Zbiory Julii, wymiary – metody formalizmu termodynamicznego

Wykład im. Profesora Orlicza, Poznań

Feliks Przytycki

December 2014

1. Stany równowagi

Lemat (Skończona zasada wariacyjna)

Rozważmy dowolne liczby $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \mathbb{R}$. *Istnieje dokładnie jeden układ liczb nieujemnych* $a_j, j = 1, \ldots, k$ *taki, że* $\sum a_j = 1$ *oraz* $-\sum_j a_j \log a_j + \sum_j a_j \phi_j$ *osiąga maksimum.*

Faktycznie, powyższa entropia + –średnia energia, jest równa

$$\sum_j a_j \log \frac{\exp \phi_j}{a_j} \leqslant \log \sum_j \frac{a_j \exp \phi_j}{a_j} = \log \sum_j \exp \phi_j := P(\phi).$$

Równość ma miejsce dokładnie wtedy, gdy wszystkie wyrażenia $\frac{\exp \phi_j}{a_j}$ są sobie równe, dokładniej, dla $j = 1, \ldots, k$ mamy $a_j = C \exp \phi_j$, gdzie $C{=}1/\sum_{i=1,\ldots,k} \exp \phi_i$.
Mówi się, że przy ustalonym C, stan równowagi maksymalizuje entropię, a mając ustaloną entropię, stan równowagi minimalizuje średnią energię $\sum_j a_j(-\phi_j)$, dla potencjału (lokalnej energii) $-\phi_j$.
D. Ruelle (?) nazwał P ciśnieniem, fizycy wolną energią.
Bada się potencjał $-\beta\phi$, gdzie $1/\beta = T$ temperatura.

2. Model Isinga

Niech $K = \{-1, 1\}$. Na przestrzeni konfiguracji spinów $\Omega := K^{\mathbb{Z}^2}$ działa grupa $\mathbb{Z}^2$.
Niech lokalna energia dla konfiguracji ω będzie zdefiniowana przez

$$-\phi(\omega) := -\beta(-\mathcal{P}_0(\omega_0) + \sum_{i=1,2} (\mathcal{P}_1(\omega_0, \omega_{e_i}) + \mathcal{P}_1(\omega_0, \omega_{-e_i}))),$$

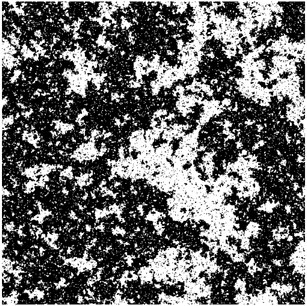
gdzie e_i to wersory, a potencjały zasięgu 0 i 1 to $\mathcal{P}_0 = B$ stała (zewnętrzne pole magnetyczne) i $\mathcal{P}_1(a, b) = ab$.
Warto zauważyć, że ϕ jest $\mathbb{Z}^2$-niezmiennicza, tzn. $\phi(\omega) = \phi(\omega \circ (+y))$, dokładniej: ϕ nie zmienia się jeśli konfigurację $\mathbb{Z}^2 \ni x \to \omega(x)$ zastępujemy konfiguracją $\omega(x + y)$ dla dowolnie ustalonego punktu $y \in \mathbb{Z}^2$.

Definiujemy formalny Hamiltonian

$$\mathcal{H}(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \phi(\omega + x)$$

Rozkład prawdopodobieństwa $\exp \mathcal{H}(\omega)$, jak w Lemacie Podstawowym, nie ma sensu z uwagi na rozbieżność $\mathcal{H}$. Robimy więc następująco: Dla ustalonego skończonego zbioru $\Lambda_n\{(i,j) : |i| \leqslant n, |j| \leqslant n\}$ warunkowy Hamiltonian $\mathcal{H}(\omega|_{\Lambda_n} \Big| \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda_n)$ gdzie przy sumowaniu bierzemy konfiguracje ω ustalone poza Λ_n (tzw. warunek brzegowy!). Otrzymujemy rozkład prawdopodobieństwa na konfiguracjach spinów nad Λ_n wg $\exp \mathcal{H}(\omega|_{\Lambda_n} \Big| \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda_n)$, a dla $n \to \infty$ graniczny rozkład prawdopodobieństwa Gibbsa. Czynnik normalizujący to suma po wszystkich konfiguracjach ω nad Λ_n, tzw *suma statystyczna*.

