7.1 *Jeśli A i B komutują (tzn. $AB = BA$), to $e^{A+B} = e^A e^B$*

Dowód

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A + B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k(n-k)!} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!}.$$

Szczegóły związane ze zbieżnością można potraktować jako ćwiczenie.

□

Wniosek

$$e^{tA+sA} = e^{(t+s)A}$$

Twierdzenie 7.1 *Rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego jednorodnego o stałych współczynnikach*

$$\dot{x} = Ax,$$

(gdzie A jest macierzą $m \times m$) z warunkiem początkowym $x(0) = x_0 \in R^m$ jest

$$x(t) = e^{tA} x_0.$$

Dowód

$$\frac{e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0}{h} = \frac{e^{tA}(e^{hA} - I)x_0}{h} = (e^{tA} \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n h^n) x_0 =$$

$$e^{tA}Ax_0 + e^{tA}h \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n h^{n-2} \right) x_0 \rightarrow Ae^{tA}x_0,$$

dla $h \rightarrow 0$.

□

Wydaje się, że policzenie e^{tA} jest trudne. Na szczęście tak nie jest.

Twierdzenie 7.2 *Jeśli λ jest rzeczywistą wartością własną macierzy A , a ξ odpowiadającym jej wektorem własnym, to:*

$$e^{tA}\xi = e^{t\lambda}\xi.$$

Dowód

$$e^{tA}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^n}{n!} \xi = e^{t\lambda}\xi.$$

□

Twierdzenie 7.3 *Jeśli $\lambda, \bar{\lambda}$ to para nierzeczywistych wartości własnych macierzy A , natomiast $\xi, \bar{\xi}$ - para odpowiadających im wektorów własnych w C^m , kompleksyfikacji R^m , to:*

$$e^{tA}\xi = e^{t\lambda}\xi, \quad e^{tA}\bar{\xi} = e^{t\bar{\lambda}}\bar{\xi}$$

(gdzie A, e^{tA} rozpatrujemy jako macierze zespolone, przekształcenia liniowe w C^m , wszystkie poprzednio wprowadzone dla R^m definicje przepisują się). Ponadto dla rzeczywistych wektorów

$$v_1 = \frac{\xi + \bar{\xi}}{2}, \quad v_2 = \frac{\xi - \bar{\xi}}{2i}, \quad \lambda = \alpha \pm i\omega$$

zachodzi

$$e^{tA}v_1 = (e^{t\alpha} \cos t\omega)v_1 - (e^{t\alpha} \sin t\omega)v_2,$$

$$e^{tA}v_2 = (e^{t\alpha} \sin t\omega)v_1 + (e^{t\alpha} \cos t\omega)v_2,$$

Inny zapis: dla $w = a_1v_1 + a_2v_2$ mamy w bazie v_1, v_2

$$e^{tA}w = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\omega & \sin t\omega \\ -\sin t\omega & \cos t\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Dowód

$$e^{tA}v_1 = \frac{1}{2}(e^{t\lambda}\xi + e^{t\bar{\lambda}}\bar{\xi}) = e^{t\alpha} \operatorname{Re}(e^{ti\omega}\xi) = e^{t\alpha}((\cos t\omega)v_1 - (\sin t\omega)v_2),$$

gdyż $\xi = v_1 + iv_2$.

Podobnie:

$$e^{tA}v_2 = \frac{1}{2i}(e^{t\lambda}\xi - e^{t\bar{\lambda}}\bar{\xi}) = e^{t\alpha} \operatorname{Im}(e^{ti\omega}\xi) = e^{t\alpha}((\cos t\omega)v_2 + (\sin t\omega)v_1)$$

□

Uwaga

Wprost z definicji funkcji e^A wynika, że jeśli A, B, K są $m \times m$ macierzami oraz K jest odwracalna i $A = KBK^{-1}$, to:

$$e^A = Ke^BK^{-1}.$$

Mając daną macierz A , szukamy bazy (ξ_1, \dots, ξ_m) , w której A ma postać Jordana (zespoloną):

$$B = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

gdzie 0 oznacza klatki samych zer i gdzie każda klatka $*$ ma postać:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

gdzie λ to wartość własna.

Rozważmy macierz przejścia K dla bazy (ξ_1, \dots, ξ_m) :

$$K = (\xi_1, \dots, \xi_m), \tag{7.4}$$

gdzie wektory ξ_j ustawione są pionowo:

$$\xi_j = \begin{pmatrix} \xi_{1,j} \\ \vdots \\ \xi_{m,j} \end{pmatrix}.$$

Wektor $a_1\xi_1 + \dots + a_m\xi_m$ zapisuje się w wyjściowej bazie e_1, \dots, e_m jako:

$$K \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Wtedy wektor $x_1e_1 + \dots + x_me_m$, warunek początkowy, zapisuje się w bazie ξ_i jako:

$$K^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Jeśli ξ_1, \dots, ξ_m jest bazą, w której operator, zapisany jako macierz A w standardowej bazie e_1, \dots, e_m w R^m , ma postać Jordana A^J oraz K jest macierzą zdefiniowaną przez równość (7.4), to $A = KA^JK^{-1}$, $e^A = Ke^{A^J}K^{-1}$.

Twierdzenie 7.4 *Jeśli B ma postać klatki Jordana*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ \underbrace{0 & & & & \lambda}_k \end{pmatrix},$$

to

$$e^{tB} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}t^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dowód

$$B = \lambda I + N,$$

gdzie

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

N jest macierzą nilpotentną, tzn. istnieje j , takie, że $N^j = 0$ (w przypadku macierzy N , $j = k$ jest najmniejszą liczbą naturalną o tej własności). Zatem szereg $\sum \frac{B^n}{n!}$ jest skończony. Dokładniej:

$$e^{tB} = e^{t(\lambda I + N)} = e^{t\lambda} e^{tN}.$$

Ponieważ

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad N^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ & & 0 & 0 & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(dla wektorów bazowych ξ_1, \dots, ξ_k zachodzi $\xi_k \rightarrow^N \xi_{k-1} \rightarrow^N \dots \rightarrow^N \xi_1 \rightarrow^N 0$) mamy:

$$e^{tB} = e^{t\lambda} \left(I + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & 0 & & \vdots & 0 \\ & & & 0 & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \right).$$

□

Wniosek

Macierz e^{tA} można łatwo policzyć, gdyż jest iloczynem $Ke^{tA^J}K^{-1}$, gdzie e^{tA^J} składa się z klatek postaci $e^{t\lambda}(e^{t(A^J-\lambda I)})$, λ to wartości własne, zaś szeregi definiujące $e^{t(A^J-\lambda I)}$ to sumy skończone, jak w twierdzeniu (7.4).

Twierdzenie 7.5 Niech A będzie macierzą (przekształceniem liniowym) $A: R^m \rightarrow R^m$, λ_l ($1 \leq l \leq k$ jej rzeczywistymi wartościami własnymi, ν_l ich krotnościami, $\alpha_l + i\omega_l$ ($1 \leq l \leq s$) zespolonymi (nierzeczywistymi) wartościami własnymi, μ_l ich krotnościami. Wówczas rozwiązania równania:

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^m$$

są postaci:

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), \dots, x_m(t)), \\ x_j(t) &= \sum_{l=1}^k e^{\lambda_l t} p_{l,j}(t) + \sum_{l=1}^s e^{\alpha_l t} (q_{l,j}(t) \cos \omega_l t + r_{l,j}(t) \sin \omega_l t), \end{aligned}$$

dla $j = 1, \dots, m$, gdzie $p_{l,j}$, $q_{l,j}$, $r_{l,j}$ to wielomiany stopni mniejszych niż odpowiednio ν_l , μ_l , μ_l , o współczynnikach rzeczywistych.

W tym zapisie wydaje się, że jest $m \times (\nu_1 + \dots + \nu_k + 2\mu_1 + \dots + 2\mu_s) = m^2$ parametrów. Faktycznie jest ich dokładnie m , tzn. między parametrami powyżej występują zależności, tyle ile wynosi wymiar przestrzeni warunków początkowych, jak w Tw. 7.1.

Dowód

Wobec udowodnionych poprzednio twierdzeń, do pełnego dowodu brakuje rzeczywistego przedstawienia klatek macierzy e^{tA^J} dla nierzeczywistych wartości własnych $\lambda = \alpha + i\omega$. Niech ξ_1, \dots, ξ_k będą wektorami w C^m , takimi, że operator A w podprzestrzeni liniowej rozpiętej przez

ξ_1, \dots, ξ_k ma postać klatki Jordana:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

Wówczas w podprzestrzeni rozpiętej przez $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n$, A ma postać

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & & 0 \\ & \bar{\lambda} & 1 & \\ & & \bar{\lambda} & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \bar{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Można więc dobrać dla postaci Jordana bazę taką, że przy bazie ξ_1, \dots, ξ_n , odpowiadającej λ , mamy bazę $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n$, odpowiadającą $\bar{\lambda}$. Niech

$$v_1^{j,\lambda} = v_1^j = \frac{\xi_j + \bar{\xi}_j}{2}, \quad v_2^{j,\lambda} = v_2^j = \frac{\xi_j - \bar{\xi}_j}{2i}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Ta baza jest rzeczywista, więc macierz przejścia K jest macierzą rzeczywistą. Każda podmacierz 2×2 macierzy e^{tA^j} , odpowiadająca wektorom $\xi_s, \bar{\xi}_s$ oraz $\xi_r, \bar{\xi}_r$ jest postaci (patrz Tw. 7.4):

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \frac{1}{u!} t^u & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda} t} \frac{1}{u!} t^u \end{pmatrix},$$

$r \geq s, u = r - s$. Zatem w bazach $v_1^s, v_2^s, v_1^r, v_2^r$ podmacierz ta ma postać:

$$\frac{1}{u!} t^u e^{ta} \begin{pmatrix} \cos tw & \sin tw \\ -\sin tw & \cos tw \end{pmatrix}.$$

□

Procedura szukania ogólnego rozwiązania jednorodnego liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach

1. Znajdujemy wartości własne i ich krotności jako zera wielomianu charakterystycznego

$$W(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

2. Szukamy podprzestrzeni odpowiadających tym wartościom własnym:

$$L_\lambda = \ker[(A - \lambda I)^{r_\lambda}],$$

gdzie r_λ to krotność λ . Wybieramy w nich dowolne bazy $\xi_{1,\lambda}, \dots, \xi_{r_\lambda,\lambda}$ (tak, żeby w przypadku nierzeczywistych sprzężonych wartości własnych wybrać bazy sprzężone). Na ogół najpierw znajdujemy wektory własne $\ker(A - \lambda I)$, potem $\ker(A - \lambda I)^2$, itd.

3. Piszemy rozwiązanie w postaci

$$\sum_{\lambda} e^{t\lambda} \left(\sum_{r=1}^{r_{\lambda}} a_{r,\lambda} \left(\sum_{j=0}^{r_{\lambda}-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j \xi_{r,\lambda} \right) \right),$$

liczymy $(A - \lambda I)^j \xi_{r,\lambda}$

4. W przypadku wystąpienia pary nierzeczywistych wartości własnych $\lambda, \bar{\lambda}$, grupujemy

$$e^{t\lambda} a_{r,\lambda} (A - \lambda I)^j \xi_{r,\lambda} + e^{t\bar{\lambda}} a_{r,\bar{\lambda}} (A - \lambda I)^j \bar{\xi}_{r,\lambda}.$$

Ponieważ te wektory są rzeczywiste, mamy $a_{r,\bar{\lambda}} = \bar{a}_{r,\lambda}$. Otrzymujemy żądane kombinacje $v_1^{j,\lambda}, v_2^{j,\lambda}$.

5. Jeśli szukamy *rozwiązań szczególnych*, o zadanym warunku początkowym $x(0)$, to możemy przedstawić $x(0)$ w bazie ξ_1, \dots, ξ_m , jako

$$K^{-1}x(0) = \sum a_{r,\lambda} \xi_{r,\lambda},$$

gdzie $K = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Lepiej jednak od razu zapisać $x(0)$ jako sumę $a_{\lambda} \xi_{\lambda}$ dla pewnych $\xi_{\lambda} \in L_{\lambda}$ i szukać jak wyżej rozwiązania postaci

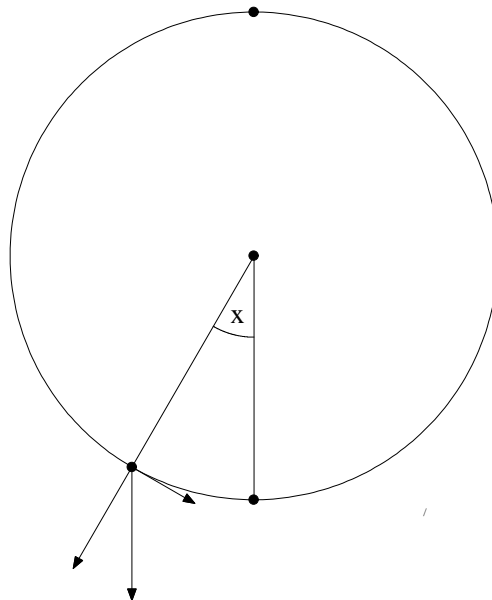
$$\sum_{\lambda} e^{t\lambda} \left(\sum_{j=0}^{r_{\lambda}-1} a_{\lambda} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j \xi_{\lambda} \right).$$

Wykład 8

Przykład (Wahadło z tarciem)

Rozważmy równanie liniowe rzędu 2:

$$\ddot{x} = -x - k\dot{x}$$



Rysunek 8.1: Wahadło

Jest to uproszczone równanie wahadła (w rzeczywistości zamiast siły $-x$, mamy $-\sin x$, jednak powyższe równanie, opisujące *oscylator harmoniczny* jest liniowym przybliżeniem wahadła w otoczeniu punktu równowagi $x = 0$).

Równanie to sprowadza się do układu równań w R^2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2, \end{cases}$$

czyli:

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny to:

$$\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0,$$

$$\Delta = k^2 - 4.$$

Oznaczmy pierwiastki tego wielomianu przez λ_1, λ_2 . Z wzorów Viete'a mamy $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = 1$, $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -k$.

