RRZJ 2005, egzamin, zadania i wskazówki

1. Czy równania różniczkowe poniżej mają orbity okresowe? Ile? Uzasadnić. Zbadać stabilność Lapunowa punktów stałych. Jaki jest w nich indeks ?

a)

$$\begin{cases} x' = x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = y(1 - x - y) \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x' = y - (x^5 - x) \\ y' = -\varepsilon x \end{cases} \qquad \text{dla} \ \ \varepsilon > 0$$

Jaka jest granica orbit okresowych gdy $\varepsilon \searrow 0$?

2. Co to jest indeks pola wektorowego w izolowanym zerze ? Sformułować Tw. Poincaré'go-Hopfa. Jaki jest indeks pola wektorowego w zerze hiperbolicznym, o wymiarach przestrzeni stabilnej i niestabilnej odpowiednio s i u ?

3. Narysować portret fazowy potoku równania (pola X)

$$\begin{cases} x' = y - y^3 \\ y' = x - x^3 \end{cases}$$

Ile jest orbit okresowych?

Czy potok dla pola prostopadłego do X, z zerami w zerach pola X, ma orbity okresowe?

Czy istnieją orbity okresowe jeśli do pola X dodamy pole $-y\frac{\partial}{\partial y}$?

4. Policzyć postać normalną Poincaré'go, z dokładnością do $O(||(x,y)||^3)$, dla pola wektorowego na płaszczyźnie, z częścią liniową $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Zbadać portret fazowy, opisać bifurkację, równania

$$z' = \varepsilon e^{i\alpha} z - z|z|^2 + \overline{z}^4$$

gdy ustalone jest $\alpha \neq 0$, a ε przechodzi przez 0.

Jak zmienia się portret fazowy gdy ustalone jest $\varepsilon > 0$, a zmienia się $\alpha \in [0, 2\pi]$?

6. Narysować portret fazowy blisko 0, równania

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = x + y + x^4 \end{cases}$$

Jaka jest (w przybliżeniu) rozmaitość centralna? Czy jest jednoznaczna? Czy 0 jest stabilne w sensie Lapunowa?

Wskazówki

5. Bez składnika $\overline{z}^4$ otrzymujemy, np po przemnożeniu równania przez $\bar{z}$ i dodania równania sprzężonego, i po podstawieniu $I = z\bar{z}/2$,

$$I' = \epsilon(\cos\alpha)I - I^2,$$

orbitę okresową przyciągającą (wszystko oprócz punktu $z = 0$) zdefiniowaną przez $I = \epsilon\cos\alpha$, o ile to ostatnie wyrażenie ma dodatni znak.

Dodanie $\overline{z}^4$ nie zmienia tego obrazu. Można to zobaczyć zmieniając współrzędne jak w równaniu van der Pola: $z = \epsilon^{1/2}w$ i dzieląc czas przez ϵ, o ile $\epsilon > 0$.

Otrzymujemy dla $I = w\bar{w}/2$ i $\phi = \mathrm{Arg} w$,

$$I' = I(\cos\alpha - I) + \epsilon^{1/2}\cos 5\phi.$$

Przekształcenie Poincaré'go P powrotu np. do półosi $x > 0$ dla równania bez ostatniego składnika, ma punkt stały $I_0 = \cos\alpha$ i $P'(I_0) \neq 0$. Zatem dodanie ostatniego składnika, małego, z małą pochodną dla ϵ bliskiego 0 daje nadal dla przekształcenia Poincaré'go tylko jedno zero bliskie poprzedniego.

6. Dla hiperbolicznego zera pola $V : R^m = R^s \oplus R^u \to R^m$ w $0 \in R^m$, przekształcenie $\Phi : S^{m-1} \to S^{m-1}$ zadane wzorem $\Phi(x) = V(x/1000)/||V(x/1000)||$ jest 1-1 i dla każdego x mamy $\mathrm{sgn}\det D\Phi(x) = \mathrm{sgn}\det DV(x/1000) = (-1)^s$. Wynika to z tego, że orientacja na S^{m-1} jest indukowana orientacją na R^m i z tego, ze można rozpatrywać macierz $DV(x/1000)$ postaci diagonalnej, s liczb -1 i u liczb 1 na przekątnej. (Na R^s mamy Φ przekształcenie antypodyczne, a na R^u identyczność.)