Jeśli weźmiemy potencjał ϕ dla $B = 0$ i β dostatecznie dużym (niskiej temperaturze $T = 1/\beta$) i wszędzie $+$ na $\mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda_n$, to przy minimalnej średniej energii na Λ_n będą dominować plusy (spin up). Podobnie minusy przy - na zewnątrz (spin down). Mamy więc dwa stany równowagi, **przejście fazowe** przy B zmieniającym znak. To jest tzw. ferromagnetyk Isinga preferujący zgodne spiny (bez minusa w definicji lokalnej energii, byłby tzw antyferromagnetyk).



Typowa konfiguracja. Czarny kolor to plusy, biały: minusy

3. Przekształcenia rozciągające – expandingi.

Istnienie stanów równowagi stosuje się dla $\mathbb{Z}$, czyli kraty 1-wymiarowej. Wtedy na przestrzeni ciągów $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ działa grupa $\mathbb{Z}$, generowana przez przesunięcie w lewo: $\sigma((x_j))_n = x_{n+1}$. Celowe jest rozpatrywanie przesunięcia w lewo tylko na przestrzeni ciągów jednostronnych $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^+}$.

Jeśli $f: K \to K$ jest przekształceniem otwartym i rozciągającym (expandingiem) na przestrzeni metrycznej zwartej K, tzn. istnieją $a > 0, \lambda > 1$ takie, że jeśli $\rho(x,y) < a$ to $\rho(f(x), f(y)) \geqslant \lambda\rho(x,y)$, to można przestrzeń podzielić na d komórek i je ponumerować K_j, i rozważać kodowanie $x \mapsto (j_n)$, tak, że $f^n(x) \in K_{j_n}$. Wtedy (f, K) niewiele się różni od σ oznaczającego przesunięcie w lewo na przestrzeni ciągów, przy czym dopuszczalność kolejnych j_n, j_{n+1} jest równoważna temu, czy w odpowiedniej $d \times d$ macierzy M zero-jedynkowej mamy $M_{j_n, j_{n+1}} = 1$ (topologiczny łańcuch Markowa).

Czasem zbiór z przekształceniem rozciągającym nazywa się *zbiorem hiperbolicznym*.

Twierdzenie (klasyczne: Sinai, Ruelle, Bowen)

Jeśli $f : K \to K$ jest rozciągające i topologicznie tranzytywne, i $\phi : K \to \mathbb{R}$ jest ciągłe Höldera, to istnieje miara probabilistyczna Gibbsa,

$$C < \frac{\mu_\phi(g_x^n(B(f^n(x), r_0))}{\exp(S_n\phi(x) - nP(\phi))} < C^{-1} \qquad (1)$$

gdzie $S_n\phi(x) := \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x))$, a g_x^n oznacza gałąź f^{-n} taką, że $g_x^n(B(f^n(x), r_0)$ zawiera x.
Istnieje dokładnie jedna taka miara niezmiennicza i jedna miara konforemna tzn z Jakobianem $\exp -(\phi - P)$.

Na przestrzeni $\{1, , ..., d\}^{\mathbb{Z}^+}$, σ^{-1} to przesunięcie w prawo, a każda gałąź g to dopisanie z lewej strony ustalonego symbolu.

Liczba $\exp nP$ odpowiada sumie statystycznej nad Λ_n w modelu Isinga. Dla każdego $x_0 \in K$ zachodzi:

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x \in f^{-n}(x_0)} \exp S_n(\phi)(x).$$

W wymiarze 1 ($K \subset \mathbb{R}$ lub $K \subset \widehat{\mathbb{C}}$ i f holomorficzne) rozważa się potencjał geometryczny $\phi = -\beta \log |f'|$. Wtedy (ograniczona dystorsja)

$$\mu_\phi(g_x^n(B(f^n(x), r_0)) \approx \exp(S_n\phi(x) - nP) \approx$$
$$\mathrm{diam}(g_x^n(B(f^n(x), r_0)))^\beta \exp -nP. \tag{2}$$

Wniosek: Jeśli dla danego β ciśnienie $P = P(\beta) = 0$ to wymiar Hausdorffa $HD(K) = \beta$ (Lemat Frostmana). Miara μ, dla której dla małych kul U mamy $\mu(U) = (\mathrm{diam} U)^\beta$ nazywa się miarą geometryczną.

Bez założenia jednostajnego rozciągania, tylko przy $\chi(\mu) > 0$, mamy z Twierdzenia Shennona-McMillana-Breimana, dla μ-prawie wszystkich x

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(g_x^n(B(f^n(x), r_0)) = h_\mu(f)$$

i

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathrm{diam}(g_x^n(B(f^n(x), r_0)) = \chi(\mu)$$

zatem $HD(\mu) = \frac{h_\mu(f)}{\chi(\mu)}$.

Przypomnienie definicji. Entropia

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{A}} h_\mu(f, \mathcal{A}) = \sup_{\mathcal{A}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^n)$$

gdzie $\mathcal{A}$ oznacza skończone rozbicie przestrzeni na zbiory mierzalne, $\mathcal{A}^n$ to rozbicie na wszystkie przecięcia zbiorów rodzin $f^{-j}\mathcal{A}, j = 0, 1, ..., n-1$. Definiujemy $H(\mathcal{B}) = -\sum_{b\in\mathcal{B}} \mu(b) \log \mu(b)$ jak w pierwszym Lemacie. Tę sumę można napisać w formie całki funkcji informacji $\int -\log \mu(b(x))\, d\mu(x)$. Zatem $h_\mu(f, \mathcal{A})$ jest granicą ciągu całek $\int -\frac{1}{n} \log \mu(a_n(x))\, d\mu(x)$, gdzie $a_n(x) \in \mathcal{A}^n$ i $a_n(x) \ni x$. Można jednak najpierw przejść do granicy definiując lokalną entropię

$$h_\mu(x, \mathcal{A}) := \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(a_n(x))$$

a potem scałkować. Lokalna entropia (granica) istnieje prawie wszędzie i obie definicje są równe. To Twierdzenie Shennona-McMillana-Breimana.

Wymiar Hausdorffa

Dla K zbioru metrycznego zwartego i jego dowolnego podzbioru X s-ta miara Hausdorffa (zewnętrzna) jest zdefiniowana jako

$$H^s(X) := \lim_{\epsilon \to 0} \inf_{\mathcal{U}} \sum_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{diam}(U)^s$$

gdzie $\mathcal{U}$ to pokrycie X zbiorami o średnicy $\leqslant \epsilon$. Wymiar Hausdorffa jest definiowany przez

$$HD(X) = \inf\{s : H^s(X) = 0\} = \sup\{s : H^s(X) = \infty\}.$$

4. Zastosowanie

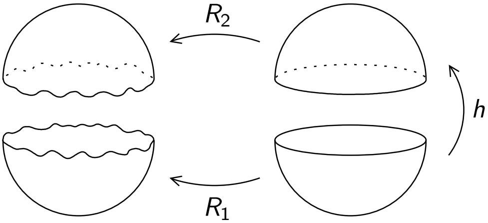
Dla $f_c(z) = z^2 + c$ dla $c \approx 0$ blisko S^1 istnieje niezmiennicza krzywa Jordana J_c.

Twierdzenie (Bowen)

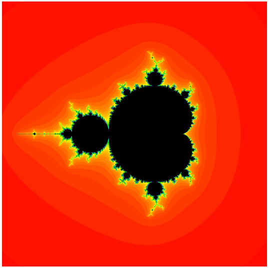
Jeśli $c \neq 0$, to wymiar Hausdorffa $HD(J_c) > 1$ (tzn. J_c jest krzywą fraktalną).

Dowód: Jeśli $P(t) = 0$ to istnieje konforemna miara Gibbsa μ_t, równoważna mierze Hausdorffa w wymiarze t, zatem jeśli $t > 1$ to $HD(J) = t > 1$. W przeciwnym razie $t = 1$ więc miara Hausdorffa w wymiarze 1 jest skończona więc J jest prostowalna. Z Twierdzenia Rieszów przekształcenia Riemanna R_1, R_2 wewnętrzne i zewnętrzne i ich odwrotne są bezwzględnie ciągłe.

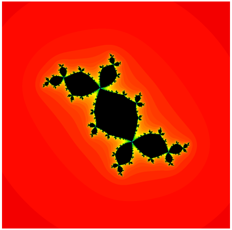
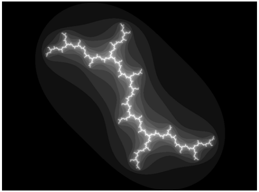
Zatem $h = R_2^{-1} \circ R_1$ jest bezwzględnia ciągłe. Łatwo pokazać, że $g_i := R_i^{-1} \circ f \circ R_i, i = 1, 2$ na S^1 zachowują miarę długości L (o ile R_i przeprowadza punkty stałe dla f na, odpowiednio, $0, \infty$. Ponieważ $h_*(L)$ jest równoważne L i obie miary są ergodyczne, są równe. Zatem h jest obrotem !!! (korzystamy z jednoznaczności niezmienniczej miary ergodycznej (jak w dowodzie słynnego Twierdzenia Mostowa). Zastępując R_2 przez $R_2 \circ h$ otrzymujemy $R_1 = R_2$ na S^1, więc ich zlepienie jest homografią, więc J_c jest okręgiem.



Dla c dalekiego od 0 następują samosklejenia J_c. Zbiór J_c to tzw zbiór Julii. Ogólnie: dla wielomianu zbiór Julii to brzeg basenu ∞. Dla funkcji wymiernej f zbiór Julii $J(f)$ to uzupełnienie dziedziny normalności iteracji f. Definicja: x należy do dziedziny normalności, jeśli istnieje otoczenie $U \ni x$ takie, że dla każdego zwartego $X \subset U$ rodzina $f^n|_X$ jest pre-zwarta.



Dla $|c|$ dostatecznie dużego zbiór Julii staje się niespójny (wtedy automatycznie jest zbiorem Cantora). Na tym rysunku czarny zbiór, to słynny zbiór Mandelbrota $M = \{c : J_c \text{ jest spójny}\}$. Jest on spójny, jednak nie wiadomo, czy jest lokalnie spójny.

Z lewej strony czarny zbiór to "królik" Douady'ego. Brzeg tego zbioru to zbiór Julii dla c w górnym odnóżu kardioidy. Mamy orbitę przyciągającą okresu 3. J_c jest hiperboliczny. Jeśli c przesuwa się do końca prawej strony tego odnóża, dokładnie $c = i$, to J_c jest "zagłodzonym królikiem", prawy rysunek.

5. Spektrum Lapunowa

Niech $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ będzie funkcją wymierną sfery Riemanna w siebie, stopnia > 1.

$$\mathcal{L}(\alpha) := \{x \in J(f) \colon \chi(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)| = \alpha\}$$

Spektrum wymiarów dla wykładników Lapunowa, to funkcja

$$\alpha \mapsto HD(\mathcal{L}(\alpha)).$$

To dotyczy punktów x regularnych, to znaczy takich dla których wykładniki Lapunowa istnieją. (Uwaga: Z Tw. Ergodycznego Birkhoffa dla μ miary ergodycznej probablistycznej f-niezmienniczej $\int \log |f'| \, d\mu = \chi(x)$ dla μ-p.w. x.)

Można liczyć (szacować) wymiary Hausdorffa zbiorów punktów nieregularnych

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta) := \left\{x \in J(f) \colon \underline{\chi}(x) = \alpha, \, \overline{\chi}(x) = \beta\right\}, \quad \alpha < \beta$$

Dla f obciętego do zbioru Julii i $t \in \mathbb{R}$ wprowadźmy jak przedtem potencjał geometryczny

$$\varphi_t(x) := -t \log |f'(x)|. \tag{3}$$

Zdefiniujmy ciśnienie wariacyjnie (tzn poprzez zasadę wariacyjną):

$$P(t) = P_{\mathrm{var}}(\varphi_t) := \max_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \left(h_\mu(f) + \int_\Lambda \varphi_t \, d\mu \right)$$

$$= \max_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \Big(h_\mu(f) - t\chi(\mu) \Big). \tag{4}$$

$\mathcal{M}(f)$ oznacza zbiór f-niezmienniczych miar probabilistycznych na $J(f)$. Jeśli $f|_{J(f)}$ jest expandingiem to istnieje w $\mathcal{M}(f)$ dokładnie jedna miara realizująca maximum, t.j. stan równowagi. Ma własność Gibbsa. Ogólnie miara Gibbsa, a nawet stan równowagi, może nieistnieć, bo w punktach krytycznych f funkcja φ_t jest nieskończona dla $t > 0$.

Funkcja $t \mapsto P(t)$ jest wypukła jako maksimum funkcji wypukłych (nawet afinicznych) Aff_μ

$$t \mapsto h_\mu(f) - t\,\chi(\mu).$$

Jest monotoniczna malejąca, bo dla każdej miary $\mu \in \mathcal{M}(f)$ mamy $\chi \geqslant 0$, [P].

Niech

$$\chi_{\inf} := \inf\{\chi(\mu) \colon \mu \in \mathcal{M}\}, \quad \chi_{\sup} := \sup\{\chi(\mu) \colon \mu \in \mathcal{M}\}. \quad (5)$$

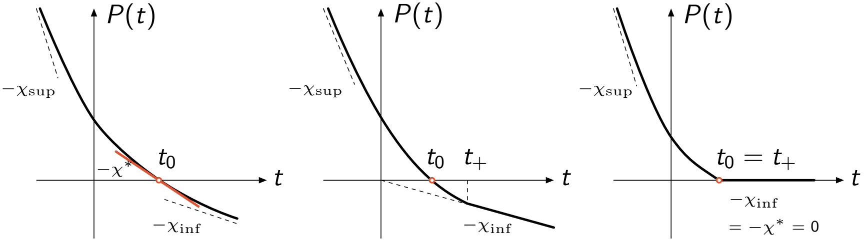
Klasa funkcji f takich, że $\chi_{\inf} > 0$ jest szczególnie ważna, ta własnośćnazywa się Hiperbolicznością Lyapunowa (LyapHyp) lub niejednostajną hiperbolicznością. Istnieje szereg własności równoważnych [P, Rivera-Letelier, Smirnov: Invent math, 2003].
Z definicji łatwo wynika

$$\chi_{\inf} = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} P_{\mathrm{var}}(\varphi_t), \quad \chi_{\sup} = \lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{t} P_{\mathrm{var}}(\varphi_t).$$

Dla dowolnej liczby $\alpha > 0$ zdefiniujmy

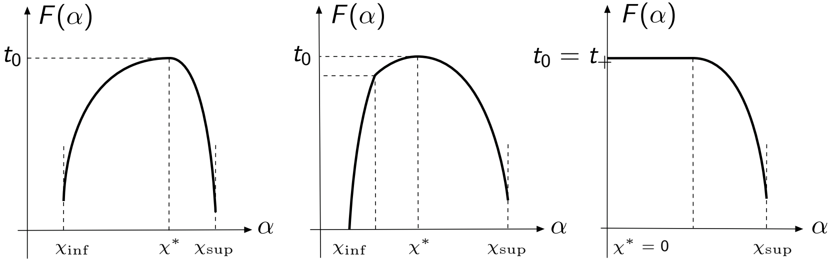
$$F(\alpha) := \frac{1}{\alpha} \inf_{t\in\mathbb{R}} (P(t) + \alpha t) . \quad (6)$$

i $F(0) = \lim_{\alpha\searrow 0} F(\alpha)$.
Wtedy $\alpha \mapsto \inf_t (P(t) + \alpha t)$ jest transformatą typu Legendre'a $P(t)$, dokładniej $\alpha \mapsto -\inf_t (P(t) - \alpha t)$ jest transformatą Legendre'a L funkcji $P(t)$ i $F(\alpha) = -L(-\alpha)$.



Ciśnienie geometryczne: LyapHyp i $t_+ = \infty$, LyapHyp i $t_+ < \infty$, oraz nie-LyapHyp. W t_+ jest przejście fazowe. $t_0 = HD_{\text{hyp}}(J(f))$.

$HD_{\text{hyp}}(J(f))$ wymiar hiperboliczny jest definiowany jako supremum wymiarów Hausdorffa f-niezmienniczych hiperbolicznych podzbiorów $J(f)$.



$F(\alpha)$: LyapHyp i $t_+ = \infty$, LyapHyp i $t_+ < \infty$, oraz nie-LyapHyp

Twierdzenie (Gelfert, P, Rams)

Niech $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ *będzie niewyjątkową funkcją wymierną stopnia* $\geqslant 2$. *Wtedy dla każdych* $\alpha \leqslant \beta \leqslant \chi_{\sup}$ *dla* $\beta > 0$, *i dodatkowo przy założeniu* $\alpha > 0$ *jeśli* $\chi_{\inf} = 0$, *zachodzi*

$$\min\{F(\alpha), F(\beta)\} \leqslant HD\mathcal{L}(\alpha, \beta) \leqslant \max\left\{0, \max_{\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta} F(q)\right\}. \tag{7}$$

W szczególności, dla dowolnej liczby $\alpha \in [\chi_{\inf}, \chi_{\sup}] \setminus \{0\}$, *zachodzi*

$$HD\mathcal{L}(\alpha) = F(\alpha) \quad \textit{and} \quad HD\mathcal{L}(0) \geqslant F(0)\,. \tag{8}$$

Ponadto,

$$\{x \in J(f) \colon -\infty < \chi(x) < \chi_{\inf}\} = \{x \in K \colon \overline{\chi}(x) > \chi_{\sup}\} = \emptyset \tag{9}$$

i

$$HD\,\{x \in K \colon 0 < \overline{\chi}(x) < \chi_{\inf}\} = 0\,. \tag{10}$$

Dowód (szkic)
Prawa nierówność (7) wynika z (2). Wykorzystujemy dla μ_t miary konforemnej, dla $D := g_x^n B(f^n(x), r_0)$ równości

$$\mu_t(D) \approx (\mathrm{diam} D)^t e^{-nP} = (\mathrm{diam} D)^t e^{-n\xi \times P/\xi}$$

gdzie $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$ i n takie, że $n\xi \approx \log |(f^n)'(x)|$. Logarytmujemy i dzielimy przez $\log \mathrm{diam} D$. Otrzymujemy

$$HD\mathcal{L}(\alpha, \beta) \leqslant t + P/\xi = \frac{1}{\xi}(t\xi + P).$$

Trudności techniczne, to znalezienie dla każdego ξ i $x \in \mathcal{L}(\alpha, \beta)$ ciągu $n = n_j$ takiego, żeby f^n na D było jednolistne (bez punktów krytycznych), co pozwala porówywać $|(f^n)'(x)|$ i $\mathrm{diam} D$. Potrafimy to zrobić po odrzuceniu zbioru punktów x o wymiarze Hausdorffa 0; nie umiemy jednak kontrolować ξ. W następnym twierdzeniu potrafimy zamienić max na inf tzn kontrolować ξ (w pewnych granicach) dopuszczając n_j ze skończoną krytycznością, co też pozwala porównywać $|(f^n)'(x)|^{-1}$ i $\mathrm{diam} D$.

Lewa nierówność (7) wynika z możliwości jednostajnej aproksymacji $P(t)$ funkcją ciśnienia na zbiorach hiperbolicznych K (expandingach) (teoria Katoka, mosty). Wtedy dla niezmienniczej miary równowagi μ_t takiej, że $\chi(\mu_t) = \xi$ gdzie $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$, mamy

$$HD\mathcal{L}(\alpha, \beta) \geqslant HD(\mu_t) = h_{\mu_t}(f)/\chi(\mu_t) = \frac{1}{\xi}(P(t) + t\xi).$$

Prawa równość (9) wynika z własności $\int \log|f'|\, d\mu_n \leqslant \chi(\mu)$, gdzie $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0,\dots,n-1} \delta_{f^j(x)}$ i μ jakakolwiek *słaba granica μ_n.
Wskazówka: wygodnie jest użyć funkcji
$u_k = \max\{\log|f'|, -k\} \to \log|f'|$ dla $k \searrow \infty$.

Dla dowodu pustości zbioru $\{x \in J(f) \colon -\infty < \chi(x) < \chi_{\inf}\}$ ta metoda nie pracuje i potrzeba bardziej zaawansowanych metod, a także założenia że $\chi(x)$ istnieje. W szczególności konstruuje się orbity okresowe O_n z wykładnikami $\chi(O_n) = \frac{1}{p(n)} \log|(f^{p(n)})'(z_n)|$ o granicy nie większej niż $\chi(x)$ ("shadowing"). Tutaj $z_n \in O_n$, a $p(n)$ oznacza okres O_n.

Twierdzenie (Gelfert, P, Rams)

Niech $f : \widehat{\mathbb{C}}$ *będzie niewyjątkową funkcją wymierną stopnia* $\geqslant 2$ *bez orbit okresowych parabolicznych. Wtedy dla dowolnych* $\alpha \leqslant \beta \leqslant \chi_{\mathrm{sup}}$ *gdzie* $\beta > 0$, *zachodzi*

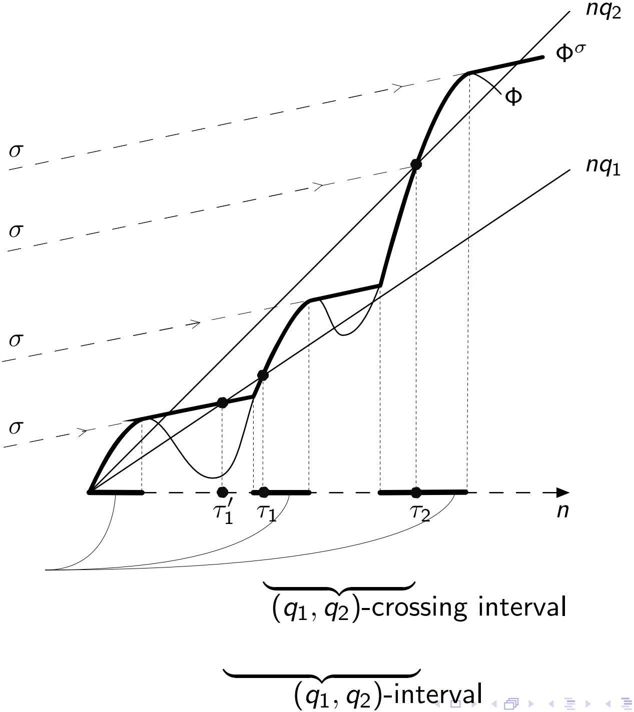
$$HD\mathcal{L}(\alpha, \beta) = \max\{0, \min\{F(\alpha^\sharp), F(\beta)\}\}, \qquad (11)$$

gdzie

$$\alpha^\sharp := \frac{\beta}{1 + (\beta - \alpha)/\chi_{\mathrm{sup}}}.$$

Rysunek na następnej stronie pokazuje, że dzięki $\beta > 0$ istnieje wiele n takich,że $\Phi(n) := \log|(f^n)'(x)|$ jest między nq_1 i nq_2 takich, że $\xi \in (q_1, q_2)$ i $q_2 - q_1 \approx 0$, oraz $\Phi = \Phi^\sigma$ gdzie $\Phi^\sigma(n) := \sup_{j \leqslant n} \Phi(j) + \sigma \cdot (n - j)$. Dla takich n funkcja f^n ma krytyczność na D ograniczoną przez stałą.

Podobne twierdzenia zachodzą dla tzw bazowych zbiorów niezmienniczych dla **multimodalnych przekształceń odcinka**.


nq_2
Φ^σ
Φ
nq_1
σ
σ
σ
σ
τ_1'
τ_1
τ_2
n
(q_1, q_2)-crossing interval
(q_1, q_2)-interval

Dziękuję za uwagę