Rozpatrzmy następujące przypadki:

1. $k > 2$ (silne tarcie). Wówczas $\Delta > 0$, istnieją więc dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Z wypisanych powyżej wzorów Viete'a wynika, że są one ujemne. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $\lambda_2 < \lambda_1$. Jeśli $\xi_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2)$ jest wektorem własnym odpowiadającym λ_1 , to:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -1 & -k - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \end{pmatrix},$$

tzn.

$$-\lambda_1 \xi_1^1 + \xi_1^2 = 0,$$

czyli

$$\frac{\xi_1^2}{\xi_1^1} = \lambda_1.$$

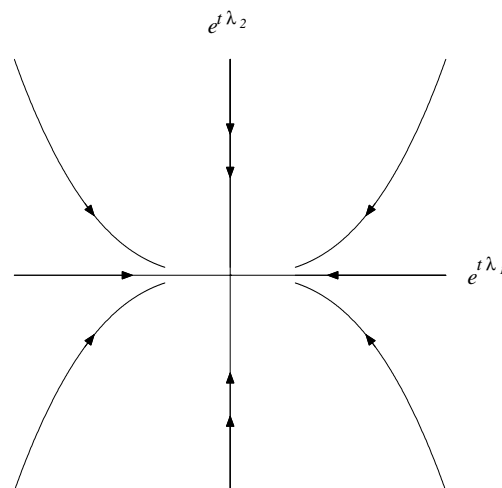
Podobnie dla $\xi_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2)$, wektora własnego odpowiadającego λ_2 , zachodzi:

$$\frac{\xi_2^2}{\xi_2^1} = \lambda_2.$$

Ponieważ $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, można wziąć ξ_1, ξ_2 w II ćwiartce.

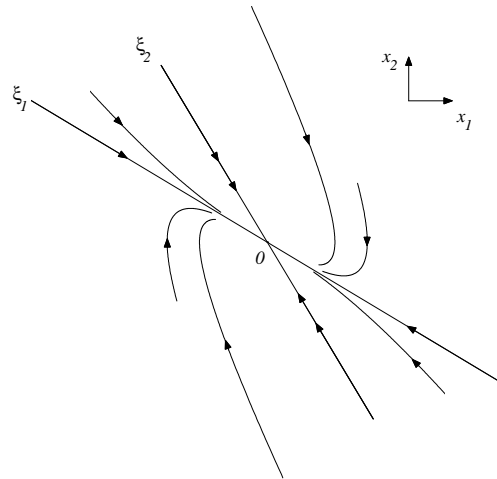
ξ_2 - kierunek silniejszej kontrakcji, jest na prawo od ξ_1 , jak na rysunku.

Zatem dla $k > 2$ wahadło (huśtawka) bez oscylacji dochodzi do stanu równowagi $x = \dot{x} = 0$, przechodząc przez $x = 0$ najwyżej 1 raz. W takiej sytuacji stan równowagi nazywamy **węzłem stabilnym**.

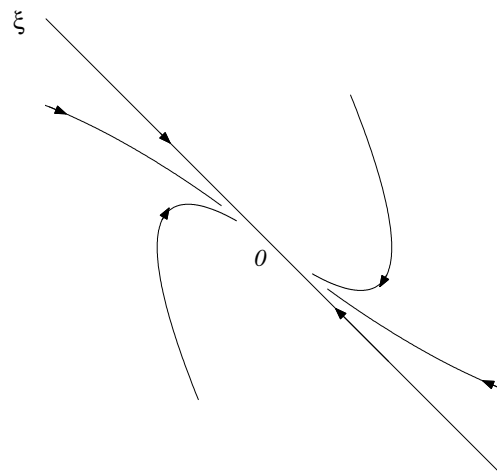


Rysunek 8.2: Węzeł stabilny (w bazie wektorów własnych)

2. Dla $k = 2$ mamy również **węzeł stabilny**. Wektorem własnym (jedynym z dokładnością do skalarne go czynnika) dla wartości własnej $\lambda = -1$ jest $\xi = (-1, 1)$.



Rysunek 8.3: Węzeł stabilny w bazie standardowej

Rysunek 8.4: Węzeł stabilny ($k = 2$)

3. $0 < k < 2$ (słabe tarcie). Mamy

$$\lambda = \alpha \pm i\omega = -\frac{k}{2} \pm i\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 1}.$$

Możemy założyć, że $\omega > 0$. Wtedy w bazie

$$v_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad v_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2i}$$

mamy obrót w prawo

$$\begin{pmatrix} \cos t\omega & \sin t\omega \\ -\sin t\omega & \cos t\omega \end{pmatrix},$$

złożony z kontrakcją, tzn. mnożeniem przez $e^{t\alpha}$, przy $t > 0$. Dla

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (1, \alpha + i\omega), \\ \xi_2 &= (1, \alpha - i\omega), \end{aligned}$$

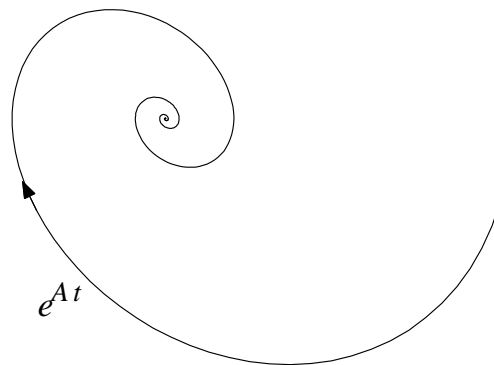
mamy

$$\begin{aligned}v_1 &= (1, \alpha), \\v_2 &= (0, \omega).\end{aligned}$$

Ta baza ma orientację zgodną ze standardową orientacją płaszczyzny, gdyż

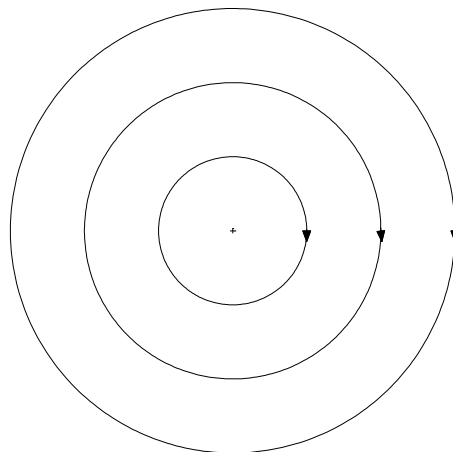
$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \omega \end{pmatrix} = \omega > 0,$$

zatem w bazie wyjściowej też mamy „obrót” w prawo. Taki stan równowagi nazywamy **ogniskiem stabilnym**.



Rysunek 8.5: Ognisko stabilne

4. Jeśli $k = 0$, to $\alpha = 0$. Mamy zatem obrót, bez złożenia z kontrakcją. Stan równowagi nazywamy **centrum**.



Rysunek 8.6: Centrum

Uwaga

W bazie v_1, v_2 dla ogniska lub centrum, równanie ma postać:

$$\dot{x} = Bx, \quad \text{dla pewnej macierzy } B.$$

Tę macierz łatwo policzyć następująco: Różniczkując znaną już nam postać rozwiązań

$$x(t) = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\omega & \sin t\omega \\ -\sin t\omega & \cos t\omega \end{pmatrix},$$

otrzymujemy

$$Bx(t) = \dot{x}(t) = \alpha x(t) + \omega e^{t\alpha} \begin{pmatrix} -\sin t\omega & \cos t\omega \\ -\cos t\omega & -\sin t\omega \end{pmatrix} = \alpha x(t) + \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t),$$

czyli

$$B = \alpha I - \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Można to równanie, wprowadzając na R^2 strukturę zespoloną, zapisać jako

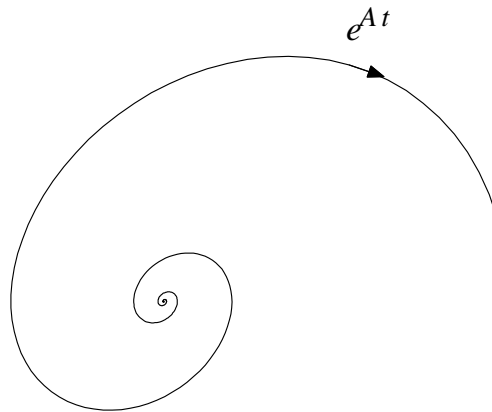
$$\dot{z} = \bar{\lambda}z,$$

(pochodna po zmiennej rzeczywistej t), bo mnożenie przez macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

to mnożenie przez i . Rozwiązania są postaci $z(t) = e^{t\bar{\lambda}} \cdot a$, gdzie $a \in C$ to warunek początkowy.

5. Dla $k < 0$ mamy sytuacje analogiczne, tj. **ognisko lub węzeł niestabilny**.



Rysunek 8.7: Ognisko niestabilne

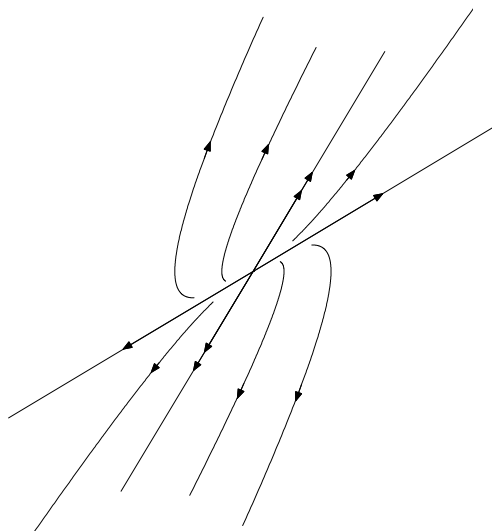
Uwaga

Jeżeli nie zakładamy, że wartości własne macierzy A są tego samego znaku, to dla równania

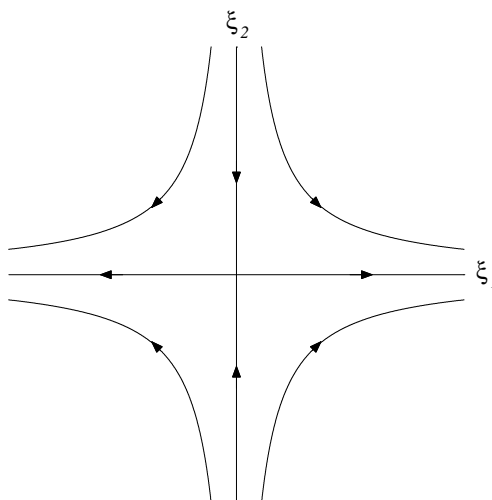
$$\dot{x} = Ax,$$

gdy $\det A < 0$, pojawia się jeszcze jedna sytuacja, tzw. *siodło*. Przykładowym równaniem jest

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$



Rysunek 8.8: Węzeł niestabilny



Rysunek 8.9: Siodło

Przykład (Dwie pary sprzężonych, nierzeczywistych wartości własnych)

Rozpatrzmy równanie różniczkowe

$$\begin{aligned}\dot{x} &= B_1 x, \\ \dot{y} &= B_2 y,\end{aligned}$$

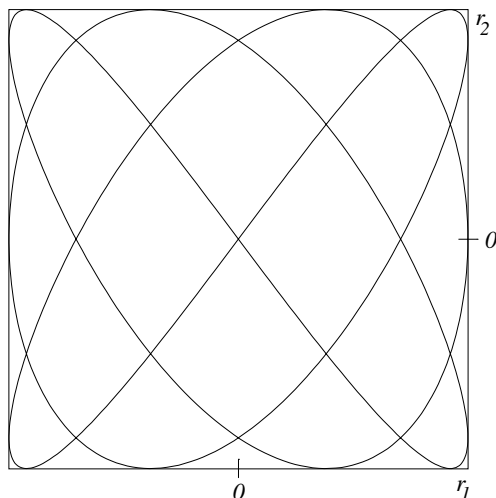
gdzie $x, y \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^4$ oraz

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2 \\ -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dla każdego z równań mamy parę nierzeczywistych wartości własnych, odpowiednio $\pm i\omega_1$ oraz $\pm i\omega_2$.

Trajektorie $e^{i\omega_1 t}$, $e^{i\omega_2 t}$ (zapis we współrzędnych zespolonych w $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$) są zawarte w torusach $|x| = r_1$, $|y| = r_2$ dla $r_1, r_2 \neq 0$ (lub są okręgami $r_1 = 0$ lub $r_2 = 0$). Dla ω_1, ω_2

niewspółmiernych są to tzw. *obmotki* w tych torusach; wszystkie trajektorie w nich zawarte są w nich gęste. Porównaj Wykład 5.



Rysunek 8.10: Figury Lissajous

Rozważmy dwa oscylatory harmoniczne:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -ax, \\ \ddot{y} &= -by,\end{aligned}$$

gdzie $x, y \in R$, $a, b > 0$. Równania sprowadzają się do powyższego układu dla:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

czyli

$$\omega_1 = \sqrt{a}, \quad \omega_2 = \sqrt{b}.$$

Dla ω_1, ω_2 współmiernych rzuty trajektorii na *plaszczynę konfiguracyjną* x, y to tzw. *figury Lissajous*.

Wykład 9

Jedno równanie różniczkowe rzędu n , liniowe, o stałych współczynnikach:

$$x^{(n)} = a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x \quad (9.1)$$

sprowadza się do układu równań liniowych dla $x_0 = x, x_1 = x', \dots, x_{n-1} = x_{n-2}'$

$$\begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = a_1 x_{n-1} + \dots + a_n x_0. \end{cases}$$

Macierzą tego układu jest

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_n & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Dla $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$, $\dot{x} = Ax$.

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^{n+1}(a_n + a_{n-1}\lambda + \dots + a_1\lambda^{n-1}) + (-1)^n\lambda^n = (-1)^n(\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \dots - a_n),$$

co łatwo sprawdzić, rozwijając $\det(A - \lambda I)$ względem ostatniego wiersza. Rozwiązanie ogólne ma postać:

$$x(t) = \sum_{\lambda} \sum_{j=0}^{\nu_{\lambda}-1} a_{\lambda,j} t^j e^{t\lambda}. \quad (9.2)$$

Różniczkując można wypisać (przyjmując $a_{\lambda,\nu_{\lambda}} = 0$)

$$x'(t) = \sum_{\lambda} \sum_{j=0}^{\nu_{\lambda}-1} (\lambda a_{\lambda,j} + a_{\lambda,j+1}(j+1)) t^j e^{t\lambda}$$

i dalej pochodne $x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$, co da rozwiązanie $x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)$ układu $\dot{x} = Ax$.

Powstaje pytanie czy każdy układ zespolonych współczynników $a_{\lambda,j}$ daje jakieś rozwiązanie zespolone. Rozwiązania rzeczywiste dla rzeczywistych λ muszą mieć współczynniki a_λ rzeczywiste. Dla par nierzeczywistych wartości własnych $\lambda = \alpha \pm i\omega$ musi być $a_{\alpha+i\omega,j} = \bar{a}_{\alpha-i\omega,j}$ dla rzeczywistych rozwiązań.

Jeśli zapiszemy te funkcje w postaci

$$x(t) = \sum_{\alpha \pm i\omega} \sum_{j=0}^{\nu_\lambda-1} (b_{\alpha,\omega,j} t^j e^{t\alpha} \cos t\omega + c_{\alpha,\omega,j} t^j e^{t\alpha} \sin t\omega) + \sum_{\lambda \in R} \sum_{j=0}^{\nu_\lambda-1} a_\lambda t^j e^{t\lambda}, \quad (9.3)$$

to powstaje pytanie czy każdy układ współczynników a, b, c daje rozwiązanie. Okazuje się, że tak faktycznie jest: Przestrzeń Γ rozwiązań $x(t)$ jest przestrzenią liniową wymiaru n , bo przekształcenie

$$R^n \ni (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto x(t) \in \{\text{funkcje } f: R \rightarrow R^n\},$$

takie, że $x(0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$, jest izomorfizmem liniowym (każdemu warunkowi początkowemu $x(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ odpowiada rozwiązanie, różnym warunkom odpowiadają różne rozwiązania). Przestrzeń liniowa funkcji zapisanych wzorem (9.3) zawiera Γ , ale jej wymiar jest nie większy niż n , bo współczynników a, b, c jest $\sum \nu_\lambda = n$. Przestrzeń funkcji spełniających (9.3) jest więc równa Γ .

□

Przy danym warunku początkowym (k_1, \dots, k_n) można $a_{\lambda,j}$ wyliczyć. (9.2) i dalsze wzory na $x', \dots, x^{(n-1)}$ dają przy $t = 0$

$$[\text{Macierz}] \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{\lambda,j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Przypomnijmy jeszcze raz, że wszystkie wyrażenia $t^j e^{\lambda t}, j = 0, \dots, \nu_\lambda - 1$ we wzorze (9.2) na ogólne rozwiązanie są potrzebne; inaczej przestrzeń rozwiązań miałaby zbyt mały wymiar. Oznacza to, że z każdą wartością własną związana jest tylko jedna klatka Jordana, tylko jeden wektor własny. Inaczej, mielibyśmy w $\sum_{j=0}^{\nu_\lambda-1}$ zamiast ν_λ , maksymalny wymiar klatek Jordana odpowiadających λ , który byłby mniejszy niż ν_λ bo suma wymiarów tych klatek jest równa $n\nu_\lambda$.

To, że każdej wartości własnej λ odpowiada tylko jeden wektor własny widać zresztą bezpośrednio z postaci macierzy A . Jeśli

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

jest wektorem własnym dla λ , to

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \\ a_n \xi_1 + \dots + a_1 \xi_n \end{pmatrix}, \dots, A^{n-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_n \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $A^j(\xi) = \lambda^j(\xi)$, mamy $\xi_j = \lambda^{j-1}\xi_1$, czyli ξ_1 wyznacza cały wektor ξ .

Przykład

Załóżmy, że wszystkie wartości własne są rzeczywiste, jednokrotne. Rozwiązanie ma wtedy postać:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{t\lambda_k} \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k^{n-1} e^{t\lambda_k}, \end{cases}$$

Zatem przy warunku początkowym $(x(0), \dots, x^{(n-1)}(0)) = (k_1, \dots, k_n)$, mamy (podstawiając $t = 0$):

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$a_j = \frac{V_j}{V},$$

gdzie V - wyznacznik Vandermonde'a:

$$V = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j),$$

a V_i jest wyznacznikiem macierzy powstałej przez zastąpienie j -tej kolumny macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \text{ przez wektor } \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Nieautonomiczne jednorodne równania różniczkowe liniowe

Zajmiemy się teraz równaniami (układami równań liniowych) postaci

$$\dot{x} = A(t)x,$$

gdzie $x \in R^m$, $A(t)$ jest ciągłą funkcją o wartościach w zbiorze macierzy $m \times m$.

Jednoznaczność rozwiązań (przy zadanym warunku początkowym) wynika z lipschitzowsko-ści funkcji $x \mapsto A(t)x$ (tam gdzie $A(t)$ jest ograniczone, czyli lokalnie).

Uwaga

Dziedziny rozwiązań wysyconych to $(-\infty, \infty)$.

Dowód

Rozwiązanie $x(t)$ spełnia równanie:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)x(s)ds,$$

więc dla $t \geq t_0$, przy oznaczeniu

$$\sup_{t_0 \leq s \leq t} \|A(s)\| = K_{t_0,t},$$

mamy

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t K_{t_0,t} \|x(s)\| ds.$$

Z nierówności Gronwalla

$$\|x(t)\| \leq e^{(t-t_0)K_{t_0,t}} \|x(t_0)\|.$$

Zatem nie ma ucieczki rozwiązania do ∞ w skończonym czasie. Z Tw. 3.1 wynika, że prawym końcem dziedziny wysyconego rozwiązania jest $+\infty$.

Dowód, że dla $t < t_0$ rozwiązanie przedłuża się do $-\infty$ jest podobny. Można też zamienić A na $-A$ i skorzystać z pierwszej części dowodu.

□

Uwaga

Dla dowolnego przedziału (otwartego, otwarto-domkniętego lub domkniętego) I , zbiór rozwiązań $x(t) : I \rightarrow R^m$ jest przestrzenią liniową nad ciałem R . Oznaczmy ten zbiór przez Γ_I .

Definicja 9.1 Układem fundamentalnym rozwiązań *nazywamy dowolną bazę* w Γ_I .

Uwaga

Dla dowolnego $t_0 \in I$, przekształcenie J_{t_0}

$$R^m \ni x \xrightarrow{J_{t_0}} x(t) \in \Gamma_I, \quad x(t_0) = x$$

jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Dowód

Przekształcenie J_{t_0} jest dobrze określone z jednoznaczności rozwiązań. Różne warunki początkowe dają różne rozwiązania. Każdemu rozwiązaniu odpowiada warunek początkowy w t_0 , więc J_{t_0} jest „na”. Liniowość wynika z liniowości równania $\dot{x} = A(t)x$.

□

Wniosek

Odwzorowanie $\phi(x, t) = J_t^{-1} \circ J_{t_0}$, przyporządkowujące warunkowi początkowemu (w t_0) punkt na trajektorii rozwiązania po czasie t , to izomorfizm liniowy R^m w R^m .

Uwaga

Układ fundamentalny $\Phi(t)$ spełnia równanie macierzowe:

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$$

(tutaj założenie liniowej niezależności rozwiązań w $\Phi(t)$ nie jest potrzebne)

Dowód

Faktycznie, każda kolumna $x(t)$ macierzy $\Phi(t)$ spełnia $\dot{x} = A(t)x$ z założenia.

□

Definicja 9.2 *Jeśli $\Phi(t)$ jest układem fundamentalnym, to wyznacznik*

$$\det \Phi(t) = W(t)$$

nazywamy wyznacznikiem Wrońskiego (wrońskianem).

Uwaga

Dla równania różniczkowe rzędu n , liniowego, o zmiennych współczynnikach:

$$x^{(n)} = a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x \quad (9.4)$$

za układ fundamentalny przyjmuje się na ogół bazę w przestrzeni liniowej rozwiązań, funkcji $x(t) : R \rightarrow R$ (lub $I \rightarrow R$). Nie potrzeba formalnie do $x(t)$ dopisywać $x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ (chyba, że interesują nas warunki początkowe). Wtedy wrońskian dla układu fundamentalnego $x_1(t), \dots, x_n(t)$ ma postać

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Przykład

W przypadku równania różniczkowego rzędu n o stałych współczynnikach i parami różnych rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, układem fundamentalnym rozwiązań jest np. rodzina funkcji $x_j(t) = e^{t\lambda_j}$. Wtedy

$$W(t) = e^{t(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(znowu pojawił się wyznacznik Vandermonde'a).

Twierdzenie 9.1 (Liouville) *Jeśli $\Phi(t)$ to układ fundamentalny rozwiązań równania*

$$\dot{x} = A(t)x,$$

a $W(t) = \det \Phi(t)$ jest jego wrońskianem, to $W(t)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{W}(t) = a(t)W(t),$$

gdzie $a(t) = \operatorname{tr} A(t)$, czyli

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Wzór ten jest czasami nazywany wzorem Liouville'a-Ostrogradskiego.

Uwaga

Czasem równanie różniczkowe $\dot{x} = A(t)x$ nie daje się rozwiązać (w kwadraturach). Funkcja $e^{\int A(s)ds}$ może nie być rozwiązaniem, jeśli macierze $A(s)$ nie komutują dla różnych s . Jednak podobne wyrażenie dotyczące wrońskianu jest rozwiązaniem.

Dowód twierdzenia Liouville'a

$$\begin{aligned} W(t+h) &= \det(\Phi(t+h)) \\ &= \det(\Phi(t) + h\dot{\Phi}(t) + o(h)) \\ &= \det(\Phi(t) + hA(t)\Phi(t)) + o(h) \\ &= \det(\Phi(t)) \cdot \det(I + hA(t)) + o(h). \end{aligned}$$

Oznaczmy $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^m$. W wyznaczniku

$$\det(I + hA(t)) = \det \begin{pmatrix} 1 + ha_{11}(t) & \dots & \dots & ha_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & ha_{i,j}(t) & \vdots \\ \vdots & ha_{i,j}(t) & \ddots & \vdots \\ ha_{m1}(t) & \dots & \dots & 1 + ha_{mm}(t) \end{pmatrix}$$

macierzy $(I + hA(t)) = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ jedynym składnikiem nie dzielącym się przez h^2 jest iloczyn wyrazów na przekątnej: $\prod_{i=1}^m b_{ii} = \prod_{i=1}^m (1 + ha_{ii})$ (każdy inny składnik zawiera bowiem co najmniej 2 czynniki spoza przekątnej w iloczynie $\prod b_{i,\sigma(i)}$, gdzie σ to nietrywialna permutacja liczb $(1, \dots, m)$) ($\sigma(i) \neq i$ implikuje $\sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i)$). Mamy teraz

$$\prod_{i=1}^m (1 + ha_{ii}) = 1 + h \sum_{i=1}^m a_{ii} + O(h^2),$$

zatem

$$\det(I + hA(t)) = 1 + h \operatorname{tr} A(t) + O(h^2).$$

Stąd

$$W(t+h) = W(t)(1 + ha(t)) + o(h) = W(t) + ha(t)W(t) + o(h),$$

zatem $W(t)$ spełnia równanie różniczkowe:

$$\dot{W}(t) = a(t)W(t),$$

co daje tezę.

□

Z powyższego twierdzenia wyływa następujący wniosek:

Twierdzenie 9.2 (Liouville'a o zachowywaniu miary Lebesgue'a) *Jeśli dla*

$$\dot{x} = F(x),$$

gdzie $x \in R^m$, $F = (F_1, \dots, F_m)$, dywergencja

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0,$$

to dyfeomorfizmy potoku ϕ^t rozwiązującego to równanie różniczkowe

$$\frac{d\phi^t(x)}{dt} = F(\phi^t(x)), \quad \phi^0(x) = x$$

zachowują miarę Lebesgue'a, tzn. dla każdego zbioru mierzalnego $A \in R^m$ oraz każdego $t \in R$ zachodzi:

$$\operatorname{Leb}_m(\phi^t(A)) = \operatorname{Leb}_m(A),$$

gdzie Leb_m oznacza miarę Lebesgue'a w R^m .

Dowód

Przypomnijmy, że dla trajektorii $\phi^t(x)$ zachodzi równanie w wariacjach:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \phi_k^t(x)}{\partial x_i} \right)_{k,i} \right] = D_z F(\phi^t(x)) \circ \left[\left(\frac{\partial \phi_k^t(x)}{\partial x_i} \right)_{k,i} \right],$$

gdzie

$$\left[\frac{\partial \phi_k^t}{\partial x_i} \right] = D_x \phi^t$$

to macierz pochodnych cząstkowych.

$D_x \phi^t$ to układ fundamentalny rozwiązań równania w wariacjach

$$\dot{\xi}(t) = D_z F(\phi^t(x)) \xi(t), \quad \xi(t) \in R^m$$

(geometrycznie $\xi(t)$ należy do przestrzeni stycznej do R^m w $\phi^t(x)$).

Dla $t = 0$, $D_x \phi^0 = I$, więc $\det D_x \phi^0 = 1$.

$\det D_x \phi^t$ to jacobian dyfeomorfizmu ϕ^t w punkcie x (ozn. $J_x(\phi^t)$). Jest to zarazem wrońskian naszego układu fundamentalnego.

Mamy ślad $\operatorname{tr}(D_z F) = \operatorname{div} F = 0$, zatem z twierdzenia (9.1):

$$J_x(\phi^t) = e^{t \cdot \operatorname{div} F(\phi^t(x))} = 1.$$

Stąd

$$\operatorname{Leb}_m(\phi^t(A)) = \int_A J_x(\phi^t) d\operatorname{Leb}_m(x) = \operatorname{Leb}_m(A).$$

□

Przykład

Układ hamiltonowski

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \quad k = 1, \dots, m \quad (9.5)$$

spełnia założenia twierdzenia Liouville'a, ponieważ:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_m}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_m}\right) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial p_k} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} = 0 \end{aligned}$$

Zatem potok hamiltonowski ϕ^t , związany z tym układem równań, zachowuje miarę Lebesgue'a.

Przypomnienie z Wykładu 1

Układ hamiltonowski dają równania Newtona:

$$\ddot{q}_k = -\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{U}{m_k}, \quad (9.6)$$

gdzie U jest energią potencjalną układu ciał (m_k to masa k -tego ciała, jeśli $m = 3N$, czyli mamy N ciał w R^3 , to każde m_k pojawia się w tym zapisie 3 razy). Dla pędów $p_k = m_k \dot{q}_k$ oraz funkcji

$$H(p, q) = \sum_{k=1}^m \frac{p_k^2}{2m_k} + U(q),$$

równanie (9.6) ma faktycznie postać (9.5). Wielkość

$$\sum \frac{p_k^2}{2m_k} = \sum \frac{m_k \dot{q}_k^2}{2}$$

to *energia kinetyczna*, $U(q)$ to *energia potencjalna*.

Dzięki zachowywaniu miary Lebesgue'a, do układów z mechaniki klasycznej można stosować:

Twierdzenie 9.3 (ergodyczne Birkhoffa) *Jeśli μ jest miarą skończoną zachowywaną przez dyfeomorfizmy potoku ϕ^t oraz $h \in L^1(\mu, X)$, to dla prawie każdego $x \in X$ istnieją granice*

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\phi^t(x)) dt &= \tilde{h}_+(x), \\ \lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\phi^t(x)) dt &= \tilde{h}_-(x), \end{aligned}$$

oraz

$$\tilde{h}_+(x) = \tilde{h}_-(x).$$

Jeśli potok ϕ^t jest ergodyczny, tzn. nie istnieje $A \subset X$ niezmiennicze ($\forall_t \phi^t(A) = A$, z dokładnością do zbioru miary 0), takie, że $\mu(A) \neq 0$, $\mu(X \setminus A) \neq 0$, to

$$\tilde{h}_\pm(x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X h d\mu.$$

Uwaga

Miara μ w tym twierdzeniu nie musi być miarą Lebesgue'a; ważne jest jednak założenie, że jest skończona. Leb_m na R^m jest nieskończona, więc Twierdzenia ergodycznego Birkhoffa bezpośrednio nie można stosować. Można jednak to twierdzenie stosować jeśli F na R^m jest okresowa, tzn. np. $F(x) = F(x + w)$ dla całkowitoliczbowych w . Wtedy mamy równanie różniczkowe na torusie R^m/Z^m i faktor Leb_m jest na tym torusie miarą skończoną.

Twierdzenie 9.4 (o ergodyczności obrotki) *Jeśli $\dot{x} = w$ jest równaniem różniczkowym na torusie \mathbb{T}^m , $w = (w_1, \dots, w_m)$ (wektor stały), w_1, \dots, w_m są niezależne nad ciałem liczb wymiernych, to potok $\phi^t(x) = x + tw$ dla tego równania jest ergodyczny dla fatora miary Lebesgue'a.*

Wskazówka do dowodu: Rozwinąć $h = \chi_A$ w szereg Fouriera i zobaczyć, że nie może być $h = h \circ \phi^t$ dla wszystkich t jednocześnie.

□

Wykład 10

Dla równania liniowego jednorodnego ze zmiennymi współczynnikami można próbować szukać rozwiązania w postaci szeregu potęgowego.

Twierdzenie 10.1 *Jeśli dla równania:*

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (10.1)$$

funkcje p, q są analityczne, o promieniach zbieżności wokół t_0 równych co najmniej $r_0 > 0$, to rozwiązania też są analityczne wokół t_0 , o promieniu zbieżności nie mniejszym niż r_0 . Współczynniki c_i rozwinięcia Taylora są zadane wzorem

$$(i+2)(i+1)c_{i+2} = - \sum_{j=0}^i a_{i-j}(j+1)c_{j+1} + b_{i-j}c_j, \quad (10.2)$$

gdzie

$$p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-t_0)^i,$$
$$q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(t-t_0)^i.$$

Dowód

Założmy, że $t_0 = 0$. Szukamy $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$. Po zrózniczkowaniu otrzymujemy

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)c_{i+1}t^i,$$
$$\ddot{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)c_{i+2}t^i.$$

Stąd

$$p(t)\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i a_{i-j}(j+1)c_{j+1} \right) t^i,$$
$$q(t)x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i b_{i-j}c_j \right) t^i,$$

więc po wstawieniu do (10.1) otrzymujemy dla współczynników $c_i, i = 0, 1, \dots$ równania (10.2).

Te równania pozwalają obliczyć je rekurencyjnie, przy zadanych dowolnie c_0, c_1 .

Mamy

$$r_0 \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

więc

$$|a_n| \leq \frac{1}{(r_0 - \varepsilon)^n}$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dla odpowiednio dużych n . Analogiczne nierówności zachodzą także dla b_n .

Dla dowolnych $\hat{r} < r < r_0, \lambda = \frac{\hat{r}}{r} < 1$, przy założeniu

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{r^n},$$

dla $n = 0, 1, \dots$ oraz założeniu indukcyjnym

$$|c_k| \leq \frac{M_{i+1}}{\hat{r}^k}$$

dla $k = 0, 1, \dots, i+1$ i pewnej liczby $M_{i+1} > 0$ szacujemy:

$$\begin{aligned} |c_{i+2}| &\leq \frac{1}{(i+2)(i+1)} \left(\sum_{j=0}^i \frac{M(j+1)}{r^{i-j}} \frac{M_{i+1}}{\hat{r}^{j+1}} + \frac{M}{r^{i-j}} \frac{M_{i+1}}{\hat{r}^j} \right) \\ &\leq \frac{MM_{i+1}}{(i+2)(i+1)} \left(\sum_{j=0}^i \frac{(j+1)\lambda^{i-j}}{\hat{r}^{i+1}} + \frac{1}{\hat{r}^i} \right) \\ &\leq \frac{M_{i+1}}{\hat{r}^{i+2}} \left(\frac{\hat{r}M}{(i+2)(i+1)} \left(\sum_{j=0}^i (j+1)\lambda^{i-j} \right) + \frac{\hat{r}^2 M}{i+2} \right) \\ &\leq \frac{M_{i+1}}{\hat{r}^{i+2}} \left(\frac{\hat{r}M}{(i+2)(i+1)} (i+1) \frac{1-\lambda^{i+1}}{1-\lambda} + \frac{\hat{r}^2 M}{i+2} \right). \end{aligned}$$

Oznaczmy wyrażenie w dużym nawiasie przez A_i i zdefiniujmy $M_{i+1} = M_i \max\{1, A_i\}$. Wyrażenie A_i jest rzędu $const \cdot i^{-1}$, więc mniejsze niż 1 dla i dostatecznie dużych. Stąd dla dużych i mamy $M_{i+2} = M_{i+1}$ i otrzymujemy

$$|c_{i+2}| \leq \frac{M_{i+2}}{\hat{r}_{i+2}}.$$

Zatem, z dowolności \hat{r} promień zbieżności szeregu potęgowego o współczynnikach c_i , wynosi co najmniej r_0 .

□

Przykład (Równanie Hermite'a)

$$\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2px = 0$$

Dla tego równania mamy $a_1 = -2$, $a_i = 0$ przy $i \neq 1$ oraz $b_0 = 2p$, $b_i = 0$ dla $i \neq 0$. Równanie rekurencyjne na c_i ma więc postać:

$$c_{i+2} = -\frac{-2ic_i + 2pc_i}{(i+1)(i+2)} = -\frac{2(p-i)}{(i+1)(i+2)}c_i,$$

Możemy wypisać dwa liniowo niezależne rozwiązania, dla $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ oraz dla $c_0 = 0$, $c_1 = 1$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 - \frac{2p}{2!}t^2 + \frac{2^2p(p-2)}{4!}t^4 - \frac{2^3p(p-2)(p-4)}{6!}t^6 + \dots \\ x_2(t) &= t - \frac{2(p-1)}{3!}t^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}t^5 - \dots \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli p jest liczbą naturalną, to jeden z tych szeregów jest wielomianem (tzw. wielomian Hermite'a H_p).

Uwaga o równaniu Schrödingera

Równania Hermite'a i wielomiany Hermite'a pojawiają się np. przy szukaniu rozwiązania równania Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x)\psi,$$

gdzie m jest masą cząstki, \hbar stałą Plancka, natomiast funkcja zespolona ψ to tzw. *funkcja falowa* cząstki; $|\psi|^2$ to gęstość rozkładu prawdopodobieństwa jej położenia w R^m (ψ ma sens fizyczny jeśli $\int_{R^m} |\psi|^2 = 1$).

Z prawej strony mamy operator liniowy $\mathbf{H}(\psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x)\psi$, szukamy rozwiązań takiej postaci jak dla liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach:

$$\psi = \psi^0 e^{-\frac{iE}{\hbar}t}.$$

Po podstawieniu otrzymujemy równanie

$$\Delta \psi^0 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi^0 = 0$$

na *wartość własną* E i funkcję własną ψ^0 operatora \mathbf{H} . Jest to tzw. *drugie równanie Schrödingera*.

Ograniczmy się do przypadku $x \in R^1$; mamy wtedy:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

i otrzymujemy dla $U = C \cdot x^2$, po podstawieniu $\psi = \phi e^{-\frac{cx^2}{2}}$ gdzie $c > 0$ zależy od $C > 0$, i zmianie x na $y = \sqrt{c}x$, równania Hermite'a dla funkcji ϕ . Rozwiązania są więc postaci:

$$\text{const} \cdot e^{-\frac{c}{2}x^2} H(\sqrt{c}x).$$

Tylko dla wielomianów Hermite'a $H = H_p$ (szczególne p przy szczególnych E) powyższe funkcje odpowiadają cząstkom (ich rozkładowi prawdopodobieństwa ψ). Inne funkcje tej postaci mają kwadraty modułów niecałkowalne.

Przykład (Równanie Bessela)

$$\ddot{x} + \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{t^2 - p^2}{t^2}x = 0 \quad p \geq 0$$

W $t = 0$ współczynniki przy \dot{x} , x mają bieguny. Rozwiązania są szeregami, tzw. *funkcjami Bessela*

W związku z Twierdzeniem 10.1 prawdziwe jest

Twierdzenie 10.2 *Jeśli dla*

$$\dot{x} = F(t, x), \quad x \in R^m$$

F jest funkcją analityczną w (t_0, x_0) , tzn. składowe F rozpisują się w otoczeniu (t_0, x_0) w szereg:

$$F_k(t, x) = \sum_{i, j_1, \dots, j_m} a_{k, i, j_1, \dots, j_m} (t - t_0)^i (x_1 - x_{0,1})^{j_1} \dots (x_m - x_{0,m})^{j_m} \quad k = 1, \dots, m,$$

to $x(t)$ - rozwiązanie problemu Cauchy'ego z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$, jest analityczne w otoczeniu t_0 .

O rozwiązywaniu równań jednorodnych ze zmiennymi współczynnikami rzędu 2

Jeśli jedno rozwiązanie $x_1(t)$ równania

$$\ddot{x} = a(t)\dot{x} + b(t)x, \quad x \in R^1 \tag{10.3}$$

jest znane oraz $x_1(t) \neq 0$ dla każdego t , to można wyliczyć rozwiązanie $x_2(t)$, liniowo niezależne od $x_1(t)$, a zatem znaleźć rozwiązania ogólne, jako kombinacje liniowe $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$.

Faktycznie, z twierdzenia Liouville'a mamy wrońskian

$$\det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = C e^{\int_0^t a(s) ds},$$

czyli

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} x_2(t) + C \frac{e^{\int_0^t a(s) ds}}{x_1(t)}.$$

To jest jedno liniowe jednorodne równanie różniczkowe, na którego rozwiązania znamy wzór:

$$x_2(t) = \phi(t) \left(C_1 + \int_0^t (\phi(s))^{-1} \psi(s) ds \right),$$

gdzie

$$\phi(t) = e^{\int_0^t \frac{\dot{x}_1(s)}{x_1(s)} ds} = e^{\int_0^t \frac{d}{ds} \log x_1(s) ds} = x_1(t).$$

Zatem szczególnego rozwiązania, niezależnego od $x_1(t)$, szukamy w postaci ($C_1 = 0$, $C = 1$)

$$x_2(t) = x_1(t) \left(\int \frac{e^{\int^s a(\tau) d\tau}}{(x_1(s))^2} ds \right).$$

Jeśli stałe nas nie interesują (byle $C \neq 0$), można napisać, jak wyżej, całki nieoznaczone. Napisałem $\int^s a(\tau) d\tau$ tylko po to, żeby zaznaczyć, że to funkcja zmiennej s .

Metoda obniżania rzędu

Inną metodą upraszczania równania

$$x^{(n)} = a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x \quad (10.4)$$

przy znanym rozwiązaniu $x_1(t)$ jest tzw. *metoda obniżania rzędu* równania różniczkowego.

Piszemy $x(t) = x_1(t)z(t)$ (Jest to metoda **wariacji stałej**: w rozwiązaniu postaci $Cx_1(t)$ próbujemy zastąpić stałą C przez funkcję $z(t)$) Po podstawieniu mamy równanie dla funkcji $z(t)$, rzędu n , gdzie nie występuje funkcja $z(t)$, występują tylko jej pochodne. Można więc podstawić $\dot{z}(t) = u(t)$.

Faktycznie, z wzoru Leibniza mamy:

$$x^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x_1^{(i)}(t) z^{(k-i)}(t)$$

dla $k = 0, \dots, n$ i po podstawieniu, z lewej strony (10.4) otrzymujemy $z(t)$ tylko w składniku $x_1^{(n)}(t)z(t)$, a z prawej w $a_1(t)x_1^{(n-1)}z(t) + \dots + a_n(t)x_1(t)z(t)$. Ponieważ $x_1(t)$ jest rozwiązaniem (10.4), wyrażenia te redukują się.

Układ równań liniowych, niejednorodny

Dane jest równanie różniczkowe:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \quad b(t), x(t) \in R^m. \quad (10.5)$$

Rozwiązania szukamy w postaci

$$x(t) = g^t(C(t)) = \Phi(t)C(t), \quad (10.6)$$

gdzie $g^t(x) = \Phi(t)x$ to rozwiązanie równania $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, z warunkiem początkowym $x(0) = x$. $\Phi(t)$ to układ fundamentalny spełniający

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Szukanie rozwiązania postaci $\Phi(t)C(t)$ to znowu *metoda wariacji stałej* rozwiązania równania jednorodnego $\dot{x} = A(t)x(t)$, postaci $x(t) = \Phi(t)C$, $C \in R^m$.

Liczmy:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(\Phi(t)C(t)) = \dot{\Phi}C(t) + \Phi\dot{C}(t) = A\Phi C(t) + \Phi\dot{C}(t) = A(t)x(t) + \Phi(t)\dot{C}(t).$$

Chcemy mieć $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, czyli

$$\Phi\dot{C}(t) = b(t),$$

więc

$$C(t) = C + \int^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds.$$

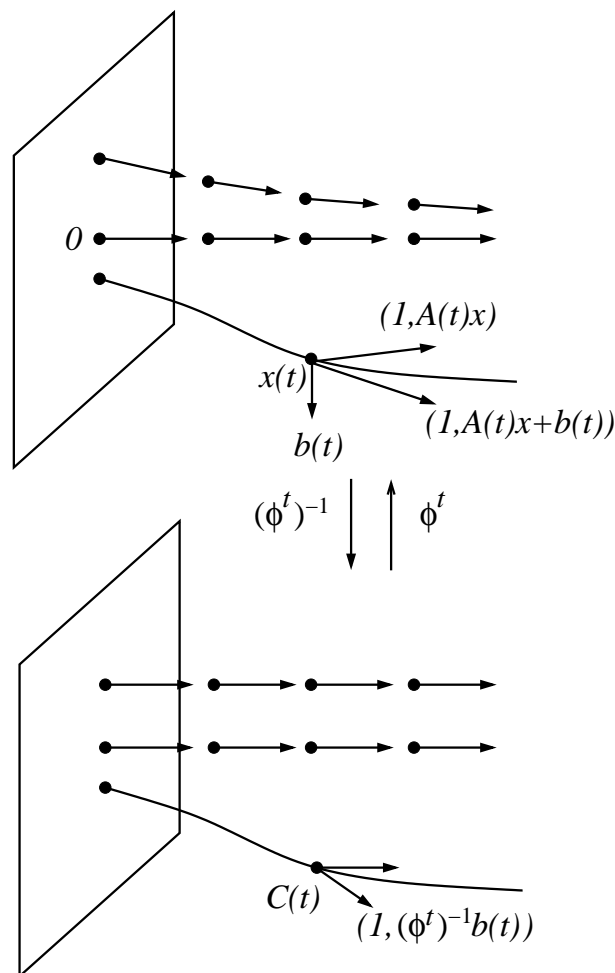
Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie postaci:

$$x(t) = \Phi(t)\left(C + \int^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\right).$$

Uwaga

To, że otrzymany rozwiązanie postaci (10.6), zapisane powyższym wzorem, można było zobaczyć geometrycznie, bez rachunków. We współrzędnych $(t, y) \rightarrow (t, (\phi^t)^{-1}(y))$ trajektorie $\phi^t(x)$ równania jednorodnego to poziome proste (porównaj Tw. o prostowaniu, wersja nieautonomiczna). W punkcie $(t, C(t))$ w nowych współrzędnych, gdzie $C(t) = (\phi^t)^{-1}(x(t))$, mamy wektor styczny w R^{m+1} do tej krzywej, jako obraz przy różniczce wektora $(1, A(t)x(t) + b(t))$. Ale z definicji ϕ^t obraz wektora $(1, A(t)x(t))$ to wektor $(1, 0)$, zostaje więc tylko $(\phi^t)^{-1}b(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$ (skorzystaliśmy z faktu, że $(\phi^t)^{-1}$, jako przekształcenie liniowe, działa tak samo na przestrzeni R^m jak i na wektorach stycznych), zatem $\dot{C}(t) = \Phi^{-1}(t)b(t)$, czyli $C(t) = C + \int^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds$ i po przeniesieniu do wyjściowych współrzędnych przez ϕ^t , mamy

$$x(t) = \Phi^t(C + \int^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds).$$



Rysunek 10.1: Geometryczny dowód wzoru (10.6).

Wykład 11

Jeszcze o równaniu Schrödingera. Przypominam (poprzedni Wykład), że równanie ma postać

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H}(\psi),$$

gdzie

$$\mathbf{H}(\psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x)\psi(x).$$

Dla $x \in R$ i kwadratowego potencjału $U(x) = C \cdot x^2$ istnieje ciąg wartości własnych $E = E_n$ oraz funkcji własnych $\psi_n = e^{-cx^2/2} H_n$ operatora \mathbf{H} . Funkcje $\psi = \psi_n e^{-iEt/\hbar}$ spełniają równanie:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi,$$

(E nazywa się *całkowitą energią cząstki*; w tym zwyczajnym równaniu różniczkowym zastępuje operator energii \mathbf{H} równania Schrödingera).

Napiszmy

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar^{-1} E\psi.$$

Równanie to dla każdego ustalonego x jest zwykłym równaniem oscylatora harmonicznego

$$\dot{z} = -i\hbar^{-1} E z,$$

czyli

$$\dot{x} + iy = -i\hbar^{-1} E(x + iy),$$

lub równoważnie

$$\begin{cases} \dot{x} &= \hbar^{-1} E y \\ \dot{y} &= -\hbar^{-1} E x. \end{cases}$$

Częstotliwość drgań $\omega = \hbar^{-1} E$, natomiast wartości własne to $\lambda = \pm i\omega$.

Definicja 11.1 Trajektorię $\phi(x, t)$, $\phi(x, t_0) = x$, równania różniczkowego $\dot{x} = F(t, x)$ nazywamy stabilną w sensie Lapunowa, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y: \text{dist}(x, y) < \delta \forall t \geq t_0 \text{dist}(\phi(x, t), \phi(y, t)) < \varepsilon,$$

gdzie $\phi(y, t)$ to trajektoria z warunkiem początkowym $\phi(y, t_0) = y$ Trajektorię $\phi(x, t)$ nazywamy asymptotycznie stabilną, jeśli jest stabilna w sensie Lapunowa i ponadto

$$\exists \delta > 0 \forall y: \text{dist}(x, y) < \delta \text{dist}(\phi(x, t), \phi(y, t)) \rightarrow 0, \quad \text{dla } t \rightarrow \infty.$$

Definicja 11.2 Punkt x_0 , w którym $F(x_0) = 0$, dla autonomicznego równania różniczkowego $\dot{x} = F(x)$ w obszarze w R^m (lub w rozmaitości różniczkowej), nazywamy stanem lub położeniem równowagi.

Definicja 11.3 Jeśli liniowe równanie różniczkowe

$$\dot{x} = DF(x_0)x,$$

dane częścią liniową F w x_0 , położeniu równowagi, ma własność

$Re\lambda < 0$ dla każdej wartości własnej λ operatora liniowego (różniczki) $DF(x_0)$, to mówimy, że x_0 jest ściekiem.

Jeśli $Re\lambda > 0$ dla każdego λ , to mówimy, że x_0 jest źródłem.

Jeśli $Re\lambda \neq 0$, to punkt x_0 nazywamy punktem hiperbolicznym.

Przestrzeń, po obcięciu do której $DF(x_0)$ ma tylko wartości własne, spełniające $Re\lambda < 0$, nazywa się stabilną, przestrzeń, gdzie $Re\lambda > 0$, nazywa się niestabilną.

Uwagi:

1. Ścieki i źródła są, zgodnie z tymi definicjami, punktami hiperbolicznymi.
2. W przypadku wymiaru $m=2$ ściekami są węzeł stabilny i ognisko stabilne, źródłami są węzeł niestabilny i ognisko niestabilne. Punkt hiperboliczny dla którego $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ nazywamy *siodłem*.

Twierdzenie 11.1 Jeśli x_0 jest ściekiem, to trajektoria $\phi(t) \equiv x_0$ jest asymptotycznie stabilna.

W dowodzie potrzebna będzie następująca

Definicja 11.4 Funkcja ciągła rzeczywista, określona na otoczeniu x_0 nazywa się funkcją Lapunowa, jeśli $L(x_0) = 0$ oraz $L(x) > 0$ dla $x \neq x_0$ i L jest monotoniczna malejąca wzdłuż każdej trajektorii $\phi(t)$. Jeśli L jest różniczkowalna, to tę monotoniczność zapisujemy jako $D_F L(x) \leq 0$ dla każdego x w otoczeniu x_0 ($D_F L$ oznacza pochodną L w kierunku F).

Twierdzenie 11.2 (lemat Lapunowa) Jeśli w otoczeniu położenia równowagi istnieje funkcja Lapunowa L , wówczas położenie to jest stabilne w sensie Lapunowa. Jeśli spełnione jest więcej: L jest ściśle malejąca wzdłuż każdej trajektorii z wyjątkiem $\phi(t) \equiv x_0$ (lub dla L różniczkowalnej $D_F L(x) < 0$ dla $x \neq x_0$ – to jest silniejsze od ścisłego malenia), to x_0 jest asymptotycznie stabilne.

Dowód

Niech U będzie zwartym otoczeniem x_0 , na którym określona jest funkcja L . Oznaczmy $A_\eta = \{x \in U : L(x) \leq \eta\}$. Przy $\eta \rightarrow 0$, mamy $A_\eta \rightarrow x_0$ (tzn. $\sup_{y \in A_\eta} |y - x_0| \rightarrow 0$). W przeciwnym razie $\bigcap_{\eta > 0} A_\eta$ zawierałby $y \in U$ dzięki zwartości U i $y \neq x_0$ oraz $L(y) = 0$, sprzeczność.

Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\eta > 0$ takie, że $A_\eta \subset B(x_0, \varepsilon)$. Zbiór $U_\eta = \{x \in U : L(x) < \eta\}$ zawiera x_0 i jest otwarty. Istnieje więc $\delta > 0$ takie, że $B(x_0, \delta) \subset A_\eta$. Dla $x \in B(x_0, \delta)$, $t \geq 0$ mamy $\phi(x, t) \in A_\eta$, gdzie $\phi(x, 0) = x_0$.

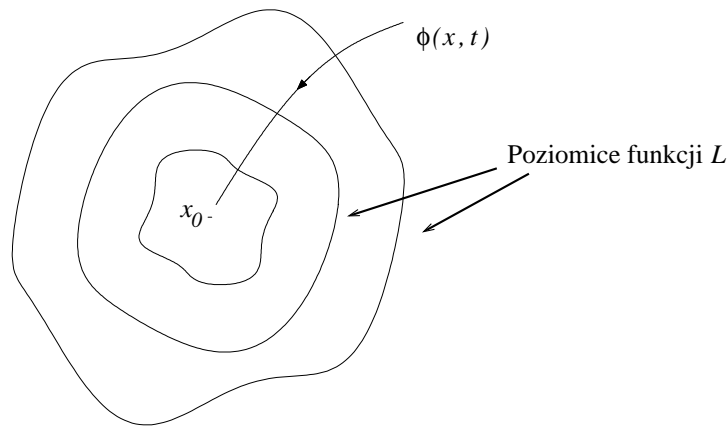
W przeciwnym razie $\phi(x, t_1) \in \partial A_\eta$ dla pewnego czasu t_1 . Ustalmy, że $t_1 > 0$ to pierwszy taki moment. Wtedy $\phi(x, t) \in A_\eta \subset U$ dla wszystkich $T : 0 \leq t \leq t_1$, gdzie L jest określone. Mamy

$L(x) < \eta$ i $L(\phi(x, t_1)) = \eta$, co przeczy założeniu, że L wzdłuż $\phi(x, t)$ nie rośnie. W konkluzji $\phi(x, t) \in A_\eta \subset B(x_0, \varepsilon)$.

Jeśli L jest ściśle malejąca wzdłuż trajektorii $\phi(x, t)$ i wzdłuż pewnej trajektorii

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(\phi(x, t)) = L_0 > 0,$$

to znajdujemy ciąg $t_n \rightarrow \infty$ i $y \in U$ takie, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x, t_n) \rightarrow y$. Wtedy dla każdego $t \geq 0$ mamy $L(\phi(y, t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\phi(x, t_n + t)) = L_0$. To przeczy ściślemu maleniu L wzdłuż $\phi(y, t)$.



Rysunek 11.1: Ilustracja dowodu lematu Lapunowa

□

Dowód Twierdzenia 11.1

Zbadajmy najpierw równanie liniowe $\dot{x} = DF(x_0)(x - x_0)$. Oznaczmy dalej $DF(x_0)$ przez A i przyjmijmy dla uproszczenia oznaczeń $x_0 = 0$. W tym przypadku można skonstruować L jako formę kwadratową. Należy wziąć

$$L(x) = \sum_{j=1}^m x_j^2,$$

gdzie x_j to współrzędne w takiej bazie, w której klatki Jordana mają postać

$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wypisanie wzoru na $D_{Ax}L(x)$ pozostawiam Czytelnikowi; jeśli ε jest dostatecznie małe, to $D_{Ax}L(x) < 0$ dla $x \neq x_0$.

Dla $\dot{x} = Ax + G(x)$, gdzie $|G(x)| = o(|x|)$, mamy

$$D_F(L)(x) = D_{Ax}L(x) + D_GL(x).$$

Widać, że $|D_{Ax}L(x)| \geq C|x|^2$ dla $C > 0$ jeśli ε jest dostatecznie małe. Mamy też $G = o(|x|)$ zatem $D_GL = o(|x|^2)$. Stąd w małym otoczeniu 0 (x_0 przed uproszczeniem oznaczeń) mamy $D_FL(x) < 0$ dla $x \neq x_0$.

Uwaga

Jeśli dla liniowego równania różniczkowego wszystkie wartości własne spełniają $Re\lambda \leq 0$, a te dla których zachodzi równość mają klatki Jordana 1×1 , to 0 jest stabilne w sensie Lapunowa.

Dowód

Trajektorie rozkładają się na sumy trajektorii: w przestrzeni $Re\lambda < 0$, gdzie jest nawet stabilność asymptotyczna oraz $Re\lambda = 0$, gdzie składniki w 2-wymiarowych przestrzeniach to ruchy po elipsach.

□

Twierdzenie 11.3 (Hadamard-Perron) Niech x_0 będzie punktem stałym (równowagi) hiperbolicznym równania różniczkowego:

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

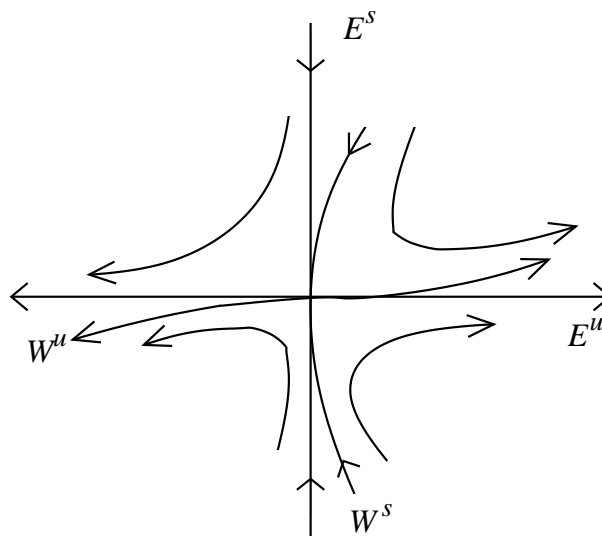
Niech $T_{x_0} = E^s \oplus E^u$ będzie rozkładem przestrzeni stycznej w x_0 na przestrzenie stabilną i niestabilną (odpowiadające $Re\lambda < 0$, $Re\lambda > 0$ dla równania różniczkowego liniowego $\dot{x} = DF(x_0)x$, $F \in C^1$). Wtedy istnieje $\delta > 0$ takie, że zbiory

$$\begin{aligned} W_\delta^s(x_0) &= \{x : \forall t \geq 0 \phi^t(x) \in B_s(x_0, \delta)\}, \\ W_\delta^u(x_0) &= \{x : \forall t \leq 0 \phi^t(x) \in B_u(x_0, \delta)\}, \end{aligned}$$

gdzie $B_s(x_0, \delta), B_u(x_0, \delta)$ oznacza kule o środku x_0 i promieniu δ odpowiednio w E^s, E^u , to C^1 rozmaitości, wykresy funkcji $E^s \rightarrow E^u$ oraz $E^u \rightarrow E^s$ odpowiednio, styczne w x_0 do E^s, E^u , wymiarów takich, jak E^s, E^u .

Dla $x \in W_\delta^s(x_0)$ $\phi^t(x) \rightarrow x_0$ przy $t \rightarrow \infty$.

Dla $x \in W_\delta^u(x_0)$ $\phi^t(x) \rightarrow x_0$ przy $t \rightarrow -\infty$ (zbieżność wykładnicza).



Rysunek 11.2: Rozmaitości stabilna i niestabilna.

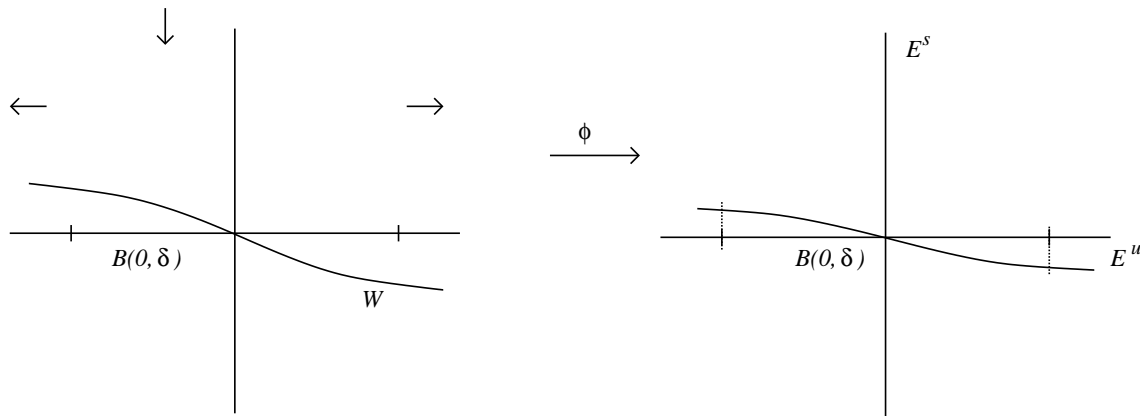
Szkic dowodu

Kroki dowodu twierdzenia Hadamarda-Perrona są takie same jak w przypadku twierdzenia o C^1 -zależności rozwiązań równania różniczkowego od warunków początkowych

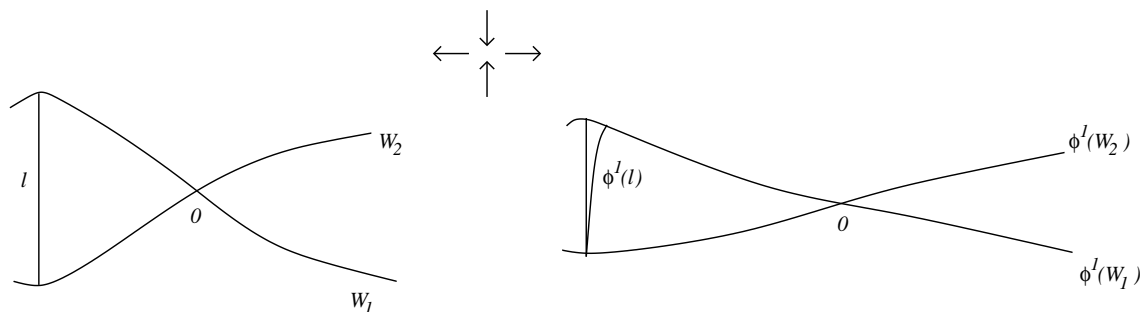
1. Niech X oznacza przestrzeń funkcji z kuli $B_u(0, \delta) \subseteq E^u$ w E^s , stycznych do E^u w 0 , ze stałą Lipschitza nie większą niż 1 .
2. Na przestrzeni X działa przekształcenie Φ

$$\Phi(W) = \phi^1(W),$$

gdzie ϕ^1 oznacza ϕ^t przy $t = 1$ (utożsamiamy tutaj funkcję W z jej wykresem). W jest hiperpowierzchnią w przestrzeni stycznej do R^m w punkcie x_0 , utożsamionej w otoczeniu 0 z R^m z otoczeniem x_0 . Przyjmijmy $x_0 = 0$. Formalnie $\phi^1(W)$ ma dziedzinę (jako wykres) większą niż $B_u(0, \delta) \subseteq E^u$, trzeba więc jeszcze dziedzinę obciąć do $B_u(0, \delta)$. Φ okazuje się być kontrakcją na X , ma więc punkt stały W_0 .



Rysunek 11.3: Przekształcenie Φ .



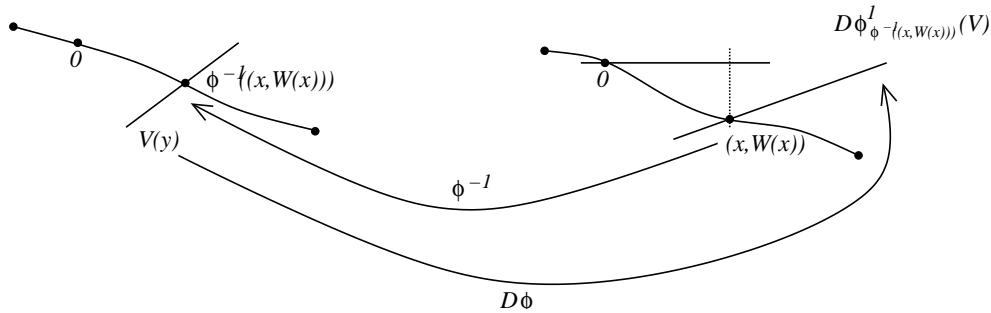
Rysunek 11.4: Φ jest kontrakcją. Wzdłuż E^s (E^u) mamy nieliniowe spłaszczanie (rozciąganie).

3. Niech Y oznacza przestrzeń funkcji z $B_u(0, \delta) \subseteq E^u$ do zbioru przekształceń liniowych z E^u w E^s o normie nie większej niż 1 .

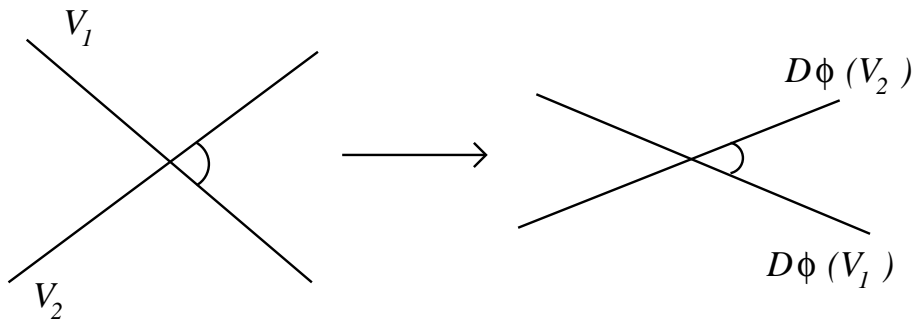
4. Dla $W \in X, V \in Y$ definiujemy $\Psi(W, V)$ jako funkcję przyporządkowującą każdemu $x \in B(0, \delta) \subseteq E^u$ przekształcenie liniowe o wykresie

$$D\phi^1(\text{graph } V),$$

gdzie $\text{graph } V$ to wykres $V(\pi^u \phi^{-1}((x, W(x))))$ w przestrzeni stycznej $T_{\phi^{-1}((x, W(x)))}(R^m)$ (π^u to rzut na przestrzeń E^u).



Rysunek 11.5: Ilustracja definicji przekształcenia Ψ .



Rysunek 11.6: $D\phi$ zmniejsza kąt.

Przekształcenie $H : (W, V) \mapsto (\Phi(W), \Psi(W, V))$ jest kontrakcją na „włóknach” Y :

$$\|\Psi(W, V_1) - \Psi(W, V_2)\| < \lambda \|V_1 - V_2\|, \quad \lambda < 1.$$

Podobnie jak w przypadku twierdzenia o C^1 -zależności pokazujemy zbieżność do punktu stałego $H^n(W, V) \rightarrow (W_0, V_0)$.

5. Jeśli startujemy z W oraz $V = DW$, np. $W \equiv 0, V \equiv 0$ to dla (W_n, V_n) , obrazów (W, V) przy H^n , także zachodzi $V = DW$. Z $\Phi^n(V) \rightarrow V_0$ oraz zbieżności różniczek do W_0 wynika, że V_0 jest klasy C^1 , z różniczką W_0 .

Uzyskaliśmy więc niezmiennicze V_0 , klasy C^1 , $\phi^{-1}(V_0) \subseteq V_0$. Nietrudno pokazać, że $\phi^{-n}(x) \rightarrow x_0$ dla $x \in V_0$ oraz $\phi^{-n}(x)$ ucieka z $B(x_0, \delta) \subseteq R^m$ dla $x \notin V_0$.

6. Nie jest trudno sprawdzić, że V_0 spełnia także własności W_δ^u dla wszystkich $t \leq 0$, nie tylko dla całkowitych.

□

Równania liniowe z okresowymi współczynnikami

Zajmiemy się teraz jednorodnym liniowym równaniem różniczkowym z $F(t, x)$ okresowo zależnym od t . Załóżmy, że okresem jest $T > 0$.

Uwaga

$$\phi(x_0, t_0, t) = \phi(x_0, t_0 + T, t + T), \quad (11.1)$$

gdzie $\phi(x_0, s_0, \cdot)$ oznacza rozwiązanie równania różniczkowego

$$\frac{d\phi}{dt}(x_0, s_0, t) = F(t, \phi(x_0, s_0, t)),$$

z warunkiem początkowym

$$\phi(x_0, s_0, s_0) = x_0.$$

Uwaga powyższa była już uzasadniona w rozdziale 5, gdzie pokazałem, że jeśli F nie zależy od t , to

$$\phi(x_0, t_0, t) = \phi(x_0, t_0 + s_0, t + s_0)$$

dla dowolnego s_0 . Podam jednak uzasadnienie jeszcze raz, w nieco innej formie:

Oznaczmy $f(t, x) = (t + T, x)$, $f: R^{m+1} \rightarrow R^{m+1}$. Z założenia okresowości F (utożsamiając przestrzenie styczne z R^{m+1}), mamy:

$$Df_{(t,x)}(1, F(t, x)) = (1, F(t + T, x)).$$

Zatem f przeprowadza trajektorię $\phi(x_0, t_0, t)$ na $\phi(x_0, t_0 + T, t + T)$.

Skorzystaliśmy tu z następującego faktu, który był już (w nieco innej postaci) wprowadzony przed definicją 5.2 w Wykładzie 5):

Fakt

Jeśli $f \in C^1$ jest dyfeomorfizmem z $U_1 \subseteq R^m$ do $U_2 \subseteq R^m$ (lub ogólniej dla rozmaitości różniczkowych U_1, U_2) oraz F_1 jest polem wektorowym na U_1 , $F_1: U_1 \rightarrow R^m$, natomiast

$$F_2(x) = Df(F_1(f^{-1}(x))),$$

to przeniesienie tego pola na U_2 , wówczas jeśli $\gamma(t)$ jest trajektorią równania różniczkowego

$$\dot{\gamma}(t) = F_1(\gamma(t)),$$

to $f(\gamma(t))$ jest trajektorią równania różniczkowego danego polem F_2 .

Dowód

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = Df_{\gamma(t)}\dot{\gamma}(t) = Df_{\gamma(t)}(F_1(\gamma(t))) = F_2(f(\gamma(t))).$$

□

Uwaga

Z powyższego faktu korzystaliśmy np. rozwiązując liniowe równanie różniczkowe $\dot{x} = Ax$ we współrzędnych danych przez bazę postaci Jordana, gdzie równanie ma postać

$$\dot{x} = K^{-1}(A(K(x))) = A^J x$$

i biorąc obraz rozwiązania $\gamma(t) = e^{tA^J}$, mianowicie

$$K e^{tA^J} K^{-1}(x)$$

w wyjściowych współrzędnych.

Dla $F(t, x)$ o okresie $T > 0$ oznaczmy $\phi(x, 0, T) = \phi(x, T) = \phi^T(x) = Bx$, ϕ^T jest liniowe, B jest więc przekształceniem liniowym (w ustalonej bazie można B uważać za macierz).

Twierdzenie 11.4 *Rozważmy równanie różniczkowe w \mathbb{R}^2*

$$\dot{x} = F(t, x) = A(t)x,$$

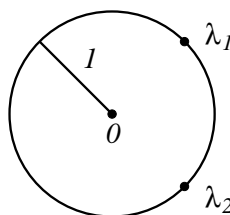
gdzie $A(t)$ ma okres $T > 0$. Załóżmy, że $\det B = 1$. Jeśli $|tr B| < 2$, to 0 jest rozwiązaniem stabilnym w sensie Lapunowa.

Dowód

$$1 = \det B = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

dla wartości własnych λ_1, λ_2 macierzy B . Nierówność $|tr B| < 2$ implikuje, że jest to para sprzężonych liczb rzeczywistych, gdyż dla $\lambda \neq 0$, rzeczywistych mamy:

$$\left| \lambda + \frac{1}{\lambda} \right| \geq 2.$$



Rysunek 11.7: Wartości własne macierzy B .

Zatem B , w odpowiedniej bazie, jest obrotem, stabilnym w sensie Lapunowa (patrz uwaga po twierdzeniu (11.2)). Udowodniliśmy zatem część twierdzenia nie związaną z równaniami różniczkowymi, o stabilności 0 dla iteracji przekształcenia B . Łatwo jednak widać, że implikuje to stabilność 0 dla potoku ϕ^t , rozwiązania równania różniczkowego $\dot{x} = F(t, x)$. Skorzystaliśmy tu z faktu wynikającego z równości (11.1), że:

$$\phi^{nT}(x) = \phi(\dots((\phi(x, 0, T), T, 2T), 2T, 3T) \dots, nT) = \phi(\dots \phi(\phi(x, T), T), \dots, T) = B^n x,$$

ponieważ

$$\phi(y, nT, (n+1)T) = \phi(y, 0, T)$$

oraz z faktu, że w odcinkach czasu $t \in (nT, (n+1)T)$, rozwiązanie nie może się oddalić od 0 (ciągła zależność od warunków początkowych).

□

Wniosek

Jeśli $\det B = 1$, $|tr B| < 2$ dla przekształcenia liniowego B płaszczyzny R^2 w siebie, zaś \tilde{B} jest przekształceniem liniowym dostatecznie bliskim B , w klasie przekształceń o wyznaczniku równym 1 (tzn. zachowujących miarę Lebesgue'a), to 0 jest stabilne w sensie Lapunowa dla iteracji \tilde{B}^n .

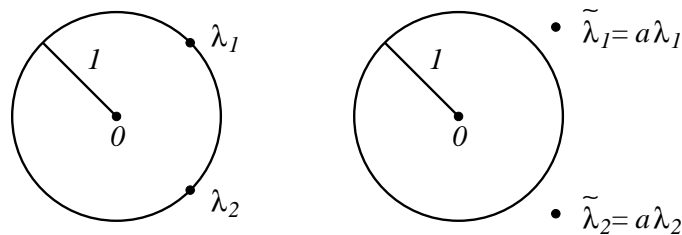
Dowód

Wystarczy, żeby $tr \tilde{B} < 2$, co jest spełnione dla \tilde{B} blisko B , z otwartości tego warunku.

□

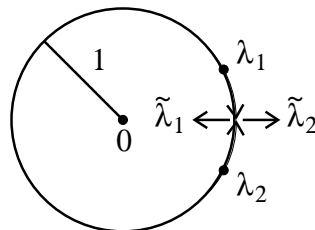
Uwaga

Bez założenia $\det \tilde{B} = 1$, ten wniosek nie byłby prawdziwy. Dla $\tilde{B} = aB$, gdzie $a > 1$, bliskie 1, można stracić stabilność, uzyskać źródło.



Rysunek 11.8: Jeśli $\det \tilde{B} \neq 1$, może nastąpić utrata stabilności.

Jeśli $\det \tilde{B} = 1$, to żeby stracić stabilność trzeba zaburzając przejść z $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ przez 1 lub -1 .



Rysunek 11.9: Utrata stabilności w klasie macierzy o wyznaczniku 1.

Przykład Rezonans parametryczny

Rozważmy równanie

$$\ddot{x} = -\omega^2(1 + \varepsilon a(t))x,$$

gdzie $a(t)$ jest funkcją okresową z okresem T (np $a(t) = \cos(t)$ dla $T = 2\pi$; równanie nazywamy wtedy *równaniem Mathieu*).

Dla $\varepsilon = 0$ układem fundamentalnym rozwiązań jest:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Mamy stały wrońskian $W(t) = \det \Phi(t) = 1$. W szczególności $\det B = \det \Phi(T) = 1$ Ponadto $|tr B| \leq 2$, a jedynymi ω, T , dla których $|tr B| = 2$ są

$$\omega = \frac{n\pi}{T}.$$

Zatem tylko dla takich ω, T , zaburzenie składnikiem $\varepsilon a(t)$ może spowodować niestabilność. Liczbę ω nazywa się *częstością (kątową) własną* oscylatora (Podzielona przez 2π jest liczbą, niekoniecznie całkowitą, obiegów oscylatora w jednostce czasu).

Liczba $\frac{2\pi}{\omega}$ to *okres drgań własnych*. Jeśli ν , częstość zmian parametrów, tzn. funkcji $a(t)$, jest zdefiniowana przez

$$\frac{2\pi}{\nu} = T \text{ (dla równania Mathieu } \nu = 1),$$

to utrata stabilności może zajść tylko przy $T\omega = n\pi$, n całkowite, czyli

$$\frac{2\pi}{\nu} = n\pi, \quad \frac{\omega}{\nu} = \frac{n}{2}.$$

Inaczej

$$\frac{2\pi}{\nu} = \frac{n}{2} \frac{2\pi}{\omega},$$

czyli okres zmian parametrów, okres $a(t)$, jest krotnością półokresu drgań własnych.

Uwaga

Jest to zgodne z doświadczeniem na huśtawce. Żeby się rozhuścić, należy zmieniać $a(t)$, tzn. $\omega(1 + a(t))$, czyli np. długość huśtawki l (przy $\ddot{x} = -\omega^2 x$, mamy $\omega^2 = Const \cdot l$), z okresem będącym krotnością półokresu huśtania bez zmian długości.

Wykład 12

Przykład (Nieliniowe równanie różniczkowe)

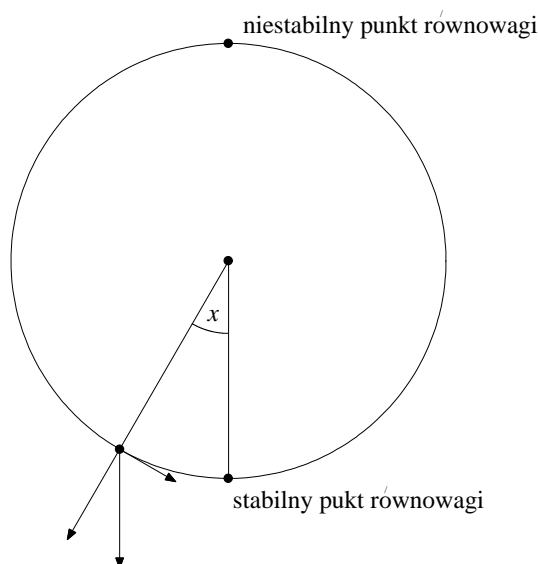
Zajmiemy się teraz prostym przykładem nieliniowego układu równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x, \end{cases}$$

Można ten układ rozpatrywać na $S^1 \times R$ (iloczynie kartezjańskim okręgu i prostej), bo pole jest okresowe względem x , $S^1 = R/2\pi Z$. Układ pochodzi od równania rzędu 2

$$\ddot{x} = -\sin x$$

i jest równaniem wahadła matematycznego. Przyjmuję, że stała przed $\sin x$ związaną m. in. z długością wahadła jest równa 1. Równanie oscylatora harmonicznego, rozpatrywane m. in. na końcu poprzedniego wykładu było liniowym przybliżeniem tego równania blisko 0. Funkcja $\sin x$ była zastąpiona przez x .



Rysunek 12.1:

Są dwa punkty równowagi: $p = (0, 0)$ oraz $q = (\pi, 0)$. Części liniowe pola $F(x, y) = (y, -\sin x)$ w tych punktach, to

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ich wartościami własnymi są

$$\pm i \quad \text{oraz} \quad \pm 1,$$

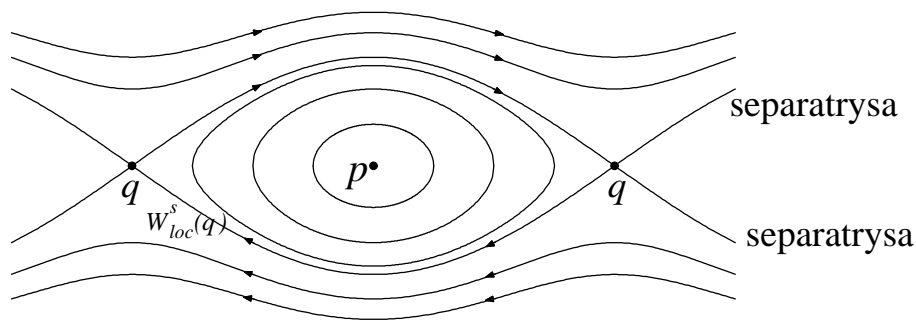
te punkty więc to odpowiednio centrum (def.: otoczenie jest sumą orbit okresowych) oraz siodło.

Rozpatrywane równanie jest postaci hamiltonowskiej

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned}$$

gdzie energia (hamiltonian) $H = \frac{y^2}{2} - \cos x$. Dla takiego układu H jest całką pierwszą (por. Wykłady 6 i 9).

Jak łatwo zobaczyć, obraz fazowy wygląda jak na rysunku (12.2)



Rysunek 12.2: Obraz fazowy dla równania wahadła.

Punkt p jest stabilny w sensie Lapunowa, natomiast punkt q nie. Zbiór

$$W^s(q) = \{z \in S^1 \times R : \phi^t(z) \rightarrow q \text{ dla } t \rightarrow \infty\} = \bigcup_{t \geq 0} \phi^{-t}(W_\delta^s)$$

(patrz poprzedni Wykład) nazywamy *rozmaitością globalnie stabilną*. Podobnie definiuje się rozmaitość globalnie niestabilną. $W^s(q)$ (podobnie $W^u(q)$) składa się z q i dwóch trajektorii, tzw. *separatrys stabilnych*. Dla naszego przykładu separatrysty stabilne są równe separatrysom niestabilnym.

Jeżeli będziemy teraz zmieniać trochę siłę, w zależności od czasu, ale okresowo, powiedzmy z okresem 1, to obraz fazowy dla ϕ^n jest związany z następującym rysunkiem.

Rysunek 12.3: Tu będzie rysunek

$W^s(q)$ i $W^u(q)$ definiuje się dla $\phi = \phi^1$ tak jak wyżej, tylko ϕ^t zastępuje się przez ϕ^n . Teraz $W^s(q)$ i $W^u(q)$ mogą się przecinać transwersalnie (w punktach przecięcia mają różne kierunki styczne), są bowiem sumami trajektorii $\phi^n(z)$, ciągów punktów. (Trajektorie jako krzywe występują po zastąpieniu równania, równaniem autonomicznym w $S^1 \times R \times R/Z$. Ostatnie R to czas; jest podzielony przez Z z uwagi na okresowość zaburzenia siły.) Te punkty przecięcia $W^s(q) \cap W^u(q)$ nazywamy punktami *homoklinicznymi*. Są one przyczyną „chaosu”.

Twierdzenie 12.1 (KAM (Kołmogorow, Arnold, Moser)) Dla odpowiednio małych zaburzeń okresowych, z okresem 1, prawej strony równania $\ddot{x} = -\sin x$ (i ogólniej typowego równania hamiltonowskiego wokół centrum w R^2), takich, że ϕ^t zachowują miarę Lebesgue'a w R^2 , niezmiennicze dla ϕ^1 krzywe zamknięte mają dodatnią (w sumie) miarę Lebesgue'a (im bliżej p , tym procentowo większą, zbiegającą do 100%). W szczelinach mamy punkty okresowe, wokół których znowu istnieje wiele krzywych zamkniętych niezmienniczych. W szczelinach sytuacja się powtarza, itd. Punkt p jest stabilny w sensie Lapunowa.

Problem na XXII wiek:

Czy uzupełnienie zbioru tych krzywych niezmienniczych ma dodatnią miarę Lebesgue'a? Opisać „chaotyczne” zachowanie ϕ na tym uzupełnieniu.

Przy zaburzaniu znikające krzywe zamknięte niezmiennicze rozsypują się w niezmiennicze zbiory Cantora, najodporniejsze na to zjawisko są te, na których średni „obrót” ϕ (przed zaburzeniem), dokładniej „kąt obrotu” α , jest wolno aproksymowany przez liczby wymierne:

$$\forall_{p,q \in \mathbb{Z}} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^2}.$$

W wymiarze $2m$ powstają wokół punktu równowagi m -wymiarowe torusy niezmiennicze (z ruchem prawie okresowym, obrotki), po zaburzeniu wypełniają zbiór dodatniej miary. Ponieważ jednak nie rozcinają R^{2m} , nie zapewniają stabilności Lapunowa. Może nastąpić ucieczka od punktu równowagi. To zjawisko nazywamy *dyfuzją Arnolda*. Takie „niecałkowalne” układy powstają w mechanice, już w tzw. *problemie trzech ciał*.

Przejdźmy na chwilę do mechaniki, do prostszych przykładów:

Ruch ciała w polu sił centralnych

Rozważmy równanie różniczkowe:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{w } R^3,$$

gdzie $U: R^3 \setminus \{0\} \rightarrow R$, to gładka funkcja, zależna tylko od $r = |x|$, tzw. *potencjał*. Przestrzeń fazowa jest tutaj 6-wymiarowa:

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \in R^6$$

(W przypadku n ciał jest $6n$ -wymiarowa).

Definicja 12.1 *Iloczyn wektorowy:*

$$\vec{M} = [x, \dot{x}]$$

nazywa się momentem pędu

Twierdzenie 12.2 (Prawo zachowania momentu pędu) \vec{M} jest stały na trajektoriach.

Dowód

$$\frac{d}{dt}\vec{M} = [\dot{x}, \dot{x}] + [x, \ddot{x}] = 0 - [x, \frac{\partial U}{\partial x}] = 0,$$

ponieważ $\frac{\partial U}{\partial x}$ jest równoległe do x , gdyż jest to pole sił centralnych, zatem wektor

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \text{grad } U,$$

prostopadły do $\{U = \text{const}\}$, jest prostopadły do sfer $\{|x| = \text{const}\}$.

□

Uwaga

W biegunowym układzie współrzędnych $x = r \cdot \cos \phi$, $y = r \cdot \sin \phi$ mamy:

$$|\vec{M}| = \det(x, \dot{x}) = \det \begin{pmatrix} r \cos \phi & \dot{r} \cos \phi \\ r \sin \phi & \dot{r} \sin \phi \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} r \cos \phi & -r \sin \phi \cdot \dot{\phi} \\ r \sin \phi & r \cos \phi \cdot \dot{\phi} \end{pmatrix} = 0 + r^2 \dot{\phi}.$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że ruch odbywa się w płaszczyźnie (ozn. x, y), prostopadłej do wektora \vec{M} . Dalszy rachunek daje:

$$\ddot{r} - \dot{\phi}^2 r = -\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Mamy też, dla $M = |\vec{M}|$

$$\dot{\phi} = \frac{M}{r^2}.$$

Zatem

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{M^2}{r^3},$$

czyli

$$\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{dla} \quad V = U + \frac{M^2}{2r^2}.$$

Uwaga

$M = r^2 \dot{\phi}$ to prędkość polowa, zatem ruch w polu sił centralnych zachowuje prędkość polową (dla potencjału Newtona $U = -\frac{k}{r}$ fakt ten nazywany jest *II prawem Keplera*).

$V(r)$ nazywa się *efektywną energią potencjalną*. Dla równania

$$\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

mamy energię całkowitą (hamiltonian):

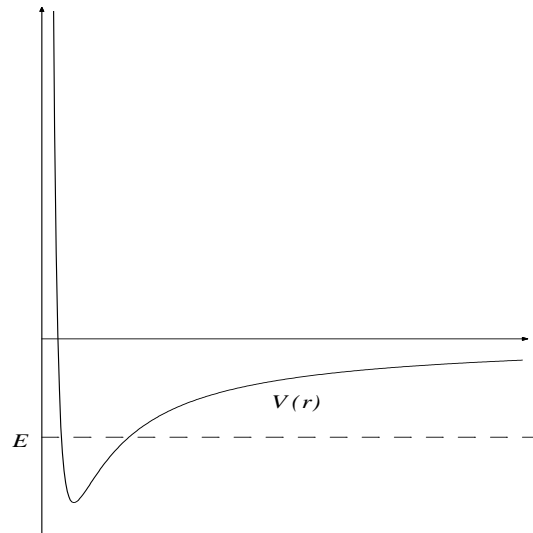
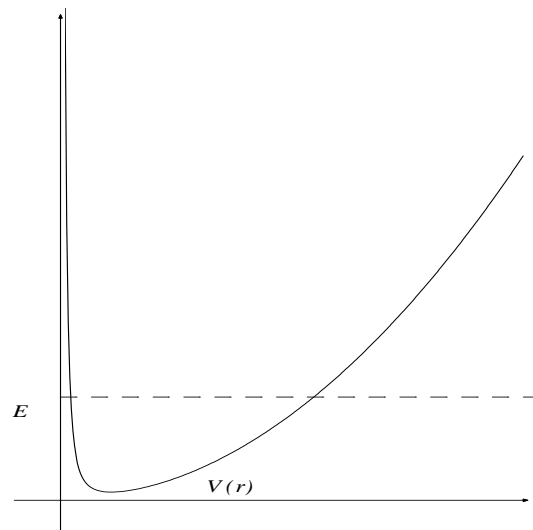
$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + V(r).$$

E jest kolejną (czwartą już) całką pierwszą (trzy były dane przez moment pędu).

Przy danym E , wzdłuż trajektorii mamy $V(r) \leq E$, co często ogranicza obszar r , z którego trajektoria nie może wyjść.

Dla $U = -\frac{k}{r^\alpha}$, ($0 < \alpha < 2$, $k > 0$) oraz $U = ar^\alpha$, ($\alpha > 0$, $a > 0$) istnieją minima potencjału V .

Twierdzenie 12.3 Dla potencjałów $U = -\frac{k}{r}$ i $U = ar^2$ istnieje piąta całka pierwsza. Wszystkie ograniczone orbity są zamknięte. Dla $U = -\frac{k}{r}$ są to elipsy.

Rysunek 12.4: $U(r) = -\frac{k}{r^\alpha}$ Rysunek 12.5: $U(r) = -ar^\alpha$ **Przykład (Równanie van der Pola)**

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y(1 - x^2) \end{cases}$$

lub równoważnie

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon \dot{x}(1 - x^2).$$

Dla $\varepsilon = 0$ punkt 0 jest centrum; mamy równanie oscylatora harmonicznego, istnieje całka pierwsza.

Dla $\varepsilon > 0$ punkt ten traci stabilność, jest źródłem (niestabilnym ogniskiem), bo część liniowa ma postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Można pokazać, że dla $\varepsilon > 0$ istnieje, blisko okręgu o promieniu 2, orbita (cykl) okresowa, przyciągająca (asymptotycznie stabilna).

Można rozpatrywać równanie

$$\ddot{x} = -x + \dot{x}(\varepsilon - x^2).$$

Dla $\varepsilon > 0$ powstaje ono z powyższego przez zmianę zmiennych $y = \sqrt{\varepsilon}x$. Orbita okresowa dla $\varepsilon \rightarrow 0$ dąży teraz do 0, jest blisko okręgu o promieniu $\sqrt{\varepsilon}$. Dla $\varepsilon = 0$ ta orbita „znika” w 0. Punkt 0 słabo przyciąga. Dla $\varepsilon < 0$ 0 przyciąga mocno (jest ogniskiem przyciągającym). Zjawisko to nazywa się *bifurkacją Hopfa*. Mówimy, że gdy ε przechodzi z liczb ujemnych do dodatnich, zachodzi w 0 *miękką utratę stabilności*. Trajektorie punktu blisko 0 nawijają się na orbitę okresową.

Łatwiejszym modelem dającym bifurkację Hopfa jest równanie:

$$\dot{z} = z(-i + \varepsilon - z\bar{z}).$$

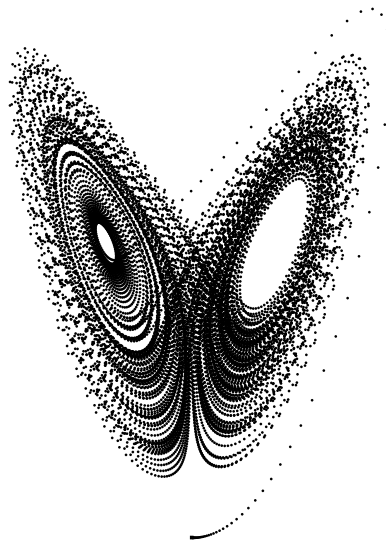
Tu orbita okresowa przyciągająca jest dokładnie okręgiem o promieniu $\sqrt{\varepsilon}$.

Czasem pojawia się bifurkacja o modelu

$$\dot{z} = z(-i + \varepsilon + z\bar{z}).$$

Wtedy dla $\varepsilon < 0$ 0 jest ogniskiem przyciągającym (okrąg o promieniu $\sqrt{\varepsilon}$ jest orbitą okresową odpychającą), ale dla $\varepsilon = 0$ punkt 0 odpycha. Trajektorie punktów blisko 0 uciekają od niego daleko; tak jest tym bardziej dla $\varepsilon > 0$. Mówimy, że mamy bifurkację Hopfa z *ostrą utratą stabilności*.

Przykład (Równanie Lorenza)



Rysunek 12.6: Atraktor Lorenza

Równanie to związane jest z ruchami atmosferycznymi, prognozą pogody.

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = -yz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

gdzie $a, b, r > 0$

$$DF(0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Zmieniamy parametr r . Gdy $r < 1$ punkt 0 jest ściekiem. Gdy $r > 1$ punkt 0 staje się punktem hiperbolicznym. Powstają dwa nowe ścieki p_1, p_2 do których zbiegają separatoryjne niestabilne zera. Gdy r przechodzi przez pewną wartość r_h , w p_1 i p_2 występuje ostra utrata stabilności, bifurkacja Hopfa w pewnych 2-wymiarowych powierzchniach zawierających p_1 i p_2 .

Trajektorie uciekające od p_i dążą do pewnego „dziwnego atraktora”, zwanego atraktorem Lorenza (Ten atraktor powstaje już dla r mniejszych, po przejściu r przez pewną wartość r_a). Czytelnik znajdzie szczegóły w pięknej książce C. Robinson „Dynamical Systems” CRC Press, 2nd edition 1999.

Dodatek A

RRZ, egzamin pisemny, maj 2000.

A. Zadania

1. Ciało ostygło w ciągu 10 min. z temperatury 100° do 60° . Temperatura otoczenia utrzymuje się na poziomie 20° . Po jakim czasie ciało ostygnie do temperatury 25° ? (Należy przyjąć, że szybkość stygnięcia jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur ciała i otoczenia.)

2. Znaleźć rozwiązanie ogólne (dla $x > 0$) r.r. Riccatiego

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0.$$

(Wsk.: Zgadnąć najpierw jedno rozwiązanie.)

3. Znaleźć rozwiązanie ogólne (rzeczywiste)

$$y^{(4)} - y = 0.$$

4. Sprawdzić czy równanie poniżej jest równaniem dla różniczki zupełnej. Jeśli tak, to znaleźć całkę pierwszą, jeśli nie, to znaleźć czynnik całkujący.

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$$

B. Pytania

1. Dla jakich warunków początkowych krzywe całkowite równania w zadaniu A3. zbiegają do 0, a dla jakich uciekają do ∞ ? Czy 0 jest stabilne w sensie Lapunowa?
2. Proszę podać przykład r.r. $y' = f(y)$, $y \in \mathbb{R}$, f wielomian, takiego, żeby wszystkie rozwiązania wysycone $y(x)$ miały dziedziny ograniczone z prawej strony i nieograniczone z lewej (tzn. były postaci $(-\infty, a)$, gdzie $a < \infty$, zależy od trajektorii).
3. Czy dla r.r. $dy/dx = -x/y$ istnieje rozwiązanie $y(x)$ takie, że $y(0) = -1$, $y(\sqrt{1/2}) = \sqrt{1/2}$? Czy dla równania $x dx + y dy = 0$ istnieje krzywa całkowita łącząca punkty $(0, -1)$ i $(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$?

C. Pytania z teorii

1. Naszkicować dowód twierdzenia Peano o istnieniu rozwiązań równania różniczkowego, za pomocą łamanych Eulera.
2. Naszkicować dowód twierdzenie Liouville'a (o zachowywaniu miary Lebesgue'a przez potok fazowy r.r. z dywergencją 0).
3. Co to węzeł, ognisko (stabilne i niestabilne), centrum, siodło. Podać odpowiednie przykłady r.r. liniowych w R^2 . Dla których z nich 0 jest stabilne w sensie Lapunowa, dla których asymptotycznie?

RRZ, egzamin pisemny, wrzesień 2000.**A. Zadania**

1. Kawałek metalu o temperaturze a został umieszczony w piecu, którego temperatura w ciągu godziny równomiernie podnosi się od a do b stopni. Zakładamy, że przy różnicy temperatur pieca i metalu równej T , metal nagrzewa się z szybkością kT stopni na minutę. Jaka będzie temperatura metalu po upływie 1 godziny?
2. Znaleźć czynnik całkujący i całkę pierwszą równania

$$\left(\frac{y}{x} - 1\right)dx + \left(\frac{y}{x} + 1\right)dy = 0.$$

3. Podać rozwiązanie ogólne układu równań

$$x' = 2x - y - z$$

$$y' = 2x - y - 2z$$

$$z' = -x + y + 2z.$$

$$(\lambda_{1,2,3} = 1)$$

Napisać rozwiązanie z warunkiem początkowym $x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 0$.

B. Teoria

1. Jakie funkcje mogą się pojawić jako rozwiązania rrr, liniowego, jednorodnego, ze stałymi rzeczywistymi współczynnikami, rzędu n ? Naszkicować dowód. Jakie są konieczne i dostateczne warunki dla stabilności asymptotycznej w punkcie 0, a jakie dla stabilności Lapunowa?
2. Co to jest hamiltonowski układ rrr? Podać przykład z mechaniki klasycznej. Pokazać, że potok hamiltonowskiego pola wektorowego zachowuje miarę Lebesgue'a (sformułować i wykorzystać Tw. Liouville'a). Pokazać, że hamiltonian jest stały na trajektoriach.

3. Dla każdego z poniższych warunków podaj przykład autonomicznego rrrz $x' = f(x)$, $x(t) \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja ciągła, które ten warunek spełnia:
- a) wszystkie rozwiązania $x(t)$ mają ograniczone dziedziny;
 - b) wszystkie rozwiązania wysyczone mają dziedziny ograniczone z prawej strony i nieograniczone z lewej;
 - c) nie ma jednoznaczności rozwiązań w punkcie $x = 0$.

Czy możliwe jest spełnienie własności jednoznaczności rozwiązań dla każdego warunku początkowego i jednocześnie brak ciągłej zależności rozwiązań od warunku początkowego w jakimś punkcie x ? Podaj przykład lub udowodnij, że to nie jest możliwe.