JTRRZ, F. Przytycki, styczeń 2006, zadania

Stabilność

1. [Wiggins, str 197, 239] Znaleźć (w przybliżeniu) rozmaitość centralną. Zbadać stabilność (asymptotyczną, Lapunowa), dla układu:

a)

$$\begin{cases} x' = x^2 y, \\ y' = -y + x^2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Wsk. $E^c = \{y = 0\}, E^s = \{x = 0\}$. Szukamy W^c jako wykres $h : E^c \to E^s$. Podstawiamy w (1.1) $y = h(x)$. Otrzymane równanie w 3-jetach rozwiązujemy w 3-jetach, tzn. $h(x) = ax^2 + bx^3 + O(x^4)$. Otrzymujemy $h(x) = x^4 + O(x^5)$.

b)

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + y + x^2 y, \\ y' = x + 2y + y^2 \end{cases}$$

2. [Arnold, str162] Jaki jest portret fazowy równania $z' = az - z|z|^2 + \overline{z}^4$ dla $a = \varepsilon e^{i\phi}$ dla $\varepsilon > 0$ i $\phi \in [0, 2\pi]$?

Orbity okresowe

1. [Sotomayor] Pokazać, że

$$x' = x(2 - x^4 - y^4), \quad y' = y(1 - y^2 - x^2)$$

nie ma orbit okresowych.

2. Pokazać, że jeśli X to pole wektorowe klasy C^1 na płaszczyźnie i $x \in \omega(x)$ nie jest zerem pola, to $\omega(x)$ jest orbitą okresową. Czy to jest prawda dla pól na torusie?

3. Pokazać,że dla konserwatywnego równania Lotki-Volterry (drapieżnik y - ofiara x), dla stałych $a, b, c, d > 0$

$$x' = x(a - by), \quad y' = y(-c + dx) \tag{3.1}$$

pierwsza ćwiartka płaszczyzny jest wypełniona przez trajektorie okresowe wokół punktu stałego.

Wsk. Istnieje całka pierwsza $x^c e^{-dx} y^a e^{-by}$. (Można do niej dojść dodając pewną kombinację liniową równań (3.1) do pewnej kombinacji liniowej tych równań podzielonych odpowiedni przez x, y, oraz calkując [Palczewski, Ro. 12.2].

4. [Palczewski] Pokazać, że dla ogólnego niekonserwatywnego modelu układu drapieżnik-ofiara

$$x' = xM(x, y), \quad y' = yN(x, y) \tag{4.1}$$

Załóżmy, że funkcje rzeczywiste M, N spełniają dla pewnych dodatnich stałych A, B warunki

(i) $N(x, y) < 0$ dla $x < B$, $\partial N/\partial x > 0$

(ii) $M(0, 0) > 0$, $M(x, y) < 0$ dla $x > A$, $\partial M/\partial y < 0$

oraz

(iii) Krzywe $M^{-1}(0)$ i $N^{-1}(0)$ przecinają się transwersalnie,

(iv) Istnieje punkt $(a, b), a > 0, b > 0$ taki, że $M(a, b) > 0, N(a, b) > 0$

Udowodnić, że układ (4.1) ma w I ćwiartce płaszczyny punkt stały asymptotycznie stabilny, lub cykl graniczny.

(Wsk. Wziąć (a, b) z dużym a i prześledzić trajektorię (analogicznie jak w równaniu Lienarda).

5. Niech $\phi(t, z_0)$ będzie orbitą okresową potoku hamiltonowskiego na płaszczyźnie, okresu $T(z_0) > 0$, z warunkim początkowym $\phi(0) = z_0$, dla pola wektorowego F_H dla hamiltonianu H. Niech $G(z, \varepsilon)$ dla ε blisko 0 i z blisko z_0, będzie polem wektorowym (na otoczeniu $\phi(t)$) takim, że jeśli zdefiniujemy

$$A(z) := \int_0^{T(z)} dH\,(G(\phi(t, z), 0))dt$$

to $A(z_0) = 0$ i dla z w kierunku normalnym do orbity $\phi(t, z_0)$ mamy $\partial A(z)/\partial z \neq 0$ w punkcie $z = z_0$. Pokazać, że wtedy dla odpowiednio małych ε równanie $z' = F_H + \varepsilon G(\cdot, \varepsilon)$ ma orbitę okresową.

6. Jaki jest portret fazowy potoku dla równania Duffinga

$$x' = y, \quad y' = x - x^3 - \delta y$$

dla $\delta = 0$? Dla $\delta > 0$?

Potoki na powierzchniach, hiperboliczność, separatrysy, topologiczna równoważność.

1. Pokazać, że dla układów równań postaci

$$x' = f(x), \quad y' = yg(x),$$

gdzie $f(x) = 1 - x^2$, $g(-1) = a < 0, g(1) = b > 0$, $dg/dx > 0$, niezmienikiem topologicznego sprzężenia zachowującego czas jest liczba a/b. Pokazać, że każde dwa takie układy są topologicznie równoważne (bez zachowania czasu). Pokazać, że dla $a \neq b$ topologiczne sprzężenie nie jest lipschitzowsko ciągłe. Czy jest ciągłe w sensie Höldera?

2. Pokazać, że dla typowych w C^r-topologii (tzn zbioru gęstego, G_δ) dyfeomorfizmów klasy C^r rozmaitości zwartej wszystkie punkty stałe są hiperboliczne.

3. Czy istnieje na powierzchni zwartej orientowalnej genusu g pole klasy C^1, które ma g zbiorów minimalnych, różnych od orbit zamkniętych i punktów stałych ? (Wsk. Tak. Wykorzystaj przykład Denjoy'a na torusie.

Postać normalna. Bifurkacje.

1. Jaka jest postać normalna 2-jetów pól wektorowych na płaszczyźnie, z częścią liniową

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zbadać 2-parametrową deformację Takensa-Bogdanova

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + x^2 + xy \end{cases}$$

z parametrami $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Punkty stałe, ich bifurkacje itd.

Wsk. Dla $\varepsilon_2^2 - 4\varepsilon_1 < 0$ nie ma pkt stałych. Dla $\varepsilon_2^2 - 4\varepsilon_1 > 0$ mamy dwa punkty stałe, jeden jest siodłem, drugi węzłem lub ogniskiem, może w nim zajść bifurkacja Hopfa (ostra utrata stabilności) . Dla pewnej krzywej w płaszczyźnie parametrów $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, w III ćwiartce płaszczyzny istnieje homokliniczna trajektoria.

Bibliografia

[Arnold] W. I. Arnold "Teoria Równań Różniczkowych" PWN 1983.

[Palczewski] A. Palczewski "Równania Różniczkowe zwyczajne" WNT Warszawa, 1999.

[Sotomayor] J. Sotomayor "Liçóes de equaçóes differenciais ordinárias" IMPA, 1979.

[Wiggins] S. Wiggins "Introduction to Applied Dynamical Systems and Chaos", Springer 1